Г. Н. Яковлев

Функциональные пространства

УДК 517
Я47

Пособие содержит краткое введение в теорию метрических, нормированных и евклидовых пространств, а также в теорию обобщённых функций, и является заключительной частью «Лекций по математическому анализу», изданных ранее.

Предназначено для студентов второго курса МФТИ.

§ 1. Метрические пространства

1.1. Определения и примеры

Многие важные понятия и утверждения математического анализа, в частности, связанные с пределами и непрерывностью, опираются на понятие расстояния. Причём сами определения этих понятий, а также формулировки и доказательства соответствующих утверждений во многих случаях не зависят от конкретного способа задания расстояния. В них используются лишь основные свойства расстояния: неотрицательность, симметрия и неравенство треугольника. Формализация этих свойств расстояния приводит к понятию метрического пространства.

Определение 1. Говорят, что на множестве M задана *метрика*, если на прямом произведении $M \times M$ задана функция

$$\rho : M \times M \to \mathbb{R},$$

обладающая свойствами:

1) $\rho(x,y) \geqslant 0 \quad \forall\, x,y \in M$;
2) $\rho(x,y) = \rho(y,x) \quad \forall\, x,y \in M$;
3) $\rho(x,y) \leqslant \rho(x,z) + \rho(z,y) \quad \forall\, x,y,z \in M$;
4) $\rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y \quad \forall\, x,y \in M$.

Эти свойства называются *аксиомами метрики* (или *расстояния*). В частности, свойство 3 называется *неравенством треугольника.*

Определение 2. Множество, на котором задана некоторая метрика, называется *метрическим пространством.* Элементы метрического пространства называются *точками.*

Метрическое пространство, точками которого являются элементы множества M и на котором задана метрика ρ, будем обозначать $\{M; \rho\}$. Заметим, что на одном и том же множестве можно задавать разные метрики, в результате получаются разные метрические пространства. И наоборот, на разных множествах метрика может быть задана по одному и тому же правилу.

Примером метрического пространства является n-мерное евклидово пространство $\mathbb{R}^n$, элементами (точками) которого являются всевозможные упорядоченные совокупности из n действительных чисел и в котором расстояние между любыми двумя точками $x = (x_1, \ldots, x_n)$ и $y = (y_1, \ldots, y_n)$ определено по формуле

$$\rho(x,y) = \left(\sum_{j=1}^{n} |y_j - x_j|^2 \right)^{1/2}. \qquad (1)$$

Известно (см. § 1 гл. 6), что функция (1) удовлетворяет всем аксиомам метрики.

Легко видеть, что функции

$$\rho_0(x,y) = \max_j |y_j - x_j|, \qquad (2)$$

$$\rho_1(x,y) = \sum_{j=1}^{n} |y_j - x_j| \qquad (3)$$

тоже удовлетворяют всем аксиомам метрики.

Другим примером метрического пространства является пространство $\mathbb{C}^n$, элементами которого являются всевозможные упорядоченные совокупности из n комплексных чисел и в котором метрика определена по формуле (1). Очевидно, что функции (2) и (3) на $\mathbb{C}^n$ тоже удовлетворяют всем аксиомам метрики.

Определение 3. Пусть задано метрическое пространство $\{M; \rho\}$ и некоторое подмножество M_1 множества M. Тогда метрическое пространство $\{M_1; \rho\}$ называется *подпространством метрического пространства* $\{M; \rho\}$.

Заметим, что в этом определении нет никаких ограничений на множество $M_1 \subset M$. В частности, оно может содержать лишь конечное число точек и даже только одну точку множества M.

В тех случаях, когда не возникает неясностей, метрическое пространство $\{M;\rho\}$ обозначают просто M. В этом смысле говорят, что любое подмножество метрического пространства является метрическим пространством (с той же метрикой).

Очевидно, метрическое пространство $\mathbb{R}^n$ является подпространством метрического пространства $\mathbb{C}^n$, в котором метрика определена по формуле (1). А пространство $\mathbb{Q}^n$, элементами которого являются всевозможные упорядоченные совокупности из n рациональных точек и в котором метрика определена по формуле (1), является подпространством пространства $\mathbb{R}^n$. Аналогичные утверждения справедливы и в том случае, когда метрика определена по формулам (2) или (3).

В метрическом пространстве естественным образом определяются ε-окрестность точки, предел последовательности, предельная точка множества, открытое множество и т.д. Приведём для примера некоторые определения.

Определение 4. Для любой точки x_0 метрического пространства $\{M;\rho\}$ и любого $\varepsilon > 0$ множество всех точек $x \in$ $\in M$, удовлетворяющих неравенству $\rho(x,x_0) < \varepsilon$, называется *$\varepsilon$-окрестностью точки* x_0 и обозначается $O_\varepsilon(x_0)$.

Для любого $r > 0$ множество $O_r(x_0)$ называют ещё *открытым шаром радиуса r с центром в точке x_0*.

Определение 5. Точка x_0 метрического пространства M называется *пределом последовательности* $\{x_n\}$ точек из M, если

$$\forall\,\varepsilon > 0 \quad \exists\, N_\varepsilon : \quad \forall\, n \geqslant N_\varepsilon \quad x_n \in O_\varepsilon(x_0). \tag{4}$$

Очевидно, условие (4) равносильно условию

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x_n,x_0) = 0. \tag{5}$$

Если выполнено условие (4) (или (5)), то будем говорить, что последовательность $\{x_n\}$ сходится к точке x_0, и писать:

$$x_n \to x_0 \quad \text{при} \quad n \to \infty \quad \text{или} \quad \lim_{n\to\infty} x_n = x_0.$$

Последовательность точек метрического пространства может сходиться только к одной точке. Действительно, если $x_n \to x$ и $x_n \to y$ при $n \to \infty$, то

$$\rho(x,y) \leqslant \rho(x,x_n) + \rho(x_n,y) \to 0$$

при $n \to \infty$, поэтому $\rho(x,y) = 0$, и, следовательно, $x = y$.

Определение 6. Множество $X \subset M$ называется *ограниченным*, если существует точка $x_0 \in M$ и число $r > 0$ такое, что $X \subset O_r(x_0)$.

Очевидно, если последовательность $\{x_n\}$ точек метрического пространства $\{M;\rho\}$ сходится к точке $x_0 \in M$, то эта последовательность ограничена.

Действительно, так как $\rho(x_n,x_0) \to 0$ при $n \to \infty$, то

$$\exists\, C: \quad \rho(x_n,x_0) \leqslant C \quad \forall\, n.$$

Определение 7. Пусть G — множество точек метрического пространства $\{M;\rho\}$. Точка $x_0 \in M$ называется *точкой прикосновения множества* $G \subset M$, если в любой ε-окрестности точки x_0 содержится хотя бы одна точка множества G.

Множество всех точек прикосновения множества $G \subset M$ называется *замыканием множества* G и обозначается $\overline{G}$.

Множество называется *замкнутым*, если оно совпадает со своим замыканием.

Множество всех точек ε-окрестности точки x_0, отличных от x_0, называется *проколотой ε-окрестностью точки* x_0 и обозначается $\overset{\circ}{O}_\varepsilon(x_0)$.

Точка $x_0 \in M$ называется *предельной точкой множества* $G \subset M$, если в любой проколотой ε-окрестности точки x_0 содержится хотя бы одна точка множества G.

Очевидно, замыкание множества G получается присоединением к G всех его предельных точек.

Определение 8. Точка $x_0 \in M$ называется *граничной точкой множества* $G \subset M$, если в любой ε-окрестности точки x_0 имеется хотя бы по одной точке как из G, так и из $M \setminus G$.

Множество всех граничных точек множества G называется *границей множества* G и обозначается ∂G.

Как обычно доказывается, что граница любого множества $G \subset M$ является замкнутым множеством.

Легко видеть, что для любого множества $G \subset M$ справедливо равенство
$$\overline{G} = G \cup \partial G.$$

Определение 9. Точка x_0 множества $G \subset M$ называется *внутренней*, если существует такое $\delta > 0$, что $O_\delta(x_0) \subset G$. Множество G называется *открытым*, если все его точки внутренние.

Очевидно, множество всех точек метрического пространства является одновременно открытым и замкнутым. По определению считают, что пустое множество тоже одновременно открытое и замкнутое.

Для примера рассмотрим метрическое пространство точек некоторого числового промежутка Δ с естественной метрикой. В этом пространстве множество Δ является одновременно и открытым, и замкнутым. В частности, если, например, $\Delta = (-1; 2)$, то множество точек интервала $(0; 1)$ открыто, его замыкание равно отрезку $[0; 1]$. Множество $(0; 2)$ тоже открыто, но его замыкание равно промежутку $[0; 2)$.

В конце приведём несколько свойств открытых и замкнутых множеств метрического пространства.

Лемма 1. *Множество $G \subset M$ открыто тогда и только тогда, когда множество $F = M \setminus G$ замкнуто.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть G открыто, и пусть $x_0 \in G$. Тогда
$$\exists\, \delta > 0: \quad O_\delta(x_0) \subset G,$$
и поэтому точка $x_0 \in G$ не может быть точкой прикосновения множества $F = M \backslash G$. Следовательно, любая точка прикосновения множества F принадлежит F, т.е. F замкнуто.

Пусть теперь множество $F = M \setminus G$ замкнуто, и пусть $x_0 \in$ $\in G$. Тогда точка x_0 не может быть предельной точкой для F, поэтому
$$\exists\, \delta > 0: \quad \forall\, x \in O_\delta(x_0) \quad x \notin F,$$
и, следовательно, $O_\delta(x_0) \subset G$.

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Объединение любой совокупности открытых множеств есть открытое множество. Пересечение любой совокупности замкнутых множеств есть замкнутое множество.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть задана некоторая совокупность (конечная или бесконечная) открытых множеств $G_\alpha \subset$ $\subset M$. Тогда если $x_0 \in G = \bigcup_\alpha G_\alpha$, то $\exists\, \alpha: \ x \in G_\alpha$. А так как G_α открыто, то
$$\exists\, \delta > 0: \quad O_\delta(x_0) \subset G_\alpha,$$
и поэтому $O_\delta(x_0) \subset G$. Следовательно, множество G открытое.

Второе утверждение следует из леммы 1. Действительно, пусть задана совокупность замкнутых множеств $F_\alpha \subset M$, и пусть $F = \bigcap_\alpha F_\alpha$.

Множества $G_\alpha = M \backslash F_\alpha$ и $G = \bigcap_\alpha G_\alpha$ открытые. А так как $F = M \backslash G$, то множество F замкнутое.

Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Пересечение любой конечной совокупности открытых множеств есть открытое множество. Объединение любой конечной совокупности замкнутых множеств есть замкнутое множество.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть множество G есть пересечение открытых множеств $G_1, \ldots, G_n$. Если G пусто, то оно открыто. Пусть $x_0 \in G$. Тогда $x_0 \in G_j$ при любом $j = 1,2,\ldots,n$, а так как G_j открытые, то

$$\forall\, j \quad \exists\, r_j > 0 : \quad O_{r_j}(x_0) \subset G_j.$$

Очевидно, $O_r(x_0) \subset G$, где $r = \min\limits_j r_j$.

Второе утверждение следует из леммы 1.

Лемма 3 доказана.

1.2. Полные и неполные метрические пространства

Как и для точек на плоскости и в пространстве, последовательность $\{x_n\}$ точек метрического пространства $\{M;\rho\}$ называется *фундаментальной* (или *последовательностью Коши*), если она удовлетворяет условию:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N_\varepsilon : \quad \forall\, n,m \geqslant N_\varepsilon \quad \rho(x_n,x_m) < \varepsilon. \tag{1}$$

Это условие, как и раньше, будем называть *условием Коши*.

Очевидно, если последовательность $\{x_n\}$ точек метрического пространства M имеет предел в этом пространстве, т.е. если

$$\exists\, x_0 \in M : \quad \lim_{n\to\infty} \rho(x_n,x_0) = 0, \tag{2}$$

то эта последовательность удовлетворяет условию Коши. Действительно, если выполнено условие (2), то

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N_\varepsilon : \quad \forall\, n \geqslant N_\varepsilon \quad \rho(x_n,x_0) < \frac{\varepsilon}{2}\,,$$

и поэтому

$$\forall\, n,m \geqslant N_\varepsilon \quad \rho(x_n,x_m) \leqslant \rho(x_n,x_0) + \rho(x_0,x_m) < \varepsilon.$$

В общем случае обратное утверждение является неверным. Например, числовое множество

$$M = \left\{1, \frac{1}{2}\,, \frac{1}{3}\,, \ldots, \frac{1}{n}\,, \ldots\right\} \tag{3}$$

с естественной метрикой является метрическим пространством. В нём последовательность

$$x_n = \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{4}$$

является фундаментальной, но не имеет предела в M. Легко видеть, что если к множеству (3) присоединить точку $x_0 = 0$, то в новом метрическом пространстве последовательность (4) имеет предел. Более того, в этом пространстве любая фундаментальная последовательность имеет предел. (Докажите это утверждение!)

Определение 1. Метрическое пространство называется *полным*, если любая фундаментальная последовательность его точек имеет предел в этом пространстве. В противном случае метрическое пространство называется *неполным*.

Как мы уже знаем, пространство $\mathbb{R}^n$ является полным, а пространство $\mathbb{Q}^n$ является неполным. Приведём ещё несколько примеров полных и неполных метрических пространств.

Пример 1. Пространство $C([a;b])$ непрерывных на отрезке $[a;b]$ функций с метрикой

$$\rho(f,g) = \sup_{x \in [a;b]} |f(x) - g(x)| \tag{5}$$

является полным.

Действительно, если последовательность функций $f_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$, фундаментальна относительно метрики (5), то при любом фиксированном $x \in [a;b]$ числовая последовательность $\{f_n(x)\}$ является фундаментальной, и поэтому имеет предел (в силу полноты пространства $\mathbb{R}$). Обозначим этот предел $f(x)$. Очевидно $f_n(x) \to f(x)$ при $n \to \infty$ по метрике (5). Действительно, так как

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N_\varepsilon : \quad \forall n,m \geqslant N_\varepsilon \quad |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

для любого $x \in [a;b]$. Зафиксируем x и перейдём к пределу при

$m \to \infty$, в пределе для любого $n \geqslant N_\varepsilon$ получим неравенство

$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon \quad \forall\, x \in [a; b].$$

Следовательно, последовательность непрерывных на $[a; b]$ функций $f_n(x)$ равномерно сходится к функции $f(x)$. Ранее было доказано, что тогда функция $f(x)$ тоже непрерывна на $[a; b]$. Полнота пространства $C([a; b])$ доказана.

Пример 2. Пространство ограниченных на отрезке $[a; b]$ функций с метрикой (5) является полным.

Действительно, как и в примере 1, доказывается, что если последовательность функций $\{f_n(x)\}$ фундаментальна относительно метрики (5), то она сходится к некоторой функции $f(x)$, $x \in [a; b]$, в метрике (5). Тогда

$$\exists\, n_1 : \sup_{x \in [a;b]} |f_{n_1}(x) - f(x)| < 1,$$

и поэтому для любого $x \in [a; b]$

$$|f(x)| \leqslant |f(x) - f_{n_1}(x)| + |f_{n_1}(x)| \leqslant 1 + \sup_{x \in [a;b]} |f_{n_1}(x)|\,.$$

Следовательно, функция $f(x)$ ограничена, что и доказывает полноту рассматриваемого метрического пространства.

Аналогично доказывается, что множество всех ограниченных числовых последовательностей с метрикой

$$\rho(\{\xi^k\},\{\eta^k\}) = \sup_k \left|\xi^k - \eta^k\right| \tag{6}$$

является полным метрическим пространством.

Пример 3. Множество всех сходящихся последовательностей действительных чисел с метрикой (6) является полным метрическим пространством.

Пусть последовательность $\{x_n\}$ элементов этого пространства фундаментальна относительно метрики (6). Тогда если $x_n = \{\xi_n^k\}$, то

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N_\varepsilon : \quad \forall\, n,m \geqslant N_\varepsilon \quad \left|\xi_n^k - \xi_m^k\right| < \varepsilon \quad \forall\, k. \tag{7}$$

Отсюда следует, что при фиксированном k числовая последовательность $\{\xi_n^k\}$ сходится. Пусть

$$\lim_{n\to\infty} \xi_n^k = \xi^k.$$

Тогда, переходя к пределу при $m \to \infty$ в неравенстве (7), получаем:

$$\forall\, n \geqslant N_\varepsilon \quad \left|\xi_n^k - \xi^k\right| \leqslant \varepsilon \quad \forall\, k,$$

т.е.

$$\forall\, n \geqslant N_\varepsilon \quad \sup_k \left|\xi_n^k - \xi^k\right| \leqslant \varepsilon,$$

а это означает, что $x_n \to x = \{\xi^k\}$ при $n \to \infty$.

Осталось показать, что последовательность $\{\xi^k\}$ сходящаяся.

Для любых k, p и n имеем:

$$|\xi^k - \xi^{k+p}| \leqslant |\xi^k - \xi_n^k| + |\xi_n^k - \xi_n^{k+p}| + \\ + |\xi_n^{k+p} - \xi^{k+p}| \leqslant 2\rho(x,x_n) + |\xi_n^k - \xi_n^{k+p}|. \qquad (8)$$

Из того, что $x_n \to x$ при $n \to \infty$, следует, что

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, n_\varepsilon : \quad \rho(x,x_n) < \frac{\varepsilon}{3}\,,$$

а из сходимости последовательности $x_{n_\varepsilon} = \{\xi_{n_\varepsilon}^k\}$ следует, что

$$\exists\, K_\varepsilon : \quad \forall\, k \geqslant K_\varepsilon, \forall\, p \quad \left|\xi_{n_\varepsilon}^k - \xi_{n_\varepsilon}^{k+p}\right| < \varepsilon/3,$$

и поэтому

$$\forall\, k \geqslant K_\varepsilon, \forall\, p \quad \left|\xi^k - \xi^{k+p}\right| < \varepsilon.$$

Следовательно, последовательность $x = \{\xi^k\}$ сходящаяся.

Рассмотрим ещё пример неполного метрического пространства.

Пример 4. В множестве функций, определённых и непрерывных на отрезке $[a;b]$, введём метрику по формуле

$$\rho(f;g) = \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx. \qquad (9)$$

Покажем, что это метрическое пространство является неполным.

Рассмотрим последовательность функций

$$f_n(x) = \begin{cases} -1, & \text{если } x \in \left[-1; -\dfrac{1}{n}\right], \\ nx, & \text{если } x \in \left[-\dfrac{1}{n}\,; \dfrac{1}{n}\right], \\ +1, & \text{если } x \in \left[\dfrac{1}{n}\,; 1\right]. \end{cases} \tag{10}$$

Очевидно, для любых n и p

$$\int_{-1}^{1} |f_{n+p}(x) - f_n(x)|\; dx \leqslant$$

$$\leqslant \int_{-1}^{1} |f_{n+p}(x) - \operatorname{sgn} x|\; dx + \int_{-1}^{1} |\operatorname{sgn} x - f_n(x)|\; dx =$$

$$= \frac{1}{n+p} + \frac{1}{n}\,,$$

и поэтому последовательность непрерывных функций (10) фундаментальна относительно метрики (9). Легко видеть, что в этой метрике она сходится к разрывной функции $f(x) = \operatorname{sgn} x$, $x \in [-1; 1]$. Покажем, что в множестве непрерывных функций предела нет.

Предположим противное: пусть последовательность (10) в метрике (9) сходится к непрерывной функции $g(x)$, $x \in [-1; 1]$. Тогда

$$\int_{-1}^{1} |f(x) - g(x)|\, dx = 0,$$

причём функция $F(x) = f(x) - g(x)$ непрерывна во всех точках отрезка $[-1; 1]$, кроме точки $x = 0$. Следовательно, $g(x) = f(x)$ для любого $x \neq 0$ из отрезка $[-1; 1]$, что противоречит предположению, что $g(x)$ непрерывна на $[-1; 1]$.

Последнее утверждение является следствием следующей простой леммы.

Лемма. *Если функция $f(x)$ абсолютно интегрируема на промежутке Δ и*

$$\int_{\Delta} |f(x)|\, dx = 0,$$

то $f(x) = 0$ *в любой точке* $x \in \Delta$, *в которой функция* f *непрерывна.*

Действительно, если функция f непрерывна в точке $x_0 \in \in \Delta$ и $f(x_0) \neq 0$, то существует окрестность $O(x_0)$ точки x_0, в которой $|f(x)| > 0$, и поэтому тогда

$$\int_\Delta |f(x)|\,dx \geqslant \int_{\Delta \cap O(x_0)} |f(x)|\,dx > 0.$$

Другие примеры полных и неполных пространств будут рассмотрены в дальнейшем. А сейчас для метрических пространств докажем одно обобщение теоремы о вложенных отрезках.

Для любого множества E точек метрического пространства $\{M; \rho\}$ величина

$$\sup_{x,y \in E} \rho(x,y)$$

называется *диаметром множества* E и обозначается $d(E)$.

Очевидно, множество E ограничено тогда и только тогда, когда $d(E) < \infty$.

Определение 2. Последовательность $\{E_n\}$ непустых множеств метрического пространства называется *последовательностью Коши*, если

$$E_{n+1} \subset E_n \quad \forall\, n, \qquad \lim_{n\to\infty} d(E) = 0.$$

Теорема. *В полном метрическом пространстве всякая последовательность Коши* $\{F_n\}$ *замкнутых множеств имеет одну общую точку.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В каждом F_n выберем по точке x_n. Легко видеть, что последовательность $\{x_n\}$ фундаментальная, а так как пространство полное, то она сходится к некоторой точке x_0 этого пространства.

Точка x_0 является точкой прикосновения для любого множества F_n. В силу замкнутости F_n, точка x_0 принадлежит любому F_n. Существование общей точки доказано, единственность следует из того, что $d(F_n) \to 0$ при $n \to \infty$.

Теорема доказана.

Сделаем ещё несколько замечаний о связи понятий полноты и замкнутости.

Замечание 1. Если метрическое пространство $\{M; \rho\}$ полное, а множество $X \subset M$ замкнуто, то метрическое пространство $\{X; \rho\}$ полное.

Действительно, любая фундаментальная последовательность точек $x_n \in X$, $n \in \mathbb{N}$, сходится к некоторой точке $x_0 \in M$, которая является точкой прикосновения множества X. А так как X замкнуто, то $x_0 \in X$.

Замечание 2. Пусть заданы метрическое пространство $\{M; \rho\}$ и некоторое множество $X \subset M$. Тогда если метрическое пространство $\{X; \rho\}$ полное, то множество X замкнуто.

Действительно, пусть x_0 — точка прикосновения множества $X \subset M$. Тогда для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует точка $x_n \in X$, лежащая в шаре $O_{1/n}(x_0)$. Очевидно, последовательность $\{x_n\}$ сходится к точке $x_0 \in M$, а так как пространство $\{X; \rho\}$ полное, то $x_0 \in X$.

1.3. Теорема о пополнении метрических пространств

Метрические пространства $\{M; \rho\}$ и $\{M'; \rho'\}$ называются *изометричными*, если существует взаимно однозначное отображение f множества M на множество M' такое, что для любых x и y из M справедливо равенство

$$\rho(x,y) = \rho'(f(x),f(y)).$$

Очевидно, изометричные пространства обладают одинаковыми свойствами (конечно, лишь теми свойствами, которые связаны только с метрикой), и, следовательно, при изучении метрических свойств изометричные пространства неразличимы. Поэтому если метрическое пространство $\{M; \rho\}$ изометрично некоторому подпространству метрического пространства $\{M^*;\rho^*\}$, то говорят, что *метрическое пространство* $\{M;\rho\}$ *содержится в метрическом пространстве* $\{M^*;\rho^*\}$.

Определение 1. Множество M' элементов метрического пространства M называется *плотным в* M, если его замыкание совпадает с M.

Определение 2. Полное метрическое пространство M^* называется *пополнением метрического пространства* M, если M содержится в M^* и плотно в нём.

Теорема. *Любое метрическое пространство имеет пополнение.*

Доказательство. Пусть $\{M;\rho\}$ — заданное метрическое пространство. Построим новое метрическое пространство $\{M^*;\rho^*\}$, которое содержит пространство $\{M;\rho\}$.

Последовательности $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ элементов из M, удовлетворяющих условию
$$\lim_{n\to\infty}\rho(x_n,y_n)=0,$$
будем называть *эквивалентными* и писать $\{x_n\}\sim\{y_n\}$. Очевидно, если $\{x_n\}\sim\{y_n\}$, а $\{y_n\}\sim\{z_n\}$, то $\{x_n\}\sim\{z_n\}$, и поэтому множество всех последовательностей в M распадается на непересекающиеся классы эквивалентных последовательностей. Нас будут интересовать только фундаментальные последовательности.

Итак, в пространстве $\{M;\rho\}$ рассмотрим множество всех фундаментальных последовательностей, и через M^* обозначим множество всех классов эквивалентных фундаментальных последовательностей. Если фундаментальная последовательность $\{x_n\}$ принадлежит классу x^*, то, как обычно, будем писать $\{x_n\}\in x^*$. В множестве M^* определим метрику. Очевидно,
$$\rho(x_n,y_n)\leqslant\rho(x_n,x_m)+\rho(x_m,y_m)+\rho(y_m,y_n)$$

для любых n и m, и поэтому

$$|\rho(x_n,y_n) - \rho(x_m,y_m)| \leqslant \rho(x_n,x_m) + \rho(y_m,y_n).$$

Отсюда следует, что если последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ фундаментальные, то числовая последовательность $\rho(x_n,y_n)$, $n \in \in \mathbb{N}$, — тоже фундаментальная и, следовательно, имеет предел. Тогда если $\{x_n\} \in x^*$, $\{y_n\} \in y^*$, то расстояние между x^* и y^* определим по формуле

$$\rho(x^*,y^*) = \lim_{n\to\infty} \rho(x_n,y_n).$$

Прежде всего покажем, что это определение не зависит от выбора последовательностей из классов x^* и y^*.

Пусть $\{x'_n\} \in x^*$ и $\{y'_n\} \in y^*$. Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$

$$\rho(x'_n,y'_n) \leqslant \rho(x'_n,x_n) + \rho(x_n,y_n) + \rho(y_n,y'_n),$$
$$\rho(x_n,y_n) \leqslant \rho(x_n,x'_n) + \rho(x'_n,y'_n) + \rho(y'_n,y_n),$$

и поэтому

$$|\rho(x'_n,y'_n) - \rho(x_n,y_n)| \leqslant \rho(x_n,x'_n) + \rho(y_n,y'_n).$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x'_n,y'_n) = \lim_{n\to\infty} \rho(x_n,y_n).$$

Функция $\rho(x^*,y^*)$ удовлетворяет всем аксиомам метрики. Действительно, $\rho(x^*,y^*) \geqslant 0$ и $\rho(x^*,y^*) = \rho(y^*,x^*)$ для любых x^* и y^* из M^*. Далее, если $\rho(x^*,y^*) = 0$, то x^* и y^* совпадают, так как в этом случае, если $\{x_n\} \in x^*$, $\{y_n\} \in y^*$, то $\{x_n\} \sim \sim \{y_n\}$. Наконец, если $\{x_n\} \in x^*$, $\{y_n\} \in y^*$, $\{z_n\} \in z^*$, то из неравенства

$$\rho(x_n,y_n) \leqslant \rho(x_n,z_n) + \rho(z_n,y_n)$$

в пределе при $n \to \infty$ получаем

$$\rho(x^*,y^*) \leqslant \rho(x^*,z^*) + \rho(z^*,y^*).$$

Итак, построено метрическое пространство $\{M^*;\rho^*\}$, элементами которого являются классы эквивалентных фундаментальных последовательностей элементов из M.

Покажем, что пространство $\{M^*;\rho^*\}$ содержит подпространство, которое изометрично пространству $\{M;\rho\}$.

Каждому элементу $x \in M$ поставим в соответствие элемент $x^* \in M^*$, содержащий стационарную последовательность $x_n = x$, $n \in \mathbb{N}$. Очевидно, это соответствие определяет взаимно однозначное отображение M на некоторое подмножество M' множества M^*. Более того, это отображение является изометричным, так как если x^* и y^* из M', то существуют x и y из M такие, что $\{x\} \in x^*$, $\{y\} \in y^*$, и поэтому

$$\rho^*(x^*,y^*) = \rho(x,y).$$

Докажем, что множество M' плотно в M^*, т.е. что любая точка $x^* \in M^*$ является пределом последовательности из M'.

Пусть $\{x_n\} \in x^*$. Через x_k^* обозначим элемент из M', соответствующий элементу $x_k \in M$. Тогда, согласно определению,

$$\rho^*(x^*,x_k^*) = \lim_{n\to\infty} \rho(x_n,x_k).$$

А так как последовательность $\{x_n\}$ фундаментальная, то

$$\forall\,\varepsilon > 0 \quad \exists\, N_\varepsilon : \quad \forall\, n,k \geqslant N_\varepsilon \quad \rho(x_n,x_k) < \frac{\varepsilon}{2}\,,$$

и поэтому

$$\forall\, k \geqslant N_\varepsilon \quad \rho^*(x^*,x_k^*) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Следовательно, $\lim\limits_{k\to\infty} \rho^*(x^*,x_k^*) = 0$.

Для завершения доказательства осталось показать, что метрическое пространство $\{M^*;\rho^*\}$ полное.

Пусть $\{x_n^*\}$ — фундаментальная последовательность точек из M^*. Для любого $n \in \mathbb{N}$ существует $y_n \in M$ такое, что

$$\rho^*(x_n^*;y_n^*) < \frac{1}{n}\,,$$

где y_n^* — элемент из M', соответствующий элементу $y_n \in M$.

Последовательность $\{y_n^*\}$ фундаментальная. Действительно, это следует из неравенства

$$\rho^*(y_n^*,y_m^*) \leqslant \rho^*(y_n^*,x_n^*) + \rho^*(x_n^*,x_m^*) + \rho^*(x_m^*,y_m^*) <$$

$$< \frac{1}{n} + \rho^*(x_n^*,x_m^*) + \frac{1}{m} \tag{1}$$

и фундаментальности последовательности $\{x_n^*\}$. А так как $\rho^*(y_n^*,y_m^*) = \rho(y_n,y_m)$, то фундаментальной будет и последовательность $\{y_n\}$. Через y^* обозначим класс эквивалентных фундаментальных последовательностей, содержащий последовательность $\{y_n\}$. Тогда

$$\rho^*(y^*,x_n^*) \leqslant \rho^*(y^*,y_n^*) + \rho^*(y_n^*,x_n^*) < \rho^*(y^*,y_n^*) + \frac{1}{n} =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \rho(y_k,y_n) + \frac{1}{n}\,.$$

А так как

$$\forall\,\varepsilon > 0 \quad \exists\,N_\varepsilon : \quad \forall\,k,n \geqslant N_\varepsilon \quad \rho(x_k,y_n) + \frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2}\,,$$

то

$$\forall\,n \geqslant N_\varepsilon \quad \rho^*(y^*,x_n^*) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

и, следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} \rho^*(y^*,x_n^*) = 0$.

Теорема доказана.

В пункте 1.2 было доказано, что пространство $CL_1([a;b])$ является неполным. Пополнение этого пространства обозначается $L_1([a;b])$ и называется *пространством абсолютно интегрируемых на отрезке* $[a;b]$ *функций*.

1.4. Компакты

Как и для множеств точек пространства $\mathbb{R}^n$, произвольная совокупность множеств X_α, $\alpha \in A$, точек метрического пространства $\{M;\rho\}$ называется *покрытием множества* $X \subset M$, если $X \subset \bigcup_\alpha X_\alpha$. Покрытие называется *открытым*, если все его множества открытые.

Определение 1. Множество X точек метрического пространства $\{M;\rho\}$ называется *компактным* (или *компактом*), если из любого его открытого покрытия можно выделить конечное число множеств, которые тоже покрывают множество X.

Известно, что множество точек пространства $\mathbb{R}^n$ компактно тогда и только тогда, когда оно ограничено и замкнуто в $\mathbb{R}^n$ (см. § 3 главы 6). Как увидим в дальнейшем, в общем случае для метрических пространств это утверждение является неверным. Вместо ограниченности нужна так называемая *вполне ограниченность множества.* Для множеств из $\mathbb{R}^n$ эти понятия совпадают.

Определение 2. Пусть X — некоторое множество точек метрического пространства $\{M;\rho\}$. Множество $B \subset M$ называется *ε-сетью для множества* X, если

$$\forall\, x \in X \quad \exists\, a \in B: \quad \rho(x,a) \in \varepsilon.$$

Определение 3. Множество X точек метрического пространства $\{M;\rho\}$ называется *вполне ограниченным*, если для любого $\varepsilon > 0$ в M для него существует конечная ε-сеть.

Ясно, что всякое вполне ограниченное множество является ограниченным. Однако существуют ограниченные множества, которые не являются вполне ограниченными. Например, множество последовательностей

$$e_1 = (1,0,\ldots), e_2 = (0,1,0,\ldots), \ldots, e_n = (0,\ldots,0,1,\ldots), \ldots$$

(здесь у e_n n-й член равен 1, а все другие равны нулю), в пространстве ограниченных последовательностей (см. пример **2** из п. 1.2) является ограниченным, но, очевидно, для него не существует конечной ε-сети, например, с $\varepsilon = 0{,}5$.

Заметим, что в определениях 1 и 3 возможен случай, когда $X = M$. Оказывается, не ограничивая общности, можно рассматривать только этот случай. В связи с этим вводят следующие определения.

Метрическое пространство $\{M;\rho\}$ называется *компактным*, если множество M компактно. Аналогично, метрическое пространство $\{M;\rho\}$ называется *вполне ограниченным*, если множество M вполне ограничено.

Лемма. *Множество X точек метрического пространства $\{M; \rho\}$ компактно (вполне ограничено) тогда и только тогда, когда компактно (соответственно вполне ограничено) метрическое пространство $\{X; \rho\}$.*

Доказательство. Пусть множество $X \subset M$ компактно. Докажем, что пространство $\{X; \rho\}$ тоже компактно.

Пусть открытые в пространстве $\{X; \rho\}$ множества X_α, $\alpha \in A$, покрывают множество X. Вообще говоря, эти множества могут не быть открытыми в пространстве $\{M; \rho\}$, однако их δ-окрестности в этом пространстве будут открытыми. В силу компактности множеств $X \subset M$ существует конечное число множеств X_α, δ-окрестности которых покрывают множество X. Эти множества покрывают множество X в пространстве $\{X; \rho\}$.

Пусть теперь пространство $\{X; \rho\}$ компактное. Докажем, что множество $X \subset M$ компактно в пространстве $\{M; \rho\}$.

Пусть открытые в пространстве $\{M; \rho\}$ множества $G_\alpha \subset M$, $\alpha \in A$, покрывают множество M. Очевидно, множества

$$X_\alpha = G_\alpha \cap X, \qquad \alpha \in A,$$

являются открытыми в пространстве $\{X; \rho\}$ и покрывают множество X. В силу компактности пространства $\{X; \rho\}$ существует конечное число множеств G_α, пересечения которых с X покрывают множество X. Эти множества покрывают множество X.

Первое утверждение доказано. Второе утверждение почти очевидное. Докажите его в качестве упражнения.

В силу этой леммы в дальнейшем для простоты все утверждения о компактных множествах будем формулировать и доказывать для компактных пространств.

Теорема 1. *Если метрическое пространство компактное, то оно полное и вполне ограниченное.*

Доказательство. Сначала докажем, что если метрическое пространство M компактное, то оно полное. Доказывать будем методом от противного.

Предположим, что некоторое компактное метрическое пространство M является неполным, и через M^* обозначим его пополнение. Тогда в M^* существует точка x^*, которая не принадлежит множеству M. Как обычно, через $O_{1/n}(x^*)$ обозначим открытый шар радиуса $1/n$ с центром в точке x^*, а через $\overline{O}_{1/n}(x^*)$ — его замыкание. Семейство открытых множеств

$$G_n = M \backslash \overline{O}_{1/n}(x^*), \quad n \in \mathbb{N},$$

покрывает множество M. Однако никакая конечная совокупность этих множеств его не покрывает, так как любой шар $O_{1/n}(x^*)$ содержит хотя бы одну точку множества M. Следовательно, наше предположение неверное.

Докажем теперь, что если метрическое пространство M компактное, то оно вполне ограниченное.

Каждую точку $x \in M$ покроем шаром $O_\varepsilon(x)$ радиуса $\varepsilon > 0$. Из компактности M следует существование конечного числа точек $x_1, x_2, \ldots, x_N$ таких, что шары

$$O_\varepsilon(x_j), \qquad j = 1, 2, \ldots, N,$$

покрывают множество M. Очевидно, что эти точки образуют конечную ε-сеть для множества M.

Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Если метрическое пространство полное и вполне ограниченное, то оно компактное.*

Доказательство. Пусть метрическое пространство M полное и вполне ограниченное. Предположим, что оно не является компактным, т.е. существует семейство открытых множеств X_α, $\alpha \in A$, которое покрывает множество M, но никакая конечная совокупность этих множеств не покрывает это множество.

В силу того, что множество M вполне ограничено, для любого $\varepsilon > 0$ существует конечное число точек $x_1, x_2, \ldots, x_N$ таких, что шары $O_\varepsilon(x_j)$, $j = 1, 2, \ldots, N$, покрывают множество M. Из нашего предположения следует, что одно из множеств $\overline{O}_1(x_j)$ не покрывается никакой конечной совокупностью множеств X_α. Обозначим это множество через F_1. Оно вполне ограниченное, поэтому для $\varepsilon = 1/2$ существует конечное число точек таких, что шары радиуса $1/2$ с центрами в этих точках покрывают F_1. Через F_2 обозначим ту часть множества F_1, которая лежит в круге радиуса $1/2$ и не покрывается никакой конечной совокупностью множеств X_α. Поступая так и далее, по индукции построим последовательность замкнутых множеств F_n, $n \in \mathbb{N}$, таких, что

$$F_{n+1} \subset F_n, \qquad d(F_n) \leqslant \frac{2}{n},$$

причём любое из них не покрывается никакой конечной совокупностью множеств X_α.

С другой стороны, в силу полноты пространства M множества F_n, $n \in \mathbb{N}$, имеют одну общую точку $x_0 \in M$. Точка x_0 накрывается некоторым открытым множеством X_{α_0}, причём это множество покрывает некоторый шар $O_\delta(x_0)$, $\delta > 0$. Если $\dfrac{2}{n} < \delta$, то $F_n \subset O_\delta(x_0)$. Следовательно, если $\dfrac{2}{n} < \delta$, то $F_n \subset X_{\alpha_0}$, что противоречит нашему предположению.

Теорема 2 доказана.

Таким образом, имеет место следующий *критерий компактности метрических пространств*:

Для того чтобы метрическое пространство было компактным, необходимо и достаточно, чтобы оно было полным и вполне ограниченным.

Докажем ещё один критерий компактности метрических пространств.

Теорема 3. *Метрическое пространство компактно тогда* *и только тогда, когда любая последовательность его точек содержит сходящуюся подпоследовательность.*

Доказательство. Докажем сначала следующее утверждение:

Если метрическое пространство $\{M; \rho\}$ компактное, то любая последовательность $\{x_n\}$ его точек содержит сходящуюся подпоследовательность.

Предположим, что есть последовательность $\{x_n\}$, которая не имеет сходящейся подпоследовательности. Следовательно, ни одна точка $x \in M$ не является её частичным пределом, и поэтому у каждой точки x есть окрестность $O(x)$, которая содержит лишь конечное число членов последовательности $\{x_n\}$. Эти окрестности образуют покрытие множества M, причём, согласно построению, никакая конечная совокупность не покрывает последовательность $\{x_n\}$, что противоречит компактности множества M.

Наше утверждение доказано. Докажем теперь обратное утверждение:

Если любая последовательность $\{x_n\}$ точек метрического пространства $\{M; \rho\}$ содержит сходящуюся подпоследовательность, то это пространство компактное.

Во-первых, это пространство полное. Действительно, любая фундаментальная последовательность имеет предел, так как у неё есть сходящаяся подпоследовательность. Докажем, что пространство $\{M; \rho\}$ вполне ограниченное. Доказывать будем методом от противного.

Пусть множество M не является вполне ограниченным, т.е. существует $\varepsilon > 0$ такое, что для M не существует конечной ε-сети. Тогда, очевидно, множество M содержит бесконечное число точек. Построим последовательность $\{x_n\}$ следующим образом.

Выберем некоторую точку $x_1 \in M$. По предположению, она не образует ε-сети для M, поэтому существует точка $x_2 \in M$

такая, что $\rho(x_1,x_2) \geqslant \varepsilon$. Точки x_1, x_2 тоже не образуют ε-сети для X, и поэтому существует точка x_3 такая, что $\rho(x_3,x_j) \geqslant \varepsilon$, $j = 1,2$. Точки x_1,x_2,x_3 выбраны так, что для любого $i \neq j$, где $i,j = 1,2,3$, справедливо неравенство

$$\rho(x_i,x_j) \geqslant \varepsilon. \tag{1}$$

Пусть в множестве X выбраны точки $x_1,x_2,\ldots,x_n$ так, что для любых $i \neq j$, где $i,j = 1,2,\ldots,n$, справедливо неравенство (1). Так как эти точки не образуют ε-сети для X, то существует точка $x_{n+1} \in X$ такая, что

$$\rho(x_{n+1},x_i) \geqslant \varepsilon \quad \forall\, i = 1,2,\ldots,n.$$

Таким образом, по индукции, строится последовательность $\{x_n\}$, для которой справедливо условие:

$$\rho(x_i,x_j) \geqslant \varepsilon \quad \forall\, i \neq j.$$

Очевидно, эта последовательность не является фундаментальной.

Теорема 3 доказана.

В учебной и научной литературе компактные множества (в нашем определении) иногда называют *бикомпактами*, а *компактами* называют множества, у которых любая последовательность их точек содержит сходящуюся подпоследовательность. Теорема 3 утверждает, что для метрических пространств эти понятия совпадают.

Множество метрического пространства будем называть *предкомпактом*, если его замыкание компактно. Из критерия компактности следует, что *множество точек полного метрического пространства предкомпактно тогда и только тогда, когда оно вполне ограничено.*

В учебной и научной литературе предкомпактные множества иногда называются компактными, а компактные — бикомпактными.

1.5. Критерий Арцела компактности множеств в пространстве непрерывных функций

В этом пункте укажем необходимые и достаточные условия предкомпактности семейства функций в пространстве непрерывных функций $C[a;b]$, но прежде сформулируем несколько определений.

Определение 1. Семейство S функций f, определённых и непрерывных на отрезке $[a;b]$, называется *равномерно ограниченным*, если

$$\exists\, c: \quad \forall\, f \in S \quad \max_{x\in[a;b]} |f(x)| \leqslant c. \tag{1}$$

Определение 2. Семейство S функций f, определённых и непрерывных на отрезке $[a;b]$, называется *равностепенно непрерывным*, если

$$\begin{gathered} \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0: \quad \forall\, f \in S, \forall\, x, x' \in [a;b]: \\ |x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon. \end{gathered} \tag{2}$$

Теорема. *Семейство S функций f, определённых и непрерывных на отрезке $[a;b]$, предкомпактно в пространстве $C[a;b]$ тогда и только тогда, когда оно равномерно ограничено и равностепенно непрерывно.*

Доказательство. Пусть семейство S предкомпактно. Согласно определению, это означает, что $\overline{S}$ компактно. Поэтому множество $\overline{S}$, а следовательно, и множество S в пространстве $C[a;b]$ не только ограничено, но и вполне ограничено.

Ограниченность семейства S в пространстве $C[a;b]$ означает, что это семейство функций равномерно ограничено на отрезке $[a;b]$.

Вполне ограниченность семейства S в пространстве $C[a;b]$ означает, что для любого $\varepsilon > 0$ в $C[a;b]$ для S существует конечная ε-сеть.

Пусть для выбранного $\varepsilon > 0$ ε-сеть состоит из функций

$$f_1(x), \ldots, f_N(x).$$

Каждая функция $f_j(x)$ равномерно непрерывна на $[a;b]$. Поэтому

$$\exists\, \delta > 0 : \quad \forall\, j, \forall\, x_1, x_2 \in [a;b] : \quad |x_2 - x_1| < \delta \Rightarrow \\ \Rightarrow |f_j(x_2) - f_j(x_1)| < \varepsilon.$$

Пусть теперь $f \in S$. В силу определения ε-сети

$$\exists\, j : \quad \max_x |f(x) - f_j(x)| < \varepsilon.$$

Поэтому если $|x_1 - x_2| < \delta$, то

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant |f(x_1) - f_j(x_1)| + \\ + |f_j(x_1) - f_j(x_2)| + |f_j(x_2) - f(x_2)| < \\ < 3\varepsilon.$$

И так как это выполняется для любой $f \in S$, то мы доказали, что семейство S равностепенно непрерывно.

Докажем обратное утверждение: если семейство S равномерно ограничено и равностепенно непрерывно, то оно предкомпактно. А так как пространство $C[a;b]$ полное, то достаточно доказать, что семейство S вполне ограничено в пространстве функций, определённых и ограниченных на отрезке $[a;b]$.

Итак, пусть семейство S функций $f \in C[a;b]$ удовлетворяет условиям (1) и (2). Зададим некоторое $\varepsilon > 0$. Для этого $\varepsilon > 0$ на отрезке $[a;b]$ выберем точки $x_1, x_2, \ldots, x_n$ так, чтобы

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b, \qquad x_i - x_{i-1} < \delta \quad \forall\, i,$$

а на отрезке $[-c;c]$ — точки $y_0, y_1, \ldots, y_m$ так, чтобы

$$-c = y_0 < y_1 < \ldots < y_m = c, \qquad y_j - y_{j-1} < \varepsilon \quad \forall\, j.$$

Через A обозначим множество всех непрерывных на $[a;b]$ функций, графиками которых являются ломаные с вершинами в точках (x_i,y_i). Очевидно, множество A состоит из конечного числа функций.

Выберем теперь некоторую функцию $f \in S$. Для каждого x_i через (x_i,y_{j_i}) обозначим точку вида (x_i,y_j), ближайшую к точке $(x_i,f(x_i))$. Очевидно,

$$|f(x_i) - y_{j_i}| < \varepsilon.$$

Через φ обозначим непрерывную функцию, графиком которой является ломаная с вершинами в точках

$$(x_0,y_0),\ (x_1,y_{j_1}),\ \ldots,\ (x_n,y_{j_n}).$$

Очевидно, для любого i имеем:

$$|\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1})| \leqslant |\varphi(x_i) - f(x_i)| + |f(x_i) - f(x_{i-1})| + \\ + |f(x_{i-1}) - \varphi(x_{i-1})| < 3\varepsilon.$$

Кроме того, для любого $x \in [x_{i-1};x_i]$

$$|\varphi(x) - \varphi(x_{i-1})| \leqslant |\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1})| < 3\varepsilon.$$

Для оценки $\rho(f,\varphi)$ в пространстве $C[a;b]$ заметим, что каждая точка $x \in [a;b]$ содержится в некотором отрезке $[x_{i-1};x_i]$, и поэтому

$$|f(x) - \varphi(x)| \leqslant |f(x) - f(x_{i-1})| + |f(x_{i-1}) - \varphi(x_{i-1})| + \\ + |\varphi(x_{i-1}) - \varphi(x)| < \varepsilon + \varepsilon + 3\varepsilon = 5\varepsilon.$$

Следовательно, $\rho(f,\varphi) < 5\varepsilon$.

Так как здесь ε может быть любым положительным числом, то тем самым доказано, что множество S вполне ограничено.

Теорема доказана.

Эта теорема называется *критерием Арцела компактности семейства непрерывных функций.*

§ 2. Отображения метрических пространств

2.1. Непрерывные отображения

Пусть заданы два метрических пространства $\{X; \rho_X\}$, $\{Y; \rho_Y\}$ и некоторое множество $G \subset X$. Тогда если задано правило f, по которому каждой точке $x \in G$ ставится в соответствие некоторая точка $y \in Y$, то говорят, что задано отображение множества G метрического пространства X в метрическое пространство Y.

Так как множество $G \subset X$ с метрикой ρ_X является метрическим пространством, то, не ограничивая общности, можно считать, что $G = X$. Поэтому в дальнейшем будем рассматривать отображения метрических пространств.

Как обычно, если задано отображение $f : X \to Y$, то точка $y \in Y$, которая ставится в соответствие точке $x \in X$, называется *образом точки x при отображении f* и обозначается $f(x)$, а любая точка $x \in X$, которой в соответствие ставится точка $y \in Y$, называется *прообразом точки y*. Множество всех прообразов точки $y \in Y$ называется *полным прообразом точки y* и обозначается $f^{-1}(y)$.

Для любого множества $A \subset X$ множество всех $y = f(x)$, $x \in \in A$, называется *образом множества G* и обозначается $f(A)$.

Для любого множества $B \subset Y$ множество всех $x \in X$ таких, что $f(x) \subset B$, называется *полным прообразом* (или просто *прообразом*) *множества B* и обозначается $f^{-1}(B)$.

Определение 1. Отображение $f : X \to Y$ называется *непрерывным в точке $x_0 \in X$*, если

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 : \quad \forall\, x \in O_\delta(x_0),\, f(x) \in O_\varepsilon(y_0), \tag{1}$$

где $y_0 = f(x_0)$.

Условие (1) можно записать в равносильной форме, используя вместо ε-δ-окрестностей произвольные окрестности.

Напомним, что любое открытое множество, содержащее точку x_0, называется *окрестностью точки x_0* и обозначается

$O(x_0)$. Легко видеть, что условие (1) равносильно условию:

$$\forall\, O(y_0) \quad \exists\, O(x_0): \quad f(O(x_0)) \subset O(y_0). \tag{2}$$

Как и для числовых функций, определение непрерывности отображения можно сформулировать с помощью последовательностей.

Определение 2. Отображение $f : X \to Y$ называется *непрерывным в точке* $x_0 \in X$, если для любой последовательности $\{x_n\}$ точек из X, сходящейся к x_0, последовательность точек $y_n = f(x_n)$, $n \in \mathbb{N}$, сходится к $y_0 = f(x_0)$.

Доказательство эквивалентности определений 1 и 2 аналогично случаю числовых функций.

В качестве упражнения предлагается доказать *теорему о непрерывности композиции непрерывных отображений.*

Теорема 1. *Если отображение $f : X \to Y$ непрерывно в точке $x_0 \in X$, а отображение $g : Y \to Z$ непрерывно в точке $y_0 = f(x_0)$, то их композиция, заданная формулой $z = g(f(x))$, непрерывна в точке x_0.*

Определение 3. Отображение $f : X \to Y$ называется *непрерывным отображением пространства X в пространство Y*, если оно непрерывно в каждой точке $x \in X$.

Теорема 2. *Отображение f метрического пространства X в метрическое пространство Y непрерывно тогда и только тогда, когда прообраз любого открытого множества является открытым множеством.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть отображение f непрерывно, и пусть G — некоторое открытое множество точек пространства Y. Тогда если $x_0 \in f^{-1}(G)$, то G является окрестностью точки $y_0 = f(x_0)$. Согласно определению непрерывности (см. (2)), существует $O(x_0)$ такая, что $f(O(x_0)) \subset G$, и, следовательно, $O(x_0) \subset f^{-1}(G)$. Таким образом, каждая точка множества $f^{-1}(G)$ содержится в нём с некоторой своей окрестностью, т.е. множество $f^{-1}(G)$ открытое.

Пусть теперь отображение F такое, что если G открытое, то $f^{-1}(G)$ тоже открытое. Тогда для любой точки $x_0 \in X$ выполняется условие: для любой окрестности $O(y_0)$ точки $y_0 = f(x_0)$ множество $U = f^{-1}(O(y_0))$ открытое, а так как $x_0 \in U$, то U — окрестность точки x_0. Таким образом, для любой окрестности $O(y_0)$ точки y_0 существует окрестность U точки x_0 такая, что $f(U) = O(y_0)$. А это и означает, что f непрерывно в точке x_0.

Теорема 2 доказана.

Следствие. *Отображение f метрического пространства X в метрическое пространство Y непрерывно тогда и только тогда, когда прообраз любого замкнутого множества является замкнутым множеством.*

Это утверждение является очевидным следствием теоремы 2, так как открытые и замкнутые множества являются взаимно дополнительными, и, кроме того, прообраз дополнения является дополнением прообраза.

2.2. Непрерывные отображения компактов

Пусть, как и в предыдущем пункте, заданы два метрических пространства $\{X; \rho_X\}$ и $\{Y; \rho_Y\}$ и некоторое отображение f пространства X в пространство Y.

Теорема 1. *Пусть отображение f метрического пространства X в метрическое пространство Y непрерывно. Тогда если пространство X компактное, то множество $f(X)$ тоже компактное.*

Доказательство. Пусть Y_α, $\alpha \in A$, — некоторое открытое покрытие множества $f(X)$ в пространстве Y. Из теоремы 2 предыдущего пункта следует, что множества $X_\alpha = f^{-1}(Y_\alpha)$, покрывающие X, открытые. Так как X компактное, то существует конечная совокупность этих множеств, которая покрывает X. Тогда образы множеств этого конечного покрытия покрывают множество $f(X)$.

Теорема 1 доказана.

Эту теорему коротко формулируют так: *непрерывный образ компакта есть компакт.*

Это утверждение является обобщением теоремы из пункта 4.2 главы 6, доказанной для непрерывных отображений из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$.

Определение 1. Отображение f метрического пространства $\{X;\rho_X\}$ в метрическое пространство $\{Y;\rho_Y\}$ называется *равномерно непрерывным*, если выполняется условие:

$$\forall\,\varepsilon > 0 \quad \exists\,\delta > 0: \quad \forall\,x,x' \in X: \quad \rho_X(x,x') < \delta \Rightarrow \\ \Rightarrow \rho_Y(f(x),f(x')) < \varepsilon.$$

Теорема 2. *Непрерывное отображение компакта равномерно непрерывно.*

Доказательство этой теоремы почти дословно повторяет доказательство теоремы 4 из пункта 4.5 главы 6.

Определение 2. Отображение одного метрического пространства на другое называется *гомеоморфизмом* этих пространств, если оно непрерывно, взаимно однозначно, и обратное отображение тоже непрерывно.

Теорема 3. *Пусть отображение f метрического пространства X в метрическое пространство Y непрерывно и взаимно однозначно. Тогда если пространство X компактное, то обратное отображение непрерывно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как компактное множество всегда замкнуто, а замкнутое множество компакта компактно, то из теоремы 1 следует, что при непрерывном отображении компакта образ любого замкнутого множества замкнут. Таким образом, для любого замкнутого множества $F \subset X$ множество

$f(F)$ замкнуто. Для обратного отображения f^{-1} множество $f(F)$ является прообразом множества F. Следовательно, при отображении f^{-1} прообраз каждого замкнутого множества F является замкнутым, и поэтому (см. следствие из п.2.1) отображение f^{-1} непрерывно.

Теорема 3 доказана.

Определение 3. Отображение f метрического пространства X в множество $\mathbb{R}$ действительных чисел называется *функционалом.*

Теорема 4. *Если функционал f определён и непрерывен на компактном метрическом пространстве X, то он на X ограничен и принимает наименьшее и наибольшее значения.*

Действительно, образом компакта X является компакт $f(X) \subset \mathbb{R}$. Он является ограниченным и замкнутым и, в частности, содержит наибольшее и наименьшее значения.

2.3. Непрерывные отображения связных множеств

Напомним, что для множеств точек пространства $\mathbb{R}^n$ уже было введено понятие связности. Именно, множество X называется *несвязным*, если существуют два непересекающихся открытых множества G_1 и G_2, каждое из которых пересекается с множеством X и объединение которых содержит X. В противном случае множество X называется *связным.* Так же определяются связные и несвязные множества точек любого метрического пространства $\{M; \rho\}$. В частности, метрическое пространство $\{M; \rho\}$ называется *связным*, если множество M связно.

Заметим, что в метрическом пространстве $\{M; \rho\}$ множество M всегда открытое и замкнутое. Поэтому если множества G_1 и G_2 открытые, то множества $M_1 = G_1 \cap M$, $M_2 = G_2 \cap M$ тоже открытые.

Это замечание позволяет для метрических пространств следующим образом определить понятие связности.

Определение 1. Метрическое пространство $\{M; \rho\}$ называется *связным*, если множество M нельзя представить в виде объединения двух непустых непересекающихся открытых множеств M_1 и M_2.

Теорема 1. *Пусть отображение f метрического пространства X на метрическое пространство Y непрерывно. Тогда если пространство X связно, то пространство Y тоже связно.*

Доказательство. Будем доказывать методом от противного. Пусть пространство Y не является связным. Тогда множество Y можно представить в виде объединения двух непустых непересекающихся открытых множеств Y_1 и Y_2. При непрерывном отображении f их прообразы X_1 и X_2 непустые, открытые и непересекающиеся, причём $X = X_1 \cup X_2$. Однако это противоречит тому, что множество X связное.

Теорема доказана.

Коротко её формулируют так:

Непрерывный образ связного множества является связным множеством.

Легко видеть, что это утверждение является обобщением теоремы Коши о промежуточных значениях для числовых функций. Обобщением утверждения о том, что непрерывная числовая функция отрезок отображает в отрезок, является следующая теорема.

Теорема 2. *Непрерывный образ связного компакта есть связный компакт.*

Это утверждение следует из предыдущей теоремы и теоремы 1 предыдущего пункта.

Непустой связный компакт иногда называют *континуумом.* Тогда теорему 2 формулируют следующим образом:

Непрерывный образ континуума есть континуум.

2.4. Сжимающие отображения и неподвижные точки

Смысл понятий “сжимающее отображение” и “неподвижная точка” по существу содержится в самих их названиях.

Определение 1. Отображение метрического пространства $\{X;\rho\}$ в себя называется *сжимающим*, если

$$\exists\, q \in (0;1): \quad \forall\, x,y \in X \quad \rho(f(x),f(y)) \leqslant q\rho(x,y). \tag{1}$$

Из условия (1) видно, что сжимающее отображение $f : X \to \to X$ непрерывно, и, более того, оно равномерно непрерывно на X.

Определение 2. Точка $x \in X$ называется *неподвижной точкой отображения* $f : X \to X$, если $f(x) = x$.

Теорема 1. *Сжимающее отображение полного метрического пространства в себя имеет и притом единственную неподвижную точку.*

Доказательство. Пусть отображение $f : X \to X$ удовлетворяет условию (1). Выберем некоторую точку $x_0 \in \in X$ и по рекуррентной формуле

$$x_n = f(x_{n-1}), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{2}$$

построим последовательность $\{x_n\}$. Она является фундаментальной. Действительно,

$$\rho(x_{n+1},x_n) = \rho(f(x_n),f(x_{n-1})) \leqslant q\rho(x_n,x_{n-1})$$

и, следовательно,

$$\rho(x_{n+1},x_n) \leqslant q^n\rho(x_1,x_0) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Поэтому

$$\rho(x_n,x_{n+p}) \leqslant \rho(x_n,x_{n+1}) + \rho(x_{n+1},x_{n+2}) + \ldots + \\ +\rho(x_{n+p-1},x_{n+p}) \leqslant (q^n + q^{n+1} + \ldots + q^{n+p-1})\rho(x_1,x_0).$$

Отсюда по формуле для суммы геометрической прогрессии следует, что
$$\rho(x_n,x_{n+p}) \leqslant \frac{q}{1-q}\rho(x_0,x_1) \tag{3}$$
для любого n и любого p, что и доказывает, что последовательность $\{x_n\}$ фундаментальная. А так как пространство X полное, то существует точка $a \in X$, к которой эта последовательность сходится. Тогда из равенства (2) в пределе при $n \to \infty$ следует, что $a = f(a)$, т.е. точка $a \in X$ является неподвижной точкой отображения f. Докажем, что эта неподвижная точка единственная.

Пусть существует точка $b \in X$ такая, что $f(b) = b$. Тогда
$$\rho(a;b) = \rho(f(a),f(b)) \leqslant q\rho(a;b),$$
а так как $q < 1$, то $\rho(a;b) = 0$, и, следовательно, $a = b$.

Теорема доказана.

Эта теорема называется *принципом сжимающих отображений.* Сделаем несколько замечаний к этой теореме.

Построение последовательности $\{x_n\}$ с помощью рекуррентной формулы (2) и исследование её сходимости обычно называют *методом последовательных приближений.*

Из доказанной теоремы следует, что если метрическое пространство X полное, а отображение $f : X \to X$ сжимающее, то уравнение $f(x) = x$ имеет единственное решение, которое является пределом *последовательных приближений* (2) при любом *начальном приближении* x_0.

Из неравенства (3) в пределе при $p \to \infty$ получаем неравенство
$$\rho(x_n,a) \leqslant \frac{q^n}{1-q}\rho(x_0,f(x_0)),$$
которое даёт оценку близости *приближения* x_n к решению a в метрике рассматриваемого пространства.

Принцип сжимающих отображений позволяет единым методом доказывать теоремы о существовании и единственности решений дифференциальных, интегральных и других уравнений. С его помощью можно не только доказывать существование и единственность решения уравнения $f(x) = x$, но и находить его с любой степенью точности относительно рассматриваемой метрики.

Принцип сжимающих отображений является простейшим из так называемых *принципов неподвижной точки.*

В качестве простейшего примера применения принципа сжимающих отображений рассмотрим решение систем линейных алгебраических уравнений методом итераций.

Пусть M_n — метрическое пространство, точками которого являются точки арифметического n-мерного пространства $\mathbb{R}^n$, а метрика введена по формуле

$$\rho(x,y) = \max_i |\xi_i - \eta_i|,$$

где $x = (\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)$, $y = (\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_n)$.

Легко доказать, что так определённое метрическое пространство M_n полное. Рассмотрим отображение f пространства M_n в себя, заданное равенством

$$f(x) = Ax + b, \tag{4}$$

где A — квадратная матрица порядка n, а $b = (b_1,b_2,\ldots,b_n)$. Пусть $A = (a_{ij})$, $x = (\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)$, $x' = (\xi'_1,\xi'_2,\ldots,\xi'_n)$. Тогда

$$\begin{aligned}\rho(f(x),f(x')) &= \rho(Ax,Ax') = \max_i \left|\sum_{j=1}^n a_{ij}(\xi_j - \xi'_j)\right| \leqslant \\ &\leqslant \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \cdot \max_j |\xi_j - \xi'_j| = \\ &= \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \cdot \rho(x,x').\end{aligned}$$

Отсюда следует, что если выполняется условие

$$\max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| < 1, \tag{5}$$

то отображение (4) будет сжимающим.

Таким образом, доказано следующее утверждение.

Теорема 2. *Если матрица A удовлетворяет условию* (5), *то уравнение $x - Ax = b$ имеет единственное решение при любом b. Это решение можно получить методом последовательных приближений при любом выборе начального приближения.*

Заметим, что если точка x_0 является неподвижной для отображения f, то она будет неподвижной и для n-й степени этого отображения. Для сжимающего отображения справедливо обратное утверждение.

Теорема 3. *Если некоторая степень отображения полного метрического пространства в себя является сжимающим отображением, то само отображение имеет и притом единственную неподвижную точку.*

Доказательство. Пусть отображение $f : X \to X$ такое, что его n-я степень, т.е. отображение

$$f^n = f \circ f \circ \ldots \circ f, \qquad n \geqslant 1,$$

является сжимающим. Согласно теореме 1, у отображения f^n существует неподвижная точка, т.е.

$$\exists\, a \in X : \quad f^n(a) = a.$$

Тогда $f(a) = f(f^n(a)) = f^n(f(a))$, т.е. точка $f(a)$ тоже неподвижная для f^n. А так как сжимающее отображение f^n может иметь только одну неподвижную точку, то $f(a) = a$.

Существование неподвижной точки у отображения f доказано. Единственность следует из того, что неподвижная точка для f будет неподвижной и для f^n.

Теорема 3 доказана.

Пример 1. Рассмотрим интегральное уравнение Вольтерра

$$x(t) = \lambda \int_a^t K(t,\tau)x(\tau)\,d\tau + f(t),$$

где λ — некоторое число, функция $f(t)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, функция $K(t,\tau)$ непрерывна на квадрате $\Delta = [a;b]\times[a;b]$, а $x(t)$ — искомая функция.

Очевидно, оператор

$$A(x) = \lambda \int_a^t K(t,\tau)x(\tau)\,d\tau + f(t)$$

действует из $C[a;b]$ в $C[a;b]$. Для него имеем:

$$|A(x)(t) - A(y)(t)| = \left|\lambda \int_a^t K(t,\tau)(x(\tau) - y(\tau))\,d\tau\right| \leqslant \\ \leqslant |\lambda| \cdot q \cdot \rho(x,y) \cdot (t-a),$$

где $q = \max|K(t,\tau)|$, $(t,\tau) \in \Delta$. Далее,

$$|A^2(x)(t) - A^2(y)(t)| \leqslant |\lambda|^2 \cdot q^2 \cdot \rho(x,y)\frac{(t-a)^2}{2},$$

и для n-й степени оператора A имеем:

$$|A^n(x)(t) - A^n(y)(t)| \leqslant |\lambda|^n \cdot q^n \cdot \rho(x,y)\frac{(t-a)^n}{n!}.$$

Очевидно, для любых λ и q существует n такое, что

$$\frac{\lambda^n q^n (b-a)^n}{n!} < 1.$$

Для этого n отображение A^n будет сжимающим.

Из теоремы 3 следует, что *уравнение Вольтерра при любом λ имеет и притом единственное непрерывное решение.*

§ 3. Линейные, нормированные и банаховы пространства

3.1. Линейные пространства

Линейные (или векторные) пространства над полем $\mathbb{R}$ действительных чисел и над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел определялись в линейной алгебре. Там же были определены и такие понятия, как подпространство линейного пространства, линейно зависимые и линейно независимые системы векторов, линейное отображение, изоморфизм линейных пространств и т.д. Для полноты изложения приведём некоторые из этих определений.

Определение 1. *Линейным* или *векторным пространством над полем действительных* (*комплексных*) *чисел* называется множество L элементов $x,y,z,\ldots$ произвольной природы, для которых определены операции *сложения двух элементов* и *умножения элементов на действительные* (*комплексные*) *числа*, т.е.

1) каждой паре x,y элементов из L поставлен в соответствие некоторый элемент из L, который называется *суммой элементов* x,y и обозначается $x+y$;
2) каждому элементу x из L и каждому действительному (комплексному) числу α поставлен в соответствие некоторый элемент из L, который называется *произведением элемента* x *на число* α и обозначается αx;

причём эти операции удовлетворяют следующим двум группам условий:

I. 1) $x+y=y+x$ (*коммутативность сложения*);
 2) $x+(y+z)=(x+y)+z$ (*ассоциативность сложения*);
 3) существует элемент, называемый *нулевым* и обозначаемый 0, такой, что

$$x+0=x \quad \forall\, x\in L;$$

 4) $\forall\, x\in L \quad \exists\, y\in L: \quad x+y=0$;

II. 5) $1x=x \quad \forall\, x\in L$;
 6) $\alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x$ (*ассоциативность умножения*);
 7) $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$ (*дистрибутивность относительно числового множителя*);

8) $\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$ (*дистрибутивность относительно элементов пространства*);

Для данного элемента $x \in L$ элемент $y \in L$, удовлетворяющий условию $x + y = 0$, называется *противоположным элементу* x и обозначается $-x$. Таким образом, по определению

$$x + (-x) = 0.$$

Элемент $x + (-y)$ называется *разностью элементов* x,y и обозначается $x - y$.

Элементы линейного пространства обычно называют *векторами*, а операции сложения векторов и умножения вектора на число — *линейными операциями.*

Определение 2. Линейное пространство L' называется *подпространством линейного пространства* L, если $L' \subset L$ и операции сложения векторов и умножения вектора на число в L' определены так же, как и L.

Из этого определения следует, что операции сложения элементов и умножения элемента на число, определенные в L, *замкнуты в* L', т.е. если x,y из L', то $x+y$ тоже из L', и $\alpha x \in L'$ для любого числа α.

Линейной комбинацией векторов $x_1, \ldots, x_n$ называется любой вектор вида

$$\alpha_1 x_1 + \ldots + a_n x_n, \tag{1}$$

где $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — числовые множители.

Линейная комбинация (1) называется *нетривиальной*, если хотя бы один из коэффициентов $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ отличен от нуля.

Векторы $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называются *линейно зависимыми*, если существует нетривиальная линейная комбинация (1), равная нулю. Если же только тривиальная линейная комбинация этих векторов равна нулю, то векторы $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называются *линейно независимыми.*

Определение 3. Произвольная система векторов линейного пространства называется *линейно независимой*, если любая её конечная подсистема линейно независима.

Определение 4. Линейное пространство называется n-*мерным*, если в нём существуют n линейно независимых векторов, а любые $n+1$ векторов линейно зависимы. Линейное пространство называется *бесконечномерным*, если для любого $n \in \mathbb{N}$ в нём существуют n линейно независимых векторов.

Заметим, что в линейной алгебре изучаются в основном только конечномерные пространства. Бесконечномерные пространства являются предметом изучения математического или функционального анализа.

Напомним ещё некоторые понятия, относящиеся к линейным пространствам.

Определение 5. Пусть задана некоторая система элементов линейного пространства L. Совокупность всех линейных комбинаций этой системы называется её *линейной оболочкой.*

Очевидно, линейная оболочка любой системы элементов линейного пространства L является подпространством этого пространства.

Определение 6. Отображение f линейного пространства X в линейное пространство Y называется *линейным отображением* (или *линейным оператором*), если для любых векторов x,y из X и любых чисел α,β

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y).$$

Множество всех линейных операторов, отображающих X в Y, обозначается $\mathcal{L}(X,Y)$. Легко видеть, что при обычном определении сложения двух операторов и умножения оператора на число, это множество является линейным пространством.

Определение 7. Любое линейное взаимно однозначное отображение линейного пространства X на линейное пространство Y называется *изоморфизмом* этих пространств. В этом случае пространства X, Y называются *изоморфными.*

Изоморфные пространства могут отличаться лишь природой своих элементов, а не своими свойствами. Поэтому при изучении свойств линейных пространств изоморфные пространства не различаются.

3.2. Линейные нормированные пространства

В линейном нормированном пространстве, как следует из самого названия, кроме понятий линейного пространства, имеются ещё понятия, связанные с длиной (нормой) элементов этого пространства.

Определение 1. Линейное пространство X (над полем действительных или комплексных чисел) называется *нормированным*, если на X определена функция $\|x\| : x \to \mathbb{R}$ такая, что

1) $\|x\| \geqslant 0 \quad \forall\, x \in X;$

2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\| \quad \forall\, x \in X, \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{R}$ (или $\alpha \in \mathbb{C}$);

3) $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\| \quad \forall\, x,y \in X;$

4) $\|x\| = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0.$

Эта функция называется *нормой* в пространстве X, а число $\|x\|$ — *нормой элемента* или *вектора* x. Свойства 1)–4) называются *аксиомами нормы.* В частности, свойство 2) называется *однородностью* нормы. а свойство 3) — *неравенством треугольника.*

Примерами линейных нормированных пространств являются линейное пространство $\mathbb{R}^n$ векторов $x = (x_1, \ldots, x_n)$ с нормой

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2} \tag{1}$$

и линейное пространство $\mathbb{C}^n$ векторов $z = (z_1, \ldots, z_n)$ с нормой

$$\|z\| = \sqrt{|z_1|^2 + \ldots + |z_n|^2}.$$

Первое — над полем действительных чисел, а второе — над полем комплексных чисел.

Очевидно, в линейном пространстве $\mathbb{C}^n$ (соответственно и в $\mathbb{R}^n$) нормой будет и функция

$$\|z\| = \sup_j |z_j|. \tag{2}$$

Другим важным примером линейного пространства является пространство $C[a;b]$ непрерывных на отрезке $[a;b]$ функций f с нормой

$$\|f\| = \max_{x\in[a;b]} |f(x)|. \tag{3}$$

Очевидно, в линейном пространстве непрерывных на отрезке $[a;b]$ функций f функция

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|\,dx \tag{4}$$

тоже удовлетворяет все аксиомам нормы. Однако в линейном пространстве интегрируемых на отрезке $[a;b]$ функций функция (4) не будет нормой: она не удовлетворяет аксиоме 4). Первое пространство будем обозначать $CL_1[a;b]$, а второе — $RL_1[a;b]$.

Определение 2. Функция $\|x\| : X \to \mathbb{R}$, удовлетворяющая аксиомам 1), 2), 3) нормы, но не удовлетворяющая аксиоме 4), называется *полунормой.* Линейное пространство с полунормой называется *полунормированным.*

Функция (4) в линейном пространстве интегрируемых на отрезке $[a;b]$ функций является полунормой. Однако если функции f и g, для которых $\|f-g\|_1 = 0$, считать равными, то функция (4) будет нормой в $\mathbb{R}L_1[a;b]$.

Аналогично, в линейном пространстве непрерывно дифференцируемых функций f на отрезке $[a;b]$ функция

$$\|f\| = \max_{x\in[a;b]} |f'(x)| \tag{5}$$

является полунормой. Однако если функции f и g, которые отличаются на аддитивную постоянную, считать равными, то функция (5) будет нормой.

В дальнейшем будем рассматривать только нормированные пространства, считая, что два элемента равны, если норма их разности равна нулю.

Легко проверить, что функция

$$\rho(x,y) = \|x - y\|, \quad x,y \in X,$$

удовлетворяет всем аксиомам метрики. Следовательно, линейное нормированное пространство является метрическим, и поэтому в нём определены все понятия метрического пространства.

Например, множество E элементов нормированного пространства X называется *ограниченным*, если

$$\exists\, M > 0 : \quad \forall\, x \in E \quad \|x\| \leqslant M.$$

Последовательность $\{x_n\}$ точек нормированного пространства X называется *сходящейся к точке* x_0, если

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists N : \quad \forall\, n \geqslant N \quad \|x_n - x_0\| < \varepsilon.$$

Последовательность $\{x_n\}$ называется *фундаментальной*, если

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N : \forall\, n,m \geqslant N \quad \|x_n - x_m\| < \varepsilon.$$

Нормированное пространство X называется *полным*, если любая фундаментальная последовательность его элементов имеет предел в этом пространстве.

Определение 3. Полное нормированное пространство называется *банаховым.*

Важным примером банахова пространства является пространство $C[a;b]$.

Определение 4. Линейные нормированные пространства X_1 и X_2 называются *изоморфными*, если существует изоморфизм f линейных пространств X_1 и X_2 такой, что $\|f(x)\|_2 = \|x\|_1$.

Изоморфизм линейных пространств X_1, X_2, сохраняющий норму, называется *изоморфизмом линейных нормированных пространств* X_1, X_2.

Изоморфные нормированные пространства могут отличаться только природой своих элементов, а не свойствами самих пространств. Поэтому при изучении свойств нормированных пространств изоморфные пространства не различаются.

Определение 5. В линейном пространстве X две нормы $\|x\|$ и $\|x\|_*$ называются *эквивалентными*, если существуют такие положительные постоянные c_1 и c_2, что

$$c_1\|x\| \leqslant \|x\|_* \leqslant c_2\|x\| \quad \forall\, x \in X.$$

Легко видеть, что в линейном пространстве $\mathbb{R}^n$ нормы (1) и (2) эквивалентны. Действительно,

$$\sup_j |x_j| \leqslant \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2} \leqslant \sqrt{n} \sup_j |x_j|.$$

Вообще, для конечномерных пространств справедливо следующее утверждение.

Теорема. *В конечномерном линейном пространстве все нормы эквивалентны.*

Доказательство. Пусть X — n-мерное линейное пространство над полем действительных чисел, и пусть $\|x\|$ — некоторая норма в пространстве X. Выберем в X какой-то базис $e_1, \ldots, e_n$ и покажем, что норма $\|x\|$ эквивалентна норме

$$\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2},$$

где $x_1, \ldots, x_n$ — координаты вектора x по выбранному базису.

Прежде всего заметим, что

$$\|x\| = \sum_{j=1}^{n} |x_j| \|e_j\| \leqslant \|x\|_2 \sum_{j=1}^{n} \|e_j\|.$$

Поэтому $\|x\| \leqslant c_2 \|x\|_2$, где $c_2 = \sum\limits_{j=1}^{n} \|e_j\|$.

Для оценки нормы $\|x\|$ снизу рассмотрим функцию $f(x) = \|x\|$. Её можно рассматривать как функцию от n переменных $x_1, \ldots, x_n$, определённую на $\mathbb{R}^n$. Из неравенства

$$|f(x) - f(y)| = \Big| \|x\| - \|y\| \Big| \leqslant \|x - y\| \leqslant c_2 \|x - y\|_2$$

следует, что она непрерывна на $\mathbb{R}^n$. В частности, она непрерывна и на единичной сфере $S_1 \subset \mathbb{R}^n$, причём если $\|x\|_2 = 1$, то $f(x) > 0$. А так как сфера S_1 — компакт, то $\exists\, x_0 \in S_1 : \inf\limits_{x \in S_1} f(x) = f(x_0) > 0$, и поэтому

$$\forall\, x \in S_1 \quad \|x\| \geqslant c_1,$$

где $c_1 = f(x_0)$. Тогда

$$\forall\, x \neq 0 \quad \|x\| = \|x\|_2 \left\| \frac{x}{\|x\|_2} \right\| \geqslant \|x\|_2 c_1.$$

Для $x = 0$ неравенство $\|x\| \geqslant c_1 \|x\|_2$ очевидно.

Теорема доказана, поскольку любые две нормы $\|x\|$ и $\|x\|_*$, эквивалентные $\|x\|_2$, эквивалентны.

Легко показать, что в линейном пространстве $C[a;b]$ нормы (3) и (4) не являются эквивалентными.

Для доказательства, не ограничивая общности, можно считать, что $a = 0$, $b = \pi$. Тогда рассмотрим последовательность функций $f_n(x)$ таких, что $f_n(x) = \sin nx$, если $0 \leqslant nx \leqslant \pi$, и $f_n(x) = 0$ при других x. Очевидно,

$$\max_x |f_n(x)| = 1, \qquad \int_0^\pi |f_n(x)|\, dx = \frac{2}{n}\,,$$

и поэтому эти нормы не могут быть эквивалентными.

Пусть в линейном нормированном пространстве X выделена некоторая система элементов

$$x_\alpha, \quad \alpha \in A, \tag{6}$$

где A — множество индексов.

Определение 6. Система элементов (6) называется *полной* в пространстве X, если её линейная оболочка плотна в X, т.е. если для любого элемента $x \in X$ выполняется условие:

для любого $\varepsilon > 0$ существуют такие элементы $x_{\alpha_1}, \ldots, x_{\alpha_n}$ системы (6) и такие числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, что

$$\left\| x - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{\alpha_j} \right\| < \varepsilon.$$

Определение 7. Линейное нормированное пространство называется *сепарабельным*, если в нём существует счётная система элементов, линейная оболочка которой плотна в этом пространстве.

Из теоремы Вейерштрасса о приближении непрерывных функций многочленами следует, что в пространстве $C[a;b]$ система функций

$$1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots \tag{7}$$

является полной. Следовательно, *пространство $C[a;b]$ сепарабельное.*

Легко доказать, что пространство $L_p(\Delta)$, где $p \geqslant 1$ и $\Delta = [a;b]$, тоже является сепарабельным.

Определение 8. Последовательность элементов $e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots$ линейного нормированного пространства X называется *базисом пространства* X, если каждый элемент $x \in X$ имеет и притом единственное разложение по этой системе, т.е. если существует и притом единственная последовательность чисел λ_n, $n \in \mathbb{N}$, такая, что

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n e_n.$$

Здесь ряд сходится к элементу x по норме пространства X, т.е. выполняется условие:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N : \quad \forall n \geqslant N \quad \left\| x - \sum_{k=1}^{n} \lambda)k e_k \right\| < \varepsilon.$$

Очевидно, что система функций (7) хотя и является полной в пространстве $C[a;b]$, однако она не будет базисом в этом пространстве. Типичным примером базиса является тригонометрическая система

$$1, \cos x, \sin x, \ldots, \cos nx, \sin nx, \ldots$$

являющаяся базисом в пространстве $L_2[-\pi;\pi]$.

3.3. Теорема о пополнении нормированных пространств

Полное нормированное пространство X^* называется *пополнением нормированного пространства* X, если в X^* существует подпространство X', которое изоморфно пространству X и плотно в пространстве X^*.

Напомним, что плотность X' в X^* означает, что для любого $x^* \in X^*$ выполняется условие:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x' \in X' : \quad \|x^* - x'\|_* < \varepsilon,$$

где $\| \ldots \|_*$ обозначает норму в X^*.

Теорема. *Любое линейное нормированное пространство имеет пополнение.*

Доказательство. Любое нормированное пространство X является метрическим с метрикой

$$\rho(x,y) = \|x - y\|.$$

При доказательстве теоремы о пополнении метрического пространства X было построено полное метрическое пространство X^*, элементами которого являются классы эквивалентных фундаментальных последовательностей элементов из X, и было показано, что множество X', элементами которого являются классы последовательностей, каждый из которых содержит постоянную последовательность, изометрично пространству X и плотно в X^*.

Для доказательства настоящей теоремы достаточно в X^* ввести линейные операции и норму так, чтобы X' было подпространством пространства X^* и чтобы оно было изоморфно пространству X.

Пусть $x^* \in X^*$ и $y^* \in X^*$. Тогда если $\{x_n\} \in x^*$, $\{y_n\} \in y^*$, то через $x^* + y^*$ обозначим класс эквивалентных последовательностей, который содержит фундаментальную последовательность $\{x_n + y_n\}$, а через λx^*, где λ — число, обозначим класс, содержащий последовательность $\{\lambda x_n\}$. Легко проверяется, что тогда X^* — линейное пространство, а X' — его подпространство, т.е. X' замкнуто относительно введённых линейных операций.

Чтобы ввести норму в X^*, заметим, что если последовательность $\{x_n\}$ фундаментальная, то числовая последовательность $\{\|x_n\|\}$ тоже фундаментальная, так как

$$\Big|\|x_n\| - \|x_m\|\Big| \leqslant \|x_n - x_m\| \quad \forall\, n,m.$$

Поэтому по определению положим

$$\|x^*\|_* = \lim_{n\to\infty} \|x_n\|.$$

Легко видеть, что этот предел не зависит от выбора последовательности $\{x_n\} \in X^*$. Кроме того, если $x^* \in X'$ и $\{x\} \in x^*$, то

$$\|x^*\|_* = \|x\|.$$

Функция $\|x^*\|_*$ на X^* удовлетворяет всем аксиомам нормы. Действительно,

$$\begin{aligned}
\|\lambda x^*\|_* &= \lim_{n\to\infty} \|\lambda x_n\| = \lambda \|x^*\|_*, \\
\|x^* + y^*\|_* &= \lim_{n\to\infty} \|x_n + y_n\| \leqslant \\
&\leqslant \lim_{n\to\infty} (\|x_n + y_n\|) = \|x^*\|_* + \|y^*\|_*.
\end{aligned}$$

Теорема доказана.

Так как в теории линейных нормированных пространств изоморфные пространства не различаются, то линейное нормированное пространство X', построенное при доказательстве теоремы о пополнении, отождествляется с пространством X, и поэтому доказанную теорему часто формулируют так:

Любое линейное нормированное пространство содержится и плотно в некотором банаховом пространстве.

3.4. Примеры линейных нормированных пространств

В пункте 3.2 уже были рассмотрены линейные нормированные пространства $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}[a;b]$ и $\mathbb{C}L_1[a;b]$. В этом пункте рассмотрим ещё несколько важных примеров нормированных пространств.

Пример 1. Рассмотрим семейство линейных нормированных пространств, элементами которых являются точки из $\mathbb{R}^n$, а норма для $x = (x_1, \ldots, x_n)$ определяется по формуле

$$\|x\|_p = \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p \right)^{1/p}, \tag{1}$$

где $p \geqslant 1$. В частных случаях, когда $p = 1$ и $p = 2$, известно, что функция (1) на $\mathbb{R}^n$ удовлетворяет всем аксиомам нормы. В общем случае достаточно проверить, что для этой функции справедливо неравенство треугольника.

Сначала докажем несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 1. *Для любых неотрицательных чисел a и b и любого $p > 1$ справедливо неравенство*

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\,, \tag{2}$$

где q такое, что $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$y = x^{p-1}, \quad x \geqslant 0.$$

Она на промежутке $[0; +\infty)$ строго возрастает и имеет обратную

$$x = y^{q-1}, \quad y \geqslant 0.$$

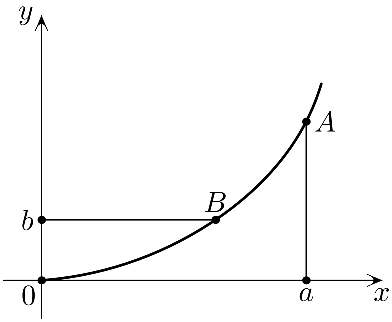

Рис. 1

Очевидно, площадь криволинейной трапеции $0aA$ (рис. 1) равна $\frac{1}{q}\,b^q$. Кроме того, для любых $a > 0$ и $b > 0$ объединение этих трапеций содержит прямоугольник $[0; a]\times[0; b]$, площадь которого равна ab. Следовательно, для любых $a \geqslant 0$ и $b \geqslant 0$ справедливо неравенство (2), причём равенство будет достигаться тогда и только тогда, когда точки A и B совпадают, т.е. когда $b = a^{p-1}$.

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Для любых $x = (x_1, \ldots, x_n)$ и $y = (y_1, \ldots, y_n)$ и любого $p > 1$ справедливо неравенство*

$$\sum_{j=1}^{n} |x_j y_j| \leqslant \|x\|_p \|y\|_q, \tag{3}$$

где q такое, что $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Доказательство. Очевидно, если $\|x\|_p = 0$ или $\|y\|_q = 0$, то неравенство (3) справедливо. Предположим, что $\|x\|_p \neq 0$ и $\|y\|_q \neq 0$, и в неравенстве (2) положим

$$a = \frac{|x_j|}{\|x\|_p}, \qquad b = \frac{|y_j|}{\|y\|_q}.$$

Тогда

$$\frac{|x_j y_j|}{\|x\|_p \|y\|_q} \leqslant \frac{1}{p} \cdot \frac{|x_j|^p}{\|x\|_p^p} + \frac{1}{q} \cdot \frac{|y_j|^q}{\|y\|_q^q}.$$

Просуммируем эти неравенства по j от 1 до n. В результате получим:

$$\frac{\sum\limits_{j=1}^{n} |x_j y_j|}{\|x\|_p \|y\|_q} \leqslant \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Лемма 2 доказана.

Неравенство (3) называется *неравенством Гльдера* для сумм. В частном случае при $p = q = 2$ оно обращается в неравенство Буняковского.

Применяя неравенство Гёльдера, получаем:

$$\sum_{j=1}^{n} |x_j + y_j|^p \leqslant \sum_{j=1}^{n} |x_j + y_j|^{p-1} |x_j| + \sum_{j=1}^{n} |x_j + y_j|^{p-1} |y_j| \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j + y_j|^{(p-1)q} \right)^{1/q} \cdot \left(\|x\|_p + \|y\|_p \right).$$

А так как $(p-1)q = p$, то

$$\|x+y\|_p^p \leqslant \|x+y\|_p^{p/q} \left(\|x\|_p + \|y\|_p \right),$$

и, следовательно,

$$\|x+y\|_p \leqslant \|x\|_p + \|y\|_p.$$

Это неравенство треугольника для нормы (1) называется *неравенством Минковского* для сумм.

Лемма 3. *Для любого $x = (x_1, \ldots, x_n)$ справедливо равенство*

$$\lim_{p\to+\infty}\left(\sum_{j=1}^{n}|x_j|^p\right)^{1/p} = \max_j |x_j|. \tag{4}$$

Действительно, пусть, например,

$$\max_j |x_j| = |x_1|, \quad x_1 \neq 0.$$

Тогда

$$\|x\|_p = |x_1|\left(1 + \sum_{j=2}^{n}\frac{|x_j|^p}{|x_1|^p}\right)^{1/p} \to |x_1|$$

при $p \to +\infty$.

Равенство (4) можно записать в следующем виде:

$$\|x\|_\infty = \max_j |x_j|.$$

Используя это обозначение, в случае $p = 1$ получаем неравенство

$$\sum_{j=1}^{n}|x_j y_j| \leqslant \|x\|_1 \|y\|_\infty,$$

которое аналогично неравенству Гёльдера в случае $p > 1$.

Очевидно, что для любого $p \geqslant 1$ справедливо неравенство

$$\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_p \leqslant n^{1/p}\|x\|_\infty.$$

Из того, что в $\mathbb{R}^n$ все нормы эквивалентны, и того, что $\mathbb{R}^n$ с нормой $\|x\|_2$ полно, следует, что $\mathbb{R}^n$ с любой нормой является полным пространством.

Пример 2. Пусть X — множество всех ограниченных числовых последовательностей $\{\xi_k\}$, $\{\eta_k\}$,… Линейные операции для них введём обычным образом. Именно, если $x = \{\xi_k\}$, $y = \{\eta_k\}$, то по определению положим

$$x + y = \{\xi_k + \eta_k\}, \quad \alpha x = \{\alpha\xi_k\},$$

где α — число. Очевидно, сумма двух ограниченных последовательностей и произведение ограниченной последовательности на число являются ограниченными последовательностями. В этом линейном пространстве норму введём с помощью равенства

$$\|x\| = \sup_k |\xi_k|. \tag{5}$$

Легко проверяется, что функция (5) на множестве X удовлетворяет всем аксиомам нормы.

Так полученное нормированное пространство называется *пространством m ограниченных числовых последовательностей.* Покажем, что это пространство полное.

Пусть последовательность $\{x_n\}$ элементов пространства m является фундаментальной, т.е. если $x_n = \{\xi_k^n\}$, то выполняется условие:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N: \quad \forall\, n \geqslant N, \forall\, p \quad \sup_k |\xi_k^n - \xi_k^{n+p}| < \varepsilon. \tag{6}$$

Тогда для любого фиксированного k числовая последовательность $\{\xi_k^n\}$ тоже фундаментальная и, следовательно, имеет предел. Пусть

$$\lim_{n\to\infty} \xi_k^n = \xi_k.$$

В неравенстве $|\xi_k^n - \xi_k^{n+p}| < \varepsilon$, которое следует из неравенства (6), перейдём к пределу при $p \to \infty$. В результате для любого k получим неравенство

$$|\xi_k^n - \xi_k| \leqslant \varepsilon \quad \forall\, n \geqslant N.$$

Отсюда следует, что

$$\sup_k |\xi_k^n - \xi_k| \leqslant \varepsilon \quad \forall\, n \geqslant N,$$

т.е. последовательность $\{x_n\}$ сходится к элементу $x = \{\xi_k\}$. Чтобы завершить доказательство, заметим, что $\|x\| < +\infty$. Действительно,

$$\|x\| \leqslant \|x - x_N\| + \|x_N\| \leqslant \varepsilon + \|x_N\| < +\infty.$$

Таким образом, *пространство m ограниченных числовых последовательностей банахово.*

Пример 3. Пусть X — множество всех сходящихся числовых последовательностей $\{\xi_k\}$, $\{\eta_k\}$,... Линейные операции и норму введём так же, как и в пространстве m ограниченных числовых последовательностей. Полученное линейное нормированное пространство является подпространством пространства m. Оно называется *пространством c сходящихся последовательностей.* Покажем, что это пространство полное.

Пусть последовательность $\{x_n\}$ элементов пространства c является фундаментальной. Из полноты пространства m следует, что $\{x_n\}$ сходится к некоторому $x = \{\xi_k\} \in m$.

Последовательность $\{\xi_k\}$ сходящаяся. Действительно, для любого $\varepsilon > 0$ существует N такое, что

$$|\xi_{k+p} - \xi_k| \leqslant |\xi_{k+p} - \xi^N_{k+p}| + |\xi_{k+p} - \xi^N_k| + |\xi^N_k - \xi_k| + \leqslant$$
$$\leqslant 2\|x - x_N\| + |\xi^N_{k+p} - \xi^N_k| < 2\varepsilon + |\xi^N_{k+p} - \xi^N_k|$$

для любых k и p. А так как последовательность $\{\xi^N_k\}$ сходящаяся, то отсюда следует, что последовательность $\{\xi_k\}$ фундаментальная, и поэтому тоже сходящаяся.

Таким образом, *пространство c сходящихся числовых последовательностей банахово.*

Пример 4. Пусть X — множество всех числовых последовательностей $\{\xi_k\}$, $\{\eta_k\}$,..., для которых ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p, \quad p \geqslant 1,$$

сходится.

Результаты линейных операций, определённых так же, как и в примерах 2 и 3, принадлежат множеству X. Действительно, если $x = \{\xi_k\}$ и $y = \{\eta_k\}$ принадлежат X, то

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |\xi_k + \eta_k|^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} |\xi_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{n} |\eta_k|^p\right)^{1/p}.$$

Отсюда при $n \to \infty$ получаем неравенство Гёльдера для бесконечных сумм

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k + \eta_k|^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\eta_k|^p\right)^{1/p},$$

из которого следует, что множество X с введёнными операциями является линейным пространством, а для функции

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p\right)^{1/p,}$$

справедливо неравенство треугольника. Другие аксиомы нормы очевидны.

Полученное линейное нормированное пространство называется *пространством* l_p. Докажем, что это пространство полное.

Пусть последовательность $\{x_n\}$ элементов пространства l_p, $p \geqslant 1$, является фундаментальной, т.е.

$$\forall\, \varepsilon > 0: \quad \forall\, n,m \geqslant N \quad \|x_n - x_m\|_p < \varepsilon, \tag{7}$$

и, в частности, если $x_n = \{\xi_k^n\}$, то

$$|\xi_k^n - \xi_k^m| < \varepsilon \quad \forall\, k.$$

Следовательно, при каждом фиксированном k последовательность $\{\xi_k^n\}$ имеет предел. Пусть $\xi_k^n \to \xi_k$ при $n \to \infty$, и пусть $x = \{\xi_k\}$.

Из неравенства (7) следует, что

$$\sum_{k=1}^{M} |\xi_k^n - \xi_k^m|^p < \varepsilon^p$$

для любого $M \in \mathbb{N}$ и любых $n{,}m \geqslant N$, и поэтому в пределе при $m \to +\infty$ имеем:

$$\sum_{k=1}^{M} |\xi_k^n - \xi_k|^p \leqslant \varepsilon^p \quad \forall\, n \leqslant N.$$

Отсюда при $M \to +\infty$ получаем:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k^n - \xi_k|^p \leqslant \varepsilon^p \quad \forall\, n \geqslant N,$$

т.е. $\|x_n - x\|_p \leqslant \varepsilon \quad \forall\, n \geqslant N$.

Наконец, из неравенства

$$\|x\|_p \leqslant \|x - x_N\|_p + \|x_N\|_p \leqslant \varepsilon + \|x_N\|_p$$

следует, что $x \in l_p$.

Таким образом, *пространство l_p банахово.*

Пример 5. Рассмотрим множество всех функций f, определённых и непрерывных на отрезке $[a;b]$. Очевидно, это множество с естественными линейными функциями является линейным пространством. На этом пространстве рассмотрим функцию

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p\, dx\right)^{1/p} \tag{8}$$

и покажем, что она при любом $p \geqslant 1$ удовлетворяет всем аксиомам нормы. Очевидно, нуждается в проверке только неравенство треугольника. Для этого сначала докажем *неравенство Гльдера для интегралов.*

Лемма 4. *Для любых двух функций f и g, определённых и непрерывных на отрезке $[a;b]$, и любого $p > 1$ справедливо неравенство*

$$\int_a^b |f(x)g(x)|\, dx \leqslant \|f\|_p \cdot \|g\|_q, \tag{9}$$

где q такое, что $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

Доказательство. Очевидно, если $\|f\|_p = 0$ или $\|g\|_q = 0$, то неравенство (9) справедливо. Предположим, что $\|f\|_p \neq 0$ и $\|g\|_q \neq 0$, и применим неравенство (2) к числам

$$A = \frac{|f(x)|}{\|f\|_p}, \qquad B = \frac{|g(x)|}{\|g\|_q}.$$

Тогда

$$\frac{|f(x)g(x)|}{\|f\|_p\|g\|_q} \leqslant \frac{1}{p} \cdot \frac{|f(x)|^p}{\|f\|_p^p} + \frac{1}{p} \cdot \frac{|g(x)|^q}{\|g\|_q^q}.$$

Проинтегрируем это неравенство по x от a до b. В результате получим:

$$\frac{\int\limits_a^b |f(x)g(x)|\,dx}{\|f\|_p\|g\|_q} \leqslant \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Лемма 4 доказана.

Теперь, применяя неравенство Гёльдера, как и в примере 2 для сумм, получаем:

$$\int_a^b |f(x) + g(x)|^p\,dx \leqslant \int_a^b |f(x) + g(x)|^{p-1}|f(x)|\,dx +$$
$$+ \int_a^b |f(x)g(x)|^{p-1}|g(x)|\,dx \leqslant \|f + g\|_p^{p/q}\left(\|f\|_p + \|g\|_q\right)$$

и, следовательно,

$$\|f + g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p$$

для любого $p > 1$. Для $p = 1$ оно очевидно.

Это неравенство называется *неравенством Минковского для интегралов.*

Таким образом, в линейном пространстве всех функций, определённых и непрерывных на отрезке $[a; b]$, можно ввести норму по формуле (8). Это линейное нормированное пространство обозначается $CL_p[a; b]$ или $L_p^c[a; b]$.

Как и в случае $p = 1$ (см. п. 1.2), доказывается, что пространство $CL_p[a; b]$ является неполным. Пополнение этого пространства обозначается $L_p[a; b]$ и называется *пространством функций, суммируемых в p-й степени.*

§ 4. Операторы в линейных нормированных пространствах

4.1. Общие замечания

В этом параграфе будем рассматривать операторы, действующие из одного линейного нормированного пространства в другое. Для таких операторов имеют смысл все понятия, введённые в § 2 для отображений одного метрического пространства в другое, и остаются справедливыми все доказанные там утверждения. Здесь лишь напомним некоторые общепринятые обозначения и понятия.

Пусть задан оператор f, действующий из множества X в множество Y. Через D_f или $D(f)$, как обычно, будем обозначать область определения оператора f, а через R_f или $R(f)$ — множество его значений. В общем случае не предполагается, что $D_f = X$ или $R_f = Y$.

Пусть заданы два оператора f и F, действующие из X в Y. Они называются *равными*, если $D_f = D_F$ и $f(x) = F(x)$ для любого $x \in D_f$. Если же $D_f \subset D_F$ и $f(x) = F(x)$ для любого $x \in D_f$, то оператор F называется *расширением оператора* f, а оператор f — *сужением оператора* F.

Как известно, вместо термина “оператор” можно использовать термины “функция” или “отображение”.

Определение 1. Оператор f, действующий из нормированного пространства X в нормированное пространство Y, называется *ограниченным*, если он любое множество $M \subset D_f$, ограниченное в X, переводит в множество $f(M)$, ограниченное в Y.

Короче, оператор f называется ограниченным, если образ любого ограниченного множества из D_f является ограниченным.

Отметим, что линейная функция $y = ax + b$, $a \neq 0$, рассматриваемая как оператор, отображающий $\mathbb{R}$ на $\mathbb{R}$, является ограниченным оператором. В этом смысле и функция $y = x^2$, $x \in \mathbb{R}$, является ограниченным оператором.

Определение 2. Последовательность операторов f_n, действующих из X в Y, называется *сходящейся на множестве* $D \subset X$, если $D \subset D_{f_n}$, $D \subset D_f$ и $f_n(x) \to f(x)$ при $n \to \infty$ для любого $x \in D$.

В этом случае иногда говорят, что f_n при $n \to \infty$ *сходится поточечно на* D *к* f.

Таким образом, $f_n \to f$ при $n \to \infty$ поточечно на D, если

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n(x) - f(x)\| = 0 \quad \forall\, x \in D.$$

Если же

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in D} \|f_n(x) - f(x)\| = 0,$$

то говорят, что f_n *сходится к* f *равномерно на множестве* D.

Сделаем ещё несколько замечаний относительно линейных операторов.

Пусть X и Y — линейные пространства (оба над полем действительных чисел или оба над полем комплексных чисел).

Определение 3. Оператор f, действующий из X в Y, называется *линейным*, если D_f — линейное многообразие, и если

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2)$$

для любых $x_1, x_2 \in D_f$ и любых чисел α_1, α_2.

Легко видеть, что у любого линейного оператора множество значений является линейным многообразием.

Как и в линейной алгебре, линейные операторы будем обозначать в основном буквами A, B и т.д. и писать $y = Ax$, $y = Bx$ и т.д.

Из данного определения видно, что линейный оператор A, действующий из X в Y, не обязан быть заданным на всём X, но он всегда задан на линейном многообразии, т.е. на линейном подпространстве пространства X.

Если ограничить себя только рассмотрением линейных пространств, то не ограничивая общности, можно считать, что линейный оператор, действующий из X в Y, определён для любого $x \in X$.

Если же X — нормированное пространство, то наиболее интересным является случай, когда область определения линейного оператора плотна в X. Однако если этот линейный оператор ограничен, то, как будет показано ниже, его можно продолжить по непрерывности на всё пространство X. А так как изучение неограниченных операторов выходит за рамки нашего курса, то в дальнейшем будем считать, что любой линейный оператор, действующий из X в Y, определён на всём пространстве X.

Через $L(X; Y)$ обозначим множество всех ограниченных линейных операторов, отображающих X в Y.

4.2. Линейные операторы

Пусть X и Y — линейные нормированные пространства. Легко видеть, что линейный оператор A непрерывен в любой точке области определения $D_A \subset X$, если он непрерывен в точке $x = 0$. Действительно, если $x_0 \in D_A$ и $x \in D_A$, то $x - x_0 \in D_A$ и
$$Ax - Ax_0 = A(x - x_0).$$
Поэтому если оператор A непрерывен в точке $x = 0$, то $A(x - x_0) \to 0$ при $x \to x_0$, и, следовательно, $Ax \to Ax_0$ при $x \to x_0$, $x \in D_A$.

Теорема 1. *Если линейный оператор A, действующий из X в Y, ограничен на единичном шаре, т.е. если существует постоянная $C > 0$ такая, что*
$$\|A\| \leqslant C \quad \forall x \in D_A, \quad \|x\| \leqslant 1,$$
то он ограничен на D_A.

Действительно, если множество $M \subset D_A$ ограничено, то
$$\exists\, R > 0: \ \|x\| \leqslant R \quad \forall\, x \in M,$$

и поэтому

$$\forall\, x \in M \quad \|Ax\| = R\left\|A\left(\frac{x}{R}\right)\right\| \leqslant RC.$$

Следовательно, оператор A любое ограниченное множество $M \subset D_A$ переводит в ограниченное множество пространства Y.

Определение 1. Для любого линейного оператора A, действующего из X в Y, величина

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|Ax\|, \quad x \in D_A,$$

называется *нормой оператора* A.

Таким образом, всегда $\|A\| \geqslant 0$. В частности, если $\|A\| = 0$, то A — нулевой оператор. Если же $\|A\| = +\infty$, то A — неограниченный оператор.

Из теоремы 1 следует, что линейный оператор ограничен тогда и только тогда, когда его норма ограничена.

Следствие 1. *Линейный оператор A, действующий из X в Y, ограничен тогда и только тогда, когда существует постоянная $C > 0$ такая, что*

$$\|Ax\| \leqslant C\|x\| \quad \forall\, x \in D_A.$$

Очевидно,

$$\sup_{\|x\|=1} \|Ax\| \leqslant \|A\|.$$

С другой стороны, если $0 < \|x\| \leqslant 1$, то

$$\|Ax\| = \|x\| \cdot \left\|A\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| \leqslant \left\|A\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| \leqslant \sup_{\|y\|=1} \|Ay\|,$$

и поэтому

$$\|A\| \leqslant \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|.$$

Таким образом, для любого линейного оператора A справедливо равенство

$$\|A\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}, \quad x \in D_A.$$

Следствие 2. *Для любого линейного оператора A, действующего из X в Y, справедливо неравенство*

$$\|Ax\| \leqslant \|A\| \cdot \|x\| \quad \forall\, x \in D_A.$$

Следствие 3. *Если линейный оператор A ограничен, то он непрерывен в любой точке $x_0 \in D_A$.*

Действительно, так как

$$\|Ax - Ax_0\| \leqslant \|A\| \cdot \|x - x_0\|,$$

то $Ax \to Ax_0$ при $x \to x_0$.

Для линейного оператора A, у которых $D_A = X$, справедливо следующее, кажущееся неожиданным, утверждение.

Теорема 2. *Для того чтобы линейный оператор $A : X \to \to Y$ был ограничен, необходимо и достаточно, чтобы он был непрерывен в точке $x = 0$.*

Доказательство. Уже доказано, что если оператор A ограничен, то он непрерывен. Обратное утверждение докажем методом от противного.

Допустим, что линейный оператор A является непрерывным в точке $x = 0$, но не является ограниченным на X. Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$ существует элемент $x_n \in X$ такой, что $\|x_n\| \leqslant 1$, $\|Ax_n\| \geqslant n$, и, следовательно,

$$\left\|A\left(\frac{x_n}{n}\right)\right\| \geqslant 1 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

С другой стороны, так как

$$\left\|\frac{x_n}{n}\right\| \leqslant \frac{1}{n} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

и оператор A непрерывен в точке $x = 0$, то

$$\left\| A\left(\frac{x_n}{n}\right) \right\| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Полученное противоречие показывает, что наше допущение неверное.

Теорема 2 доказана.

В конце этого пункта докажем теорему о продолжении линейного оператора по непрерывности.

Пусть A — линейный оператор, у которого область определения D_A плотна в пространстве X. Кроме того, будем считать, что пространство Y банахово.

Теорема 3. *Пусть A — линейный ограниченный оператор, действующий из нормированного пространства X в банахово пространство Y. Тогда если D_A плотна в X, то существует линейный ограниченный оператор $\overline{A} : x \to Y$ такой, что $\overline{A}x = Ax \ \forall\, x \in D_A$ и $\|\overline{A}\| = \|A\|$.*

Доказательство. Пусть $x \in X$, но $x \notin D_A$. В силу плотности D_A в X существует последовательность элементов $x_n \in D_A$ таких, что $x_n \to x$ при $n \to \infty$.

Из неравенства

$$\|Ax_n - Ax_m\| \leqslant \|A\| \cdot \|x_n - x_m\|$$

и ограниченности оператора A следует, что последовательность Ax_n, $n \in \mathbb{N}$, фундаментальная. А так как пространство Y банахово, то эта последовательность имеет предел. Положим

$$\overline{A}x = \lim_{n\to\infty} Ax_n$$

и покажем, что это определение корректное.

Пусть $x'_n \in D_A$ и $x'_n \to x$ при $n \to \infty$, и пусть

$$y = \lim_{n\to\infty} Ax_n, \quad y' = \lim_{n\to\infty} Ax'_n.$$

Тогда

$$\|y - y'\| \leqslant \|y - Ax_n\| + \|Ax_n - Ax'_n\| + \|Ax'_n - y'\| \to 0$$

при $n \to \infty$, поскольку

$$\|Ax_n - Ax'_n\| \leqslant \|A\| \cdot \|x_n - x'_n\| \to 0$$

при $n \to \infty$. Следовательно, $y = y'$.

Линейность оператора $\overline{A}$ очевидным образом следует из линейности оператора A и свойства линейности предела.

Наконец, очевидно, что $\|A\| \leqslant \|\overline{A}\|$. С другой стороны, из неравенства

$$\|Ax_n\| \leqslant \|A\| \cdot \|x_n\|$$

при $n \to \infty$ следует, что

$$\|\overline{A}x\| \leqslant \|A\| \cdot \|x\| \quad \forall\, x \in X,$$

и поэтому $\|\overline{A}\| \leqslant \|A\|$.

Теорема 3 доказана.

4.3. Примеры ограниченных линейных операторов

Как известно, любой линейный оператор, отображающий $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$, задаётся равенством

$$y = Ax, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

где A — квадратная матрица порядка n, а x и y — n-мерные столбцы:

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad y = (y_1, y_2, \ldots, y_n).$$

Если a_{ij} — элементы матрицы A, то матричное равенство (1) в координатах записывается так:

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{2}$$

Так как в $\mathbb{R}^n$ норму можно задавать разными способами, то одно и то же равенство (1) или (2) может задавать различные линейные операторы. Рассмотрим несколько примеров таких операторов.

Пример 1. В линейном пространстве $\mathbb{R}^n$ введём норму по формуле

$$\|x\|_c = \max_j |x_j|$$

и через c^n обозначим полученное нормированное пространство. Будем рассматривать A как оператор, действующий из c^n в c^n.

Из (2) следует, что

$$|y_i| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \cdot \|x\|_c, \quad i = 1,2,\ldots,n,$$

и поэтому

$$\|y\|_c \leqslant \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \cdot \|x\|_c \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n.$$

Следовательно, оператор $A : c^n \to c^n$ ограничен, причём

$$\|A\| \leqslant \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|. \tag{3}$$

Покажем, что в действительности здесь выполняется равенство.

Не ограничивая общности, будем считать, что максимум в (3) достигается при $i = 1$. Тогда для x с координатами $x_j = \operatorname{sgn} a_{ij}$ выполняется равенство

$$\|y\|_c = y_1 = \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|.$$

Отсюда и из (3) следует, что

$$\|A\| = \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|.$$

Пример 2. Через l_p^n, $p > 1$, обозначим линейное пространство $\mathbb{R}^n$ с нормой

$$\|x\|_p = \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p \right)^{1/p}$$

и будем рассматривать A как оператор, действующий из l_p^n в l_q^n, где $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$. Тогда

$$\|y\|_q = \left(\sum_{j=1}^{n}\left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right|^q\right)^{1/q}.$$

А так как, согласно неравенству Гёльдера,

$$\left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right| \leqslant \left(\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^q\right)^{1/q}\left(\sum_{j=1}^{n}|x_j|^p\right)^{1/p}, \tag{4}$$

то

$$\|y\|_q \leqslant \left(\sum_{i,j=1}^{n}|a_{ij}|^q\right)^{1/q}\|x\|_p.$$

Следовательно, оператор $A : l_p^n \to l_q^n$ ограничен, причём

$$\|A\| \leqslant \left(\sum_{i,j=1}^{n}|a_{ij}|^q\right)^{1/q}. \tag{5}$$

Покажем, что в действительности здесь выполняется равенство.

Не ограничивая общности, можно считать, что $A \neq 0$. Тогда для некоторого $x \neq 0$ соотношение (4) превращается в равенство, поэтому, учитывая неравенство (5), получаем

$$\|A\| = \left(\sum_{i,j=1}^{n}|a_{ij}|^q\right)^{1/q}.$$

Пример 3. Пусть оператор A действует из l_p^n в l_p^n, $p>1$. Тогда из равенства

$$\|y\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n}\left|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right|^p\right)^{1/p}$$

и неравенства (4) следует, что

$$\|y\|_p \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^q \right)^{p/q} \right)^{1/p} \|x\|_p.$$

Следовательно, оператор $A : l_p^n \to l_p^n$ ограничен, причём

$$\|A\| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^q \right)^{p/q} \right)^{1/p}.$$

Легко доказывается, что в действительности здесь выполняется равенство.

Аналогично линейным операторам из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$ можно рассмотреть линейные операторы, заданные равенствами

$$y_i = \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} x_j, \quad i = 1,2,\dots\,, \tag{6}$$

и действующие из одного пространства последовательностей в другое. При некоторых ограничениях на бесконечную матрицу A с элементами a_{ij} эти операторы будут ограниченными.

Пример 4. Через m обозначим пространство ограниченных числовых последовательностей и покажем, что оператор $A : m \to m$, заданный равенствами (6), ограничен, если

$$\gamma = \sup_i \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}| < +\infty.$$

Из (6) следует, что

$$\forall\, i \quad |y_i| \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}| \cdot \|x\|_m \leqslant \gamma \|x\|_m,$$

и поэтому

$$\|y\|_m \leqslant \gamma \|x\|_m.$$

Следовательно, оператор $A : m \to m$ ограничен, причём $\|A\| \leqslant \leqslant \gamma$.

Докажите, что $\|A\| = \gamma$.

Пример 5. Через l_p, $p > 1$, обозначим линейное пространство последовательностей с нормой

$$\|x\|_p = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p\right)^{1/p}$$

и покажем, что оператор $A : l_p \to l_q$, заданный равенствами (6), ограничен, если

$$\beta = \left(\sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^q\right)^{1/q} < +\infty.$$

Как и в примере 2, получаем:

$$\left|\sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}| x_j\right| \leqslant \left(\sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|^q\right)^{1/q} \|x\|_p \,,$$
$$\|y\|_q \leqslant \beta \|x\|_p.$$

Следовательно, оператор $A : l_p \to l_q$ ограничен, причём $\|A\| \leqslant \leqslant \beta$.

Докажите, что $\|A\| = \beta$.

Аналогично доказывается, что если

$$\alpha = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|^q\right)^{p/q}\right)^{1/p} < +\infty,$$

то оператор $A : l_p \to l_p$, $p > 1$, заданный равенствами (6), ограничен, причём

$$\|A\| = \alpha.$$

Пример 6. Рассмотрим теперь линейные операторы вида

$$v(x) = \int_a^b K(x,\xi)u(\xi)\,d\xi, \tag{7}$$

где функция $K(x,\xi)$ непрерывна на квадрате $\Delta^2 = \Delta \times \Delta$, где $\Delta = [a;b]$.

Такие операторы называются *интегральными*, а функция $K(x,\xi)$ — *ядром* этого оператора. Обычно интегральный оператор (7) обозначают той же буквой, что и его ядро.

Очевидно, оператор $K : C(\Delta) \to C(\Delta)$ ограничен, причём

$$\|v\|_C \leqslant \left\| \int_a^b |K(x,\xi)|\,d\xi \right\|_C \cdot \|u\|_C.$$

Оператор $K : CL_p(\Delta) \to CL_q(\Delta)$ тоже ограничен. Именно, как и в примере 2, доказывается, что

$$\|v\|_{L_q} \leqslant \|K\|_{L_q} \cdot \|u\|_{L_p}, \tag{8}$$

где

$$\|K\|_q = \left(\iint_{\Delta^2} |K(x,\xi)|^q\,dx\,d\xi \right)^{1/q}.$$

Предельным переходом можно доказать, что оператор $K : L_p(\Delta) \to L_q(\Delta)$ ограничен и для него справедливо неравенство (8).

4.4. Пространства линейных ограниченных операторов

Множество $L(X;Y)$ всех ограниченных линейных операторов, отображающих нормированное пространство X в нормированное пространство Y, с естественными операциями сложения двух операторов и умножения оператора на число является линейным пространством, а норма оператора является нормой в этом линейном пространстве.

Действительно, если A и B — линейные операторы, действующие из X в Y, то для любых чисел α и β оператор $C = \alpha A + \beta B$, определяемый равенством

$$Cx = \alpha Ax + \beta Bx \quad \forall\, x \in X,$$

тоже линеен, так как

$$\begin{aligned} C(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) &= \alpha(\lambda_1 Ax_1 + \lambda_2 Ax_2) + \beta(\lambda_1 Bx_1 + \lambda_2 Bx_2) = \\ &= \lambda_1(\alpha Ax_1 + \beta Bx_1) + \lambda_2(\alpha Ax_2 + \beta Bx_2) = \\ &= \lambda_1 Cx_1 + \lambda_2 Cx_2. \end{aligned}$$

Далее, если операторы A и B ограничены, то операторы $A+B$ и αA тоже ограничены, так как

$$\begin{aligned} \|A+B\| = \sup_{\|x\|\leqslant 1} \|Ax + Bx\| &\leqslant \sup_{\|x\|\leqslant 1} (\|Ax\| + \|Bx\|) \leqslant \\ &\leqslant \|A\| + \|B\|, \end{aligned}$$

$$\|\alpha A\| = \sup_{\|x\|\leqslant 1} \|\alpha Ax\| = |\alpha| \sup_{\|x\|\leqslant 1} \|Ax\| = |\alpha| \cdot \|A\|.$$

Отсюда, в частности, следует, что

$$\|A+B\| \leqslant \|A\| + \|B\|, \quad \|\alpha A\| = |\alpha| \cdot \|A\|.$$

Кроме того, $\|A\| \geqslant 0\ \forall A \in L(X;Y)$, причём, если $\|A\| = 0$, то $Ax = 0\ \forall\, x \in X$. Следовательно, норма оператора удовлетворяет всем аксиомам нормы.

Таким образом, $L(X;Y)$ — линейное нормированное пространство.

Пусть $A_n \in L(X;Y)$ и $A \in L(X;Y)$. Из очевидного равенства

$$\sup_{\|x\|\leqslant 1} \|A_n x - Ax\| = \|A_n - A\|$$

следует, что сходимость последовательности линейных операторов по норме пространства $L(X;Y)$ равносильна равномерной сходимости этой последовательности на шаре $\|x\| \leqslant 1$. Поэтому если $\|A_n - A\| \to 0$ при $n \to \infty$, то говорят, что *последовательность операторов A_n, $n \in \mathbb{N}$, сходится равномерно к оператору A.*

Теорема 1. *Если пространство X нормированное, а пространство Y банахово, то пространство $L(X;Y)$ тоже банахово.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть последовательность операторов $A_n \in L(X;Y)$, $n \in \mathbb{N}$, фундаментальная. Из неравенства

$$\|A_{n+p}x - A_n x\| \leqslant \|A_{n+p} - A_n\| \cdot \|x\|$$

следует, что при любом $x \in X$ последовательность $\{A_n x\}$ тоже фундаментальная. А так как пространство Y полное, то эта последовательность имеет предел. Положим

$$y = \lim_{n\to\infty} A_n x.$$

Эта формула определяет линейный оператор $y = Ax$. Докажем, что он ограничен.

Из неравенства $|\|A_{n+p} - \|A_n\|| \leqslant \|A_{n+p} - A_n\|$ следует, что числовая последовательность $\{\|A_n\|\}$ фундаментальная и, как следствие, ограниченная. Пусть

$$\|A_n\| \leqslant C \quad \forall\, n.$$

Тогда

$$\|A_n x\| \leqslant \|A_n\| \cdot \|x\| \leqslant C\|x\| \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Отсюда в пределе при $n \to \infty$ получаем неравенство

$$\|Ax\| \leqslant C\|x\|,$$

справедливое для любого $x \in X$.

Теорема 1 доказана.

Наряду с равномерной сходимостью в пространстве $L(X;Y)$ можно рассматривать и поточечную сходимость.

Очевидно, если $A_n \to A$ при $n \to \infty$ равномерно, то $A_n \to$ $\to A$ при $n \to \infty$ поточечно. Следующий пример показывает, что обратное утверждение является неверным.

Пример. В пространстве l_2 последовательностей $x =$ $= \{x_1, x_2,, \ldots, x_n, \ldots\}$ с нормой

$$\|x\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2\right)^{1/2}$$

рассмотрим оператор проектирования $y = P_n x$, который последовательности x ставит в соответствие последовательностям $y = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, \ldots\}$. Тогда

$$\|P_n x - x\|^2 = \sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k|^2 \to 0$$

при $n \to \infty$ для любой последовательности $x \in l_2$. Следовательно, $P_n \to I$ при $n \to \infty$ поточечно, где I — тождественный оператор в l_2. Однако эта сходимость не будет равномерной. Действительно, если $\|x\| = 1$ и $P_n x = 0$, то $\|P_n x - x\| = \|x\| = 1$. Следовательно,

$$\|P_n - I\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|P_n x - x\| \geqslant 1.$$

для любого $n \in \mathbb{N}$.

4.5. Дифференцируемые операторы

Пусть X и Y — линейные нормированные пространства, и пусть f — произвольный оператор, действующий из X в Y, с областью определения $D_f \subset X$.

Определение 1. Оператор f, определённый в некоторой окрестности точки $x \in D_f$, называется *дифференцируемым в точке* x, если существует линейный ограниченный оператор $A : X \to Y$ такой, что

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - Ah}{\|h\|} = 0. \tag{1}$$

Линейный ограниченный оператор A называют *дифференциалом Фреше оператора* f *в точке* x и обозначают Df или, более подробно, $Df(x)$.

Оператор α, заданный равенством

$$\alpha(h) = \frac{f(x+h) - f(x) - Ah}{\|h\|},$$

определён в некоторой окрестности точки $h = 0$, кроме самой этой точки. Доопределим его, положив $\alpha(0) = 0$. Тогда условие (1) можно записать в виде следующего равенства:

$$f(x+h) = f(x) + Ah + \alpha(h)\|h\|,$$

где $\alpha(h) \to 0$ при $h \to 0$.

Как и для числовых функций, в определении дифференцируемости операторов удобно использовать понятие “бесконечно малый оператор” и символ “o-малое”.

Определение 2. Оператор β, действующий из X в Y, называется *бесконечно малым при* $x \to x_0$, $x_0 \in D_\beta$, если

$$\lim_{x \to x_0} \|\beta(x)\| = 0.$$

В этом случае будем писать

$$\beta(x) = o(1) \quad \text{при} \quad x \to x_0.$$

Если $\beta(x) = \varepsilon(x)\|x - x_0\|$, где $\varepsilon(x) = o(1)$ при $x \to x_0$, то, как обычно, будем писать

$$\beta(x) = o(x - x_0) \quad \text{при} \quad x \to x_0.$$

Используя эти понятия, определение дифференцируемости оператора можно сформулировать следующим образом.

Определение 1′. Оператор f называется *дифференцируемым в точке* $x \in D_f$, если существует линейный ограниченный оператор $A : X \to Y$ такой, что

$$f(x+h) - f(x) - Ah = o(h) \tag{2}$$

при $h \to 0$.

Асимптотическое равенство (2), как и для числовых функций, записывают ещё и так:

$$f(x+h) = f(x) + Ah + o(h)$$

при $h \to 0$.

Таким образом, если оператор f дифференцируем в точке $x \in D_f$, то
$$f(x+h) - f(x) = Df(x)h + o(h)$$
при $h \to 0$.

Легко доказываются следующие утверждения:

1. *Если операторы f и g, действующие из X в Y, дифференцируемы в точке x, то для любых чисел λ и μ оператор $\lambda f + \mu g$ тоже дифференцируем в точке x и*
$$D(\lambda f + \mu g) = \lambda Df + \mu Dg.$$
2. *Если оператор f, действующий из X в Y, дифференцируем в точке x, а оператор g, действующий из Y в нормированное пространство Z, дифференцируем в точке $y = f(x)$, то композиция $g \circ f$, задаваемая равенством*
$$z = g(f(x)),$$
дифференцируема в точке x и
$$D(g \circ f) = Dg \circ Df.$$

Наряду с введённым понятием дифференцируемости бывает полезным понятие дифференцируемости по направлению.

Определение 3. Оператор f называется *дифференцируемым в точке $x \in D_f$ по направлению h*, если существует предел
$$\lim_{t \to +0} \frac{f(x+th) - f(x)}{t}.$$
Этот предел называют *производной Гато по направлению h оператора f в точке x* и обозначают $D_h f$ или $D_h f(x)$.

Таким образом, согласно определению,
$$f(x+th) = f(x) + tD_h f(x) + o(th)$$
при $t \to +0$.

Отметим, что в заданной точке $x \in D_f$ дифференциал Фреше — это элемент пространства $L(X; Y)$, а производная Гато — это элемент пространства Y.

Очевидно, что если в точке x оператор f дифференцируем (по Фреше), то он дифференцируем по любому направлению h, причём

$$D_h f(x) = Df(x)h.$$

Действительно, если оператор f дифференцируем в точке x, то

$$f(x+th) = f(x) + tDf(x)h + o(th)$$

при $t \to +0$.

§ 5. Пространства со скалярным произведением

5.1. Евклидовы пространства

Понятие скалярного произведения векторов и элементов линейного пространства вводится в аналитической геометрии и соответственно в линейной алгебре. Напомним, что в линейной алгебре, как правило, рассматриваются лишь конечномерные пространства. Здесь введём понятие скалярного произведения для элементов произвольного линейного пространства.

Определение 1. Пусть E — линейное пространство над полем $\mathbb{R}$ действительных чисел. Функция $(\ ,\ ) : E \times E \to \mathbb{R}$, которая каждой упорядоченной паре элементов x,y из E ставит в соответствие некоторое действительное число, обозначаемое (x,y), и которая удовлетворяет следующим условиям:

1) $(x,x) \geqslant 0 \quad \forall\, x \in E;$ (1)

2) $(\alpha x,y) = \alpha(x,y) \quad \forall\, x,y \in E,\ \forall\, \alpha \in \mathbb{R};$ (2)

3) $(x+y,z) = (x,z) + (y,z) \quad \forall\, x,y,z \in E;$ (3)

4) $(x,y) = (y,x) \quad \forall\, x,y \in E,$ (4)

называется *почти скалярным произведением элементов линейного пространства E.*

Из свойств (2) и (4) следует, что

$$(x,\beta y) = \beta(x,y) \quad \forall\, x,y \in E, \quad \forall\, \beta \in \mathbb{R},$$

а из свойства (3) при $x = y = 0$ следует, что

$$(0,z) = 0 \quad \forall\, z \in E.$$

Теорема. *В линейном пространстве E, в котором введено почти скалярное произведение, функция*
$$\|x\| = \sqrt{(x,x)}, \quad x \in E, \tag{5}$$
является полунормой.

Доказательство. Очевидно,
$$\|x\| \geqslant 0 \quad \forall\, x \in E, \quad \|\alpha x\| = |\alpha|\,\|x\| \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{R}.$$
Осталось доказать лишь *неравенство треугольника*:
$$\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|. \tag{6}$$
Для этого сначала докажем так называемое *неравенство Коши–Буняковского.*

Лемма. *Для любых x и y из E справедливо неравенство*
$$|(x,y)| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|. \tag{7}$$

Доказательство. Очевидно,
$$0 \leqslant (\alpha x - y, \alpha x - y) = \alpha^2 \|x\|^2 - 2\alpha(x,y) + \|y\|^2$$
для любого $\alpha \in \mathbb{R}$. Поэтому если $\|x\| = 0$, то $(x,y) = 0$, и, следовательно, в этом случае неравенство (7) справедливо. Если же $\|x\| > 0$, то, полагая $\alpha = \dfrac{(x,y)}{\|x\|^2}$, получаем неравенство
$$0 \leqslant -\frac{(x,y)^2}{\|x\|^2} + \|y\|^2,$$
которое равносильно неравенству (7), когда $\|x\| \neq 0$.

Лемма доказана.

Теперь неравенство (6) легко следует из неравенства (7). Действительно,
$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2(x,y) + \|y\|^2 \leqslant$$
$$\leqslant \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2.$$

Теорема доказана.

Определение 2. Пусть E — линейное пространство над полем $\mathbb{R}$ действительных чисел. Функция $(\ ,\ ) : E \times E \to \mathbb{R}$ называется *скалярным произведением элементов пространства* E, если она является почти скалярным произведением и, кроме того, удовлетворяет условию:

$$\text{если} \quad (x,x) = 0, \quad \text{то} \quad x = 0. \tag{8}$$

Само число (x,y) называют *скалярным произведением элементов (векторов) x и y*, а элементы x и y — его *множителями* или *сомножителями*, соответственно *первым* и *вторым.*

Свойство, выражаемое условиями (1) и (8), называется *положительной определнностью скалярного произведения*, свойство (4) — *коммутативностью*, а свойство, выражаемое условиями (2) и (3), — *линейностью* (по первому сомножителю).

Из коммутативности следует, что скалярное произведение обладает свойством линейности и по второму сомножителю.

Из доказанной теоремы следует, что *любое линейное пространство со скалярным произведением является нормированным пространством с нормой, определяемой равенством* (5).

Норму (5) будем называть *нормой, порождной заданным скалярным произведением.*

Очевидно, скалярное произведение является непрерывной функцией относительно нормы, порождённой этим скалярным произведением.

Действительно, если $x_n \to x$ и $y_n \to y$ при $n \to \infty$, то

$$|(x_n,y_n) - (x,y)| \leqslant |(x_n,y_n) - (x,y_n)| + |(x,y_n) - (x,y)| \leqslant \\ \leqslant \|x_n - x\| \cdot \|y_n\| + \|x\| \cdot \|y_n - y\| \to 0$$

при $n \to \infty$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n,y_n) = (x,y)$.

Если, как и в линейных пространствах с полунормой, элементы x,y из E, для которых $\|x - y\| = 0$, считать равными, то вместо “почти скалярное произведение” всегда можно говорить “скалярное произведение”. В дальнейшем мы всюду, где не возникает разночтений, будем говорить о скалярных произведениях.

Определение 3. Линейное пространство над полем действительных чисел, для элементов которого определено скалярное произведение, называется *евклидовым пространством.*

Определение 4. Полное евклидово пространство называется *гильбертовым.*

Неполное евклидово пространство иногда называют *предгильбертовым.*

Очевидно, арифметическое n-мерное векторное пространство $\mathbb{R}^n$, в котором скалярное произведение векторов $x = (x_1, \ldots, x_n)$ и $y = (y_1, \ldots, y_n)$ определено по формуле

$$(x,y) = x_1y_1 + \ldots + x_ny_n,$$

является евклидовым пространством.

Более того, это пространство полное. В частности, множество действительных чисел $\mathbb{R}$ является линейным пространством над полем действительных чисел, и в нём обычное произведение двух чисел является скалярным произведением элементов этого линейного пространства.

Приведём ещё несколько примеров евклидовых пространств.

Пример 1. Линейное нормированное пространство l_2 над полем действительных чисел, в котором скалярное произведение элементов $x = (x_1, x_2, \ldots)$ и $y = (y_1, y_2, \ldots)$ определено по формуле

$$(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} x_ky_k,$$

является евклидовым пространством. Оно является полным.

Пример 2. Линейное пространство функций, определённых и непрерывных на отрезке $\Delta = [a; b]$, в котором скалярное произведение функций $f(x)$ и $g(x)$ введено по формуле

$$(f,g) = \int_{\Delta} f(x)g(x)\,dx,$$

очевидно, является евклидовым.

Это пространство обозначается $CL_2(\Delta)$. Ранее было показано, что оно неполное.

Аналогично, линейное пространство $RL_2(\Delta)$ функций, определённых и интегрируемых на отрезке $\Delta = [a; b]$, в котором скалярное произведение введено по формуле (8), тоже будет евклидовым. Следует заметить, что здесь элементами являются не отдельные функции, а классы функций. Функции $f(x)$ и $g(x)$ попадают в один класс, если

$$\int_{\Delta} |f(x) - g(x)|^2\,dx = 0.$$

5.2. Унитарные (эрмитовы) пространства

Пусть E — линейное пространство над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел.

Определение 1. Функция $(\ ,\ ) : E \times E \to \mathbb{C}$ называется *скалярным произведением элементов пространства* E, если она удовлетворяет условиям:
1) $(x,x) \geqslant 0\ \forall\, x \in E$, причём если $(x,x) = 0$, то $x = 0$;
2) $(\alpha x,y) = \alpha(x,y)\ \forall\, x,y \in E,\ \forall\, \alpha \in \mathbb{C}$;
3) $(x + y,z) = (x,z) + (y,z)\ \forall\, x,y,z \in E$;
4) $(x,y) = \overline{(y,x)}\ \forall\, x,y \in E$,

где черта означает комплексное сопряжение.

Из свойств 2) и 4) следует, что

$$(x,\beta y) = \overline{\beta}(x,y) \quad \forall\, x,y \in E, \quad \forall\, \beta \in \mathbb{C}.$$

Действительно,

$$(x,\beta y) = \overline{(\beta y,x)} = \overline{\beta}\,\overline{(y,x)} = \overline{\beta}(x,y).$$

Легко видеть, что

$$(z,x+y) = (z,x) + (z,y).$$

Теорема. *В линейном пространстве E со скалярным произведением функция*

$$\|x\| = \sqrt{(x,x)}, \quad x \in E, \tag{5}$$

является нормой.

Очевидно, достаточно доказать лишь неравенство треугольника, а оно, как и в п. 5.1, следует из неравенства Коши–Буняковского.

Для доказательства неравенства Коши–Буняковского заметим, что

$$0 \leqslant (\alpha x - y,\alpha x - y) = |\alpha|^2\|x\|^2 - \alpha(x,y) - \overline{\alpha}(y,x) + \|y\|^2$$

для любого $\alpha \in \mathbb{C}$. Поэтому если $\|x\| = 0$, то $(x,y) = 0$, и, следовательно, $(x,y) = \|x\| \cdot \|y\|$ для любого $y \in E$. Если же $\|x\| > 0$, то положив $\alpha = \dfrac{(y,x)}{\|x\|^2}$, получим неравенство

$$0 \leqslant \frac{|(x,y)|^2}{\|x\|^2} - \frac{(y,x)}{\|x\|^2}(x,y) - \frac{(x,y)}{\|x\|^2}(y,x) + \|y\|^2 = -\frac{|(x,y)|^2}{\|x\|^2} + \|y\|^2.$$

Таким образом,

$$|(x,y)| \leqslant \|x\| \cdot \|y\| \quad \forall\, x,y \in E.$$

Из доказанной теоремы следует, что любое линейное пространство со скалярным произведением является нормированным пространством с нормой, определяемой равенством (5).

Определение 2. Линейное пространство над полем комплексных чисел, для элементов которого определено скалярное произведение, называется *унитарным* (*эрмитовым* или *комплексно евклидовым*) *пространством.*

Полное унитарное пространство называется *гильбертовым.*

Очевидно, арифметическое n-мерное векторное комплексное пространство $\mathbb{C}^n$, в котором скалярное произведение векторов $x = (x_1, \ldots ,x_n)$ и $y = (y_1, \ldots ,y_n)$ определено по формуле

$$(x,y) = x_1\overline{y_1} + \ldots + x_n\overline{y_n},$$

является эрмитовым пространством.

В частности, в множестве комплексных чисел $\mathbb{C}$ скалярное произведение определяется по формуле $(x,y) = x\overline{y}$.

Пример 1. Унитарным пространством является линейное нормированное пространство l_2 последовательностей комплексных чисел $x = (x_1,x_2, \ldots)$ и $y = (y_1,y_2, \ldots)$, ..., для которых скалярное произведение определено по формуле

$$(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k\overline{y_k}.$$

Пример 2. Линейное пространство функций $f : \Delta \to \mathbb{C}$, определённых и непрерывных на отрезке $\Delta = [a; b]$, в котором скалярное произведение функций $f(x)$ и $g(x)$ введено по формуле

$$(f,g) = \int_{\Delta} f(x)\overline{g(x)}\, dx,$$

является унитарным. Оно обозначается $CL_2(\Delta)$.

Аналогично определяется унитарное пространство $RL_2(\Delta)$.

Пусть E — некоторое евклидово пространство (действительное или комплексное).

Определение 3. Два элемента евклидова пространства называются *ортогональными*, если их скалярное произведение равно нулю.

Определение 4. Произвольная система элементов евклидова пространства называется *ортогональной*, если любые два её элемента ортогональны. Если, кроме того, норма каждого её элемента равна единице, то эта система называется *ортонормированной*.

Очевидно, любая ортонормированная система является линейно независимой. Примеры ортонормированных систем были рассмотрены в главе 14.

Пусть в евклидовом пространстве E задана линейно независимая счётная система элементов x_n, $n \in \mathbb{N}$. Покажем, что в E существует счётная ортогональная система y_n, $y \in \mathbb{N}$, такая, что для любого n элемент y_n есть линейная комбинация элементов $x_1, \ldots, x_n$.

Положим $y_1 = x_1$, $y_2 = \alpha_2^1 y_1 - x_2$ и найдём α_2^1 из условия $(y_2, y_1) = 0$. Тогда

$$\alpha_2^1 \|y_1\|^2 = (x_2, y_1).$$

Так как система $\{x_n\}$ линейно независимая, то $\|y_1\| \neq 0$, и поэтому

$$\alpha_2^1 = \frac{(x_2, y_1)}{\|y_1\|^2}\,.$$

Далее, $y_3 = \alpha_3^1 y_1 + \alpha_3^2 y_2 - x_3$, где α_3^1 и α_3^2 находим из условий $(y_3, y_1) = (y_3, y_2) = 0$. Очевидно,

$$\alpha_3^1 = \frac{(x_3, y_1)}{\|y_1\|^2}\,, \qquad \alpha_3^2 = \frac{(x_3, y_2)}{\|y_2\|^2}\,.$$

Пусть уже построена ортогональная система элементов $y_k \neq 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$, таких, что каждое y_k есть линейная комбинация элементов $x_1, \ldots, x_k$. Положим $y_{n+1} = \alpha_{n+1}^1 y_1 + \ldots + \alpha_{n+1}^n y_n - x_{n+1}$ и найдём α_{n+1}^k из условий $(y_{n+1}, y_k) = 0$, $k = 1, \ldots, n$. Тогда

$$\alpha_{n+1}^k = \frac{(x_{n+1}, y_k)}{\|y_k\|^2}\,, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Согласно методу математической индукции, искомая ортогональная система $\{y_n\}$ построена. Метод, с помощью которого она построена, называется *методом* или *процессом ортогонализации.*

5.3. Гильбертовы пространства

Как и в теории линейных нормированных пространств, в теории пространств со скалярным произведением особую роль играют полные пространства.

Определение 1. Пространство со скалярным произведением, которое является полным относительно нормы, порождённой этим скалярным произведением, называется *гильбертовым пространством.*

Гильбертово пространство может быть как действительным, так и комплексным. Любое конечномерное пространство над полем действительных или комплексных чисел, в котором введено скалярное произведение, является полным. Обычно такие пространства называют евклидовыми, а гильбертовыми называют полные бесконечномерные евклидовы пространства. В общем случае их обозначают буквой H с разными индексами.

Определение 2. Два евклидовых пространства E_1 и E_2 называются *изоморфными*, если существует изоморфизм $f : E_1 \to E_2$ линейных пространств E_1 и E_2 такой, что

$$(f(x),f(y))_2 = (x,y)_1 \quad \forall\, x,y \in E_1,$$

где $(\ ,\ )_1$ и $(\ ,\ )_2$ — скалярные произведения в E_1 и соответственно в E_2.

Определение 3. Гильбертово пространство H называется *пополнением евклидова пространства* E, если в H существует подпространство E', которое изоморфно пространству E и плотно в пространстве H.

Теорема. *Любое евклидово пространство имеет пополнение.*

Доказательство. Любое евклидово пространство E является нормированным пространством. Ранее было показано, что любое нормированное пространство E имеет пополнение, и этим пополнением является пространство E^*, элементами которого являются классы эквивалентных фундаментальных последовательностей элементов из E.

Через E' обозначим множество классов фундаментальных последовательностей, среди которых есть стационарная последовательность. Тогда каждому $x \in E$ ставится в соответствие класс $x' \in E'$ такой, что он содержит последовательность $x,x,x,\ldots$, причём, по определению, $\|x'\|_* = \|x\|$. Было доказано, что E' плотно в E^*, т.е. что для любого $x^* \in E^*$ существует последовательность элементов $x'_n \in E'$ таких, что $x'_n \to x^*$ при $n \to \infty$.

Для любой пары элементов x^* и y^* из E^* скалярное произведение введём равенством

$$(x^*,y^*)_* = \lim_{n\to\infty}(x_n,y_n), \tag{1}$$

где $\{x_n\} \in x^*$, $\{y_n\} \in y^*$.

Этот предел существует, так как

$$|(x_m,y_m) - (x_n,y_n)| \leqslant \|x_m - x_n\| \cdot \|y_m\| + \|x_n\|\|y_m - y_n\|$$

для любых m и n, поэтому числовая последовательность (x_n,y_n), $n \in \mathbb{N}$, фундаментальная и, следовательно, имеет предел.

Легко проверить, что предел (1) не зависит от выбора последовательностей $\{x_n\} \in x^*$ и $\{y_n\} \in y^*$ и что функция $(x^*,y^*)_*$ на $E^* \times E^*$ обладает всеми свойствами скалярного произведения.

Важными примерами гильбертовых пространств является пространство l_2 числовых последовательностей и пространство $L_2(\Delta)$, где Δ — некоторый промежуток. Напомним, что $L_2(\Delta)$ — это пополнение евклидова пространства $CL_2(\Delta)$.

5.4. Ряды Фурье

Пусть в евклидовом пространстве E задана некоторая ортонормированная система

$$e_1,e_2,\ldots,e_n,\ldots \tag{1}$$

В общем случае эта система может быть как конечной, так и бесконечной.

Конечномерные евклидовы пространства E изучаются в линейной алгебре. Мы же будем рассматривать бесконечномерные пространства. В любом таком пространстве E существует счётная линейно независимая система, из которой процессом ортогонализации можно получить счётную ортонормированную систему.

Определение 1. Пусть в евклидовом пространстве E задана ортонормированная система (1). Тогда для любого $x \in E$ числа

$$a_k = (x,e_k), \quad k \in \mathbb{N},$$

называются *коэффициентами Фурье элемента x по ортонормированной системе* (1), а ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k$$

называется *рядом Фурье элемента x* по этой системе.

Теорема 1. *Если a_k, $k \in \mathbb{N}$, — коэффициенты Фурье элемента $x \in E$ по ортонормированной системе, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|^2$ сходится и*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 \leqslant \|x\|^2. \tag{2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Легко видеть, что

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} a_k e_k \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |a_k|^2, \tag{3}$$

и поэтому

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 \leqslant \|x\|^2$$

для любого $n \in \mathbb{N}$. Следовательно, ряд с неотрицательными членами $|a_k|^2$ сходится, и выполняется неравенство (2).

Неравенство (2) называется *неравенством Бесселя.*

Из равенства (3), справедливого для любого $n \in \mathbb{N}$, следует, что *ряд Фурье элемента $x \in E$ сходится к x, т.е.*

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k,$$

тогда и только тогда, когда выполняется равенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 = \|x\|^2. \tag{4}$$

Это равенство называется *равенством Парсеваля–Стеклова.*

Определение 2. Ортонормированная система (1) элементов пространства E называется *замкнутой в смысле Стеклова*, если для любого $x \in E$ выполняется равенство (4).

Таким образом, *для того чтобы любой элемент евклидова пространства разлагался в ряд Фурье по ортонормированной системе, необходимо и достаточно, чтобы эта система была замкнутой в смысле Стеклова.*

Докажем теперь так называемое *минимальное свойство коэффициентов Фурье.* А именно, докажем, что

$$\inf_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n} \left\| x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \right\| = \left\| x - \sum_{k=1}^{n} a_k e_k \right\|, \tag{5}$$

где a_k — коэффициенты Фурье элемента $x \subset E$ по ортонормированной системе (1), а точная нижняя грань берётся по всем линейным комбинациям элементов $e_1, e_2, \ldots, e_n$ системы (1).

Легко вычисляется, что

$$\left\|x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k\right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 + \sum_{k=1}^{n} |a_k - \alpha_k|^2.$$

Отсюда следует, что минимум этого выражения достигается, когда $\alpha_k = a_k$, что и доказывает свойство (5).

Напомним, что система элементов нормированного пространства X называется полной в X, если её линейная оболочка плотна в X.

Теорема 2. *Если ортонормированная система* (1) *полна в евклидовом пространстве* E, *то любой элемент* $x \in E$ *разлагается в ряд Фурье по этой системе.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как система (1) полна в нормированном пространстве E, то для любого $x \in E$ выполняется условие:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \alpha_1, \ldots, \alpha_{N_\varepsilon} : \quad \left\|x - \sum_{k=1}^{N_\varepsilon} \alpha_k e_k\right\| < \varepsilon.$$

Отсюда и из минимального свойства коэффициентов Фурье $a_k = (x, e_k)$ следует, что

$$\left\|x - \sum_{k=1}^{N_\varepsilon} \alpha_k e_k\right\| < \varepsilon$$

и, в силу равенства (3),

$$\left\|x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k\right\| < \varepsilon \quad \forall\, n \geqslant N_\varepsilon.$$

Таким образом, $x - \sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k$.

Теорема 2 доказана.

До сих пор евклидово пространство E могло быть неполным. Докажем несколько утверждений, когда E полное, т.е. когда E является гильбертовым пространством H.

Теорема 3. *Если ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k|^2$ *сходится, то для любой ортонормированной системы* (1) *в гильбертовом пространстве* H *ряд* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k e_k$ *сходится и является рядом Фурье некоторого элемента* $x \in H$.

Доказательство. Из равенства

$$\left\| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k e_k \right\|^2 = \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k|^2,$$

справедливого для любых n и p, следует, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k e_k$ удовлетворяет условию Коши. В силу полноты пространства H этот ряд сходится к некоторому элементу $x \in H$:

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k.$$

Из непрерывности скалярного произведения следует, что $a_k = (x,e_k)$. Действительно,

$$(x,e_k) = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{j=1}^{n} a_j e_j, e_k \right) = a_k.$$

Теорема 3 доказана.

Теорема 4. *В гильбертовом пространстве* H *ортонормированная система* (1) *полна тогда и только тогда, когда в* H *только ноль ортогонален всем элементам этой системы.*

Доказательство. Очевидно, если система (1) полна в H, то для любого $x \in H$ выполняется равенство Парсеваля–Стеклова. Поэтому если $(x,e_k) = 0 \quad \forall\, k$, то $x = 0$.

Пусть теперь система (1) такая, что в H только ноль ортогонален всем e_k. Выберем некоторое $x \in H$ и покажем, что если ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k \tag{6}$$

является рядом Фурье элемента x, то он сходится к x.

Из неравенства Бесселя следует, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2$ сходится, и поэтому, согласно теореме 3, ряд (6) сходится к некоторому элементу x_0, для которого ряд (6) является рядом Фурье. Следовательно, $(x - x_0, e_k) = 0 \quad \forall\, k$, но тогда $x - x_0 = 0$.

Теорема 4 доказана.

З а м е ч а н и е. В теореме 4 полнота системы (1) в пространстве H понимается как полнота этой системы в нормированном пространстве. Во многих учебниках для ортонормированных систем полнота определяется иначе. Именно, ортонормированная система называется *полной* в евклидовом пространстве E, если в E только ноль ортогонален всем элементам этой системы. Теорема 4 показывает, что оба понятия полноты ортонормированной системы в гильбертовом пространстве совпадают.

5.5. Изоморфизм сепарабельных гильбертовых пространств

Напомним, что нормированное пространство X называется *сепарабельным*, если в X существует полная система из счётного числа элементов. Вообще говоря, пространство X может быть как конечномерным, так и бесконечномерным. Обычно под сепарабельными понимают бесконечномерные пространства.

Последовательность $\{e_k\}$ элементов нормированного пространства X называется *базисом в* X, если для любого $x \in X$ существует единственная последовательность чисел λ_k, $k \in \mathbb{N}$, таких, что

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k e_k.$$

Теорема 1. *Во всяком сепарабельном евклидовом пространстве E существует ортонормированный базис.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку пространство E сепарабельное, то в нём существует полная линейно независимая система, состоящая из счётного числа элементов:

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$$

Из этой системы процессом ортогонализации получим ортонормированную систему

$$e_1, e_2, \ldots, e_n.$$

Очевидно, она тоже будет полной в пространстве E, и поэтому любой элемент $x \in E$ разлагается в ряд Фурье по этой системе.

Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Любое сепарабельное бесконечномерное гильбертово пространство H изоморфно пространству l_2 числовых последовательностей.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно теореме 1, в H существует ортонормированный базис $e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots$. Тогда каждому элементу $x \in H$ поставим в соответствие последовательность $\{a_k\}$ его коэффициентов Фурье по этой системе. Очевидно, $\{a_k\} \in l_2$.

Из теоремы 3 предыдущего пункта следует, что если $\{a_k\} \in$ $\in l_2$, то a_k, $k \in \mathbb{N}$ являются коэффициентами Фурье некоторого элемента из H.

Следовательно, между элементами пространств H и l_2 можно установить взаимно однозначное соответствие. Очевидно, если $x \sim \{a_k\}$, $y \sim \{b_k\}$, то $x+y \sim \{a_k+b_k\}$ и $\alpha x \sim \{\alpha s_k\}$ для любого числа α. Кроме того,

$$\|x\| = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2, \qquad \|y\| = \sum_{k=1}^{\infty} |b_k|^2,$$

а из непрерывности скалярного произведения следует, что

$$(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \overline{b_k}.$$

Теорема 2 доказана.

Очевидно, пространство l_2 является сепарабельным, поэтому из теоремы 2 получаем следующее утверждение.

Теорема 3. *Все сепарабельные бесконечномерные гильбертовы пространства изоморфны между собой.*

Доказательство. Пусть H и H' — два сепарабельных бесконечномерных гильбертовых пространства. Согласно теореме 1, в H и H' существуют ортонормированные базисы $\{e_k\}$ и $\{e'_k\}$. Тогда каждому элементу $x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k e_k$ поставим в соответствие элемент $x' = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k e'_k$. Легко видеть, что это соответствие является изоморфизмом гильбертовых пространств H и H'.

Теорема 3 доказана.

Из доказанных теорем следует, что если ортонормированная последовательность $\{e_k\}$ является базисом в евклидовом пространстве E, то его пополнением является гильбертово пространство, элементами которого являются всевозможные ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k e_k$, у которых $\{a_k\} \in l_2$, и в котором скалярное произведение определяется следующим образом: если

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k, \qquad y = \sum_{k=1}^{\infty} b_k e_k,$$

то

$$(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \overline{b_k}.$$

5.6. Ортогональные проекции

Пусть L — некоторое линейное подпространство евклидова пространства E.

Определение 1. Элемент $y_0 \in L$ называется *ортогональной проекцией элемента* $x_0 \in E$ *в подпространство* L, если

$$(x_0 - y_0, y) = 0 \quad \forall\, y \in L. \tag{1}$$

Очевидно, любой элемент $x \in E$ может иметь только одну проекцию на данное подпространство L. Действительно, пусть

$$(x - y_1, y) = 0, \quad (x - y_2, y) = 0 \quad \forall\, y.$$

Тогда

$$\|y_1 - y_2\|^2 = (y_1 - y_2, y_1 - x + x - y_2) = 0$$

и, следовательно, $y_1 = y_2$.

Теорема 1. *Для того чтобы элемент $y_0 \in L$ был ортогональной проекцией элемента $x_0 \in E$ в подпространство L, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$\|x_0 - y_0\| = \inf_{y \in L} \|x_0 - y\|. \tag{2}$$

Доказательство. Если y_0 удовлетворяет условию (1), то, очевидно,

$$\begin{aligned}\|x_0 - y\|^2 &= ((x_0 - y_0) + (y_0 - y), (x_0 - y_0) + (y_0 - y)) = \\ &= \|x_0 - y_0\|^2 + \|y_0 - y\|^2\end{aligned}$$

для любого $y \in L$, и поэтому выполняется условие (2).

Пусть теперь выполняется условие (2). Рассмотрим числовую функцию

$$f(t) = \|x_0 - y_0 + ty\|^2, \quad t \in \mathbb{R},$$

где y — произвольный элемент подпространства L.

Если пространство E действительное, то

$$f(t) = \|x_0 - y_0\|^2 + 2t(x_0 - y_0, y) + t^2\|y\|^2.$$

А так как эта функция наименьшее значение принимает при $t = 0$, то $f'(0) = 0$, и поэтому

$$(x_0 - y_0, y) = 0 \quad \forall\, y \in L.$$

Если же пространство E комплексное, то

$$f(t) = \|x_0 - y_0\|^2 + 2t\,\mathrm{Re}(x_0 - y_0, y) + t^2\|y\|^2,$$

и поэтому

$$\mathrm{Re}(x_0 - y_0, y) = 0 \quad \forall\, y \in L.$$

Аналогично, если рассмотрим функцию

$$f_1(t) = \|x_0 - y_0 + ity\|^2,$$

то получим

$$\mathrm{Im}(x_0 - y_0, y) = 0 \quad \forall\, y \in L.$$

Следовательно, и в этом случае выполняется условие (1).

Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Если подпространство L евклидова пространства E полное, то у любого элемента $x \in E$ существует ортогональная проекция на подпространство L.*

Доказательство. Из теоремы 1 следует, что нужно доказать, что

$$\forall\, x_0 \in E \quad \exists\, y_0 \in L: \quad \|x_0 - y_0\| = \inf_{y \in L} \|x_0 - y\|.$$

Выберем некоторое $x_0 \in E$ и положим

$$d = \inf_{y \in L} \|x_0 - y\|^2.$$

Тогда существует последовательность $\{y_n\}$ элементов из L такая, что

$$\lim_{n \to \infty} \|x_0 - y_n\|^2 = d. \tag{3}$$

Покажем, что эта последовательность фундаментальная.

Легко проверяется, что

$$\|y_n - y_m\|^2 = 2\|y_n - x_0\|^2 + 2\|y_m - x_0\|^2 - 4\left\|x_0 - \frac{y_m + y_n}{2}\right\|^2$$

для любых n и m. А так как $\frac{1}{2}(y_m + y_n) \in L$, то

$$\left\| x_0 - \frac{1}{2}(y_m + y_n) \right\|^2 \geqslant d,$$

и поэтому

$$\|y_n - y_m\|^2 \leqslant 2\|x_0 - y_n\|^2 + 2\|x_0 - y_m\|^2 - 4d.$$

Из условия (3) следует, что

$$\forall\, \varepsilon^2 \quad \exists\, N: \quad \forall\, n \geqslant N \quad \|x_0 - y_n\|^2 < d + \frac{\varepsilon^2}{4}\,.$$

Тогда из (4) получаем:

$$\|y_n - y_m\|^2 < \varepsilon^2 \quad \forall\, n,m \geqslant N.$$

Так как пространство L полное, то существует элемент $y_0 \in L$ такой, что $y_n \to y_0$ при $n \to \infty$. Из непрерывности нормы следует, что

$$\lim_{n\to\infty} \|x_0 - y_n\| = \|x_0 - y_0\|.$$

Теорема 2 доказана.

5.7. Общий вид линейного функционала

Пусть E — евклидово пространство (действительное или комплексное).

Лемма 1. *Для любого заданного элемента $a \in E$ функционал*

$$f(x) = (x,a), \quad x \in E, \tag{1}$$

является линейным и ограниченным, причём

$$\|f\| = \|a\|.$$

Доказательство. Линейность очевидна. Ограниченность следует из неравенства

$$|f(x)| \leqslant \|a\| \cdot \|x\| \quad \forall\, x \in E.$$

А так как $f(a) = \|a\|^2$, то $\|f\| = \|a\|$.

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Если функционал f имеет представление вида* (1), *то элемент a определён однозначно.*

Действительно, пусть

$$f(x) = (x,a) \quad \text{и} \quad f(x) = (x,b) \quad \forall\, x \in E,$$

тогда $(x,a-b) = 0 \quad \forall\, x \in E$, и, в частности, $(a-b,a-b) = 0$, поэтому $a = b$.

Теорема. *Любой линейный непрерывный функционал f в гильбертовом пространстве H имеет представление вида* (1).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через L ядро функционала f, т.е. множество всех $x \in H$ таких, что $f(x) = 0$. Легко видеть, что L является линейным пространством. Из непрерывности функционала f следует, что множество L замкнуто. Действительно, если $x_n \in L$ и $x_n \to x$ при $n \to \infty$, то

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0.$$

А так как пространство H полное, то пространство L тоже полное.

Если $L = H$, т.е. $f(x) = 0 \quad \forall\, x \in H$, то, очевидно,

$$f(x) = (0,x) \quad \forall\, x \in H.$$

Пусть $L \neq H$, т.е. существует элемент $x_0 \in H$ такой, что $f(x_0) \neq 0$. Через y_0 обозначим ортогональную проекцию элемента x_0 в подпространство L и положим

$$z_0 = x_0 - y_0.$$

Тогда $f(z_0) = f(x_0) \neq 0$ и $(z_0,y) = 0\; \forall\, y \in L$.

Так как

$$f\left(x - \frac{f(x)}{f(z_0)} z_0\right) = 0 \quad \forall\, x \in H,$$

то

$$\forall\, x \in H \quad x - \frac{f(x)}{f(z_0)} z_0 \in L,$$

и поэтому
$$\left(x - \frac{f(x)}{f(z_0)} z_0, z_0\right) = 0 \quad \forall\, x \in H.$$

Следовательно,
$$(x, z_0) = f(x) \frac{\|z_0\|^2}{f(z_0)}\,. \tag{2}$$

Заметим, что так как $f(z_0) \neq 0$, то $\|z_0\| \neq 0$, и поэтому из (2) получаем
$$f(x) = (x, a),$$
где $a = \dfrac{\overline{f(z_0)}}{\|z_0\|^2}\, z_0$.

Теорема доказана.

Отображения любого линейного нормированного пространства над полем действительных (или комплексных) чисел в множество действительных (соответственно комплексных) чисел обычно называются *функционалами.* Множество всех линейных непрерывных функционалов, определённых на линейном нормированном пространстве X, с естественными операциями сложения двух функционалов и умножения функционала на число является линейным пространством, которое обозначается X^* и называется *сопряжнным к X пространством.*

Из доказанных выше утверждений следует, что *любое гильбертово пространство H и сопряжное пространство H^* изоморфны.*

§ 6. Обобщённые функции

6.1. Введение

В пункте 5.1 главы 15 на эвристическом уровне было показано, что для полной характеристики аппарата, которому соответствует инвариантный относительно сдвигов линейный оператор A, достаточно знать отклик $E(t)$ этого аппарата на так называемое единичное импульсное воздействие $\delta(t)$ в момент времени $t = 0$. А именно, было показано, что отклик линейного оператора A на входное воздействие $f(t)$ равен свёртке функций $f(t)$ и $E(t)$:

$$Af = \int_{\mathbb{R}} f(\tau)E(t-\tau)\,d\tau.$$

Напомним, что при выводе этой формулы единичный импульс $\delta(t)$ понимался как предел единичных импульсов длительности h:

$$\delta_h(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t < 0, \\ 1/h, & \text{если } 0 \leqslant t < h, \\ 0, & \text{если } t \geqslant h, \end{cases}$$

при $h \to 0$, и считалось, что отклик $E(t)$ оператора A на импульс $\delta(t)$ равен пределу откликов $E_h(t)$ на единичные импульсы $\delta_h(t)$ при $h \to 0$. А так как единичный импульс $\delta(t)$ не может быть обычной функцией точки, то необходимо придать точный математический смысл предельным переходам: $\delta_h(t) \to \delta(t)$ и $E_h(t) \to E(t)$ при $h \to 0$, да и самому понятию «единичный импульс $\delta(t)$».

Один из подходов к решению этих вопросов состоит в принципиальном расширении представления о функциях. Он исходит из того, что в природе объекты наблюдения обычно характеризуются их взаимодействием с другими объектами, причём для этого достаточно некоторого набора так называемых «пробных» объектов или приборов. Так и функцию можно характеризовать не значениями в отдельных точках, а как некоторый объект, который определённым образом действует на заданное семейство «пробных» функций.

Например, каждая непрерывная на $\mathbb{R}$ функция $f(x)$ на множестве $\overset{\circ}{C}$ финитных непрерывных на $\mathbb{R}$ функций $\varphi(x)$ порождает линейный функционал, который каждой функции $\varphi \in \overset{\circ}{C}$ ставит в соответствие число

$$(f,\varphi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)\,dx. \tag{1}$$

Легко видеть, что если непрерывные функции f и g порождают равные функционалы, т.е. если

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} g(x)\varphi(x)\,dx \quad \forall\varphi \in \overset{\circ}{C},$$

то $f(x) = g(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

Значение функционала (1) можно трактовать как меру взаимодействия функции f и «пробной» функции φ. А так как значения этого взаимодействия однозначно определяют функцию f, то вместо того, чтобы задавать значения f в каждой точке $x \in \mathbb{R}$, можно задавать значения функционала (1) на «пробных» функциях φ.

На множестве функций $\varphi \in \overset{\circ}{C}$, кроме функционалов вида (1), есть и другие линейные функционалы. Например, таким является функционал, обозначаемый δ, который каждой функции $\varphi \in \overset{\circ}{C}$ ставит в соответствие число $\varphi(0)$, т.е. задаётся равенством

$$(\delta,\varphi) = \varphi(0), \quad \varphi \in \overset{\circ}{C}. \tag{2}$$

Ниже будет показано, что этот функционал не может быть задан формулой вида (1) и в этом смысле не порождается никакой непрерывной (и даже локально интегрируемой) на $\mathbb{R}$ функцией.

Формула (2) определяет так называемую δ-функцию, которую впервые ввёл в науку в конце 20-х годов П. Дирак как функцию, обладающую следующими свойствами:

$$\delta(x) = 0 \quad \forall x \neq 0, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\varphi(x)\,dx = \varphi(0) \quad \forall\varphi \in C.$$

Сразу же было показано, что с математической точки зрения это определение некорректное. Конечно, и сам П. Дирак понимал, что δ-функция не является функцией в классическом смысле и что она действует как некоторый оператор. Однако потребовались усилия многих математиков, чтобы найти корректное определение δ-функции и её производных и затем построить теорию *обобщнных функций* как линейных непрерывных функционалов на некотором множестве достаточно «хороших» так называемых «основных функций».

6.2. Пространство D

Рассмотрим множество $\overset{\circ}{C}{}^{\infty}$ финитных бесконечно дифференцируемых функций, заданных на $\mathbb{R}$ и принимающих комплексные значения. Это множество с естественными операциями сложения двух функций и умножения функции на число является линейным пространством. В этом пространстве введём понятие сходимости.

Определение 1. Последовательность функций $\varphi_k(x) \in \overset{\circ}{C}{}^{\infty}$, $k \in \mathbb{N}$, называется *сходящейся к функции* $\varphi(x) \in$ $\in \overset{\circ}{C}{}^{\infty}$, если

$$1)\ \exists [a; b] : \quad \operatorname{supp} \varphi_k \subset [a; b] \quad \forall k;$$

$$2)\ \lim_{k\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \varphi_k^{(l)}(x) - \varphi^{(l)}(x) \right| = 0 \quad \forall l = 0,1,2,\ldots.$$

Последовательность функций из $\overset{\circ}{C}{}^{\infty}$ называется *сходящейся*, если существует функция из $\overset{\circ}{C}{}^{\infty}$, к которой она сходится.

Определение 2. Линейное пространство $\overset{\circ}{C}{}^{\infty}$ с введённым понятием сходимости называется *пространством D основных функций.*

Если последовательность функций $\varphi_k \in \overset{\circ}{C}{}^{\infty}$ сходится к функции $\varphi \in \overset{\circ}{C}{}^{\infty}$ в смысле определения 1, то будем говорить, что *последовательность $\{\varphi_k\}$ сходится в D к функции φ*, и писать:

$$\varphi_k \to \varphi \quad \text{в } D \text{ при } k \to \infty.$$

Очевидно, если $\operatorname{supp} \varphi_k \subset [a; b]$ $\forall k$ и $\varphi_k \to \varphi$ при $k \to \infty$, то и $\operatorname{supp} \varphi \subset [a; b]$.

Легко видеть, что *пространство D является полным от-*

носительно введнной сходимости. Точнее, имеет место следующее утверждение.

Лемма 1. *Пусть* $\{\varphi_k\}$ *— последовательность функций из* $\overset{\circ}{C}{}^{\infty}$*. Тогда если*

1) $\exists [a;b]: \quad \operatorname{supp} \varphi_k \subset [a;b] \quad \forall\, k$;

2) для любого $l = 0{,}1{,}2,\ldots$ *последовательность* $\{\varphi_k^{(l)}\}$ *фундаментальна по норме* $C(\mathbb{R})$,

то существует функция $\varphi \in \overset{\circ}{C}{}^{\infty}$ *такая, что*

$$\varphi_k \to \varphi \quad \text{в } D \text{ при } k \to \infty.$$

Доказательство. Действительно, пусть фундаментальные последовательности $\{\varphi_k\}$ и $\{\varphi_k'\}$ по норме $C(\mathbb{R})$ сходятся к некоторым функциям φ и ψ. Тогда из равенства

$$\varphi_k(x) = \varphi_k(0) + \int_0^x \varphi_k'(t)\,dt$$

в пределе при $k \to \infty$ получаем равенство

$$\varphi(x) = \varphi(0) + \int_0^x \psi(t)\,dt,$$

из которого следует, что функция $\varphi(x)$ дифференцируема и $\varphi'(x) = \psi(x)$. Аналогично доказывается, что функция $\varphi'(x)$ тоже дифференцируема и $\varphi''(x) = \lim\limits_{k\to\infty} \varphi_k''(x)$. Поступая так и далее, получаем, что $\varphi(x)$ бесконечно дифференцируема и $\varphi_k \to \varphi$ в D при $k \to \infty$.

Очевидно, линейные операции в $\overset{\circ}{C}{}^{\infty}$ непрерывны относительно введённой сходимости, т.е. если $\varphi_k \to \varphi$ и $\psi_k \to \psi$ в D при $k \to \infty$, то

$$\alpha\varphi_k + \beta\psi_k \to \alpha\varphi + \beta\psi \text{ в } D \text{ при } k \to \infty$$

для любых чисел α и β. Кроме того, если $\lambda(x)$ — бесконечно дифференцируемая на $\mathbb{R}$ функция, то

$$\lambda\varphi_k \to \lambda\varphi \text{ в } D \text{ при } k \to \infty.$$

Пример 1. Легко показать, что для любого $a > 0$ функция

$$\varphi(x) = \begin{cases} \exp \dfrac{x^2}{x^2 - a^2}\ , & \text{если } |x| < a, \\ 0, & \text{если } |x| \geqslant a, \end{cases}$$

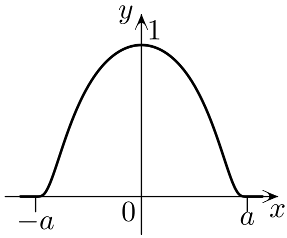

Рис. 2

график которой имеет вид «шапочки» (рис. 2), является финитной и бесконечно дифференцируемой. Последовательность

$$\varphi_k(x) = \frac{1}{k}\varphi(x; a), \quad k \in \mathbb{N},$$

сходится к нулю в пространстве D. Последовательность

$$\psi_k(x) = \frac{1}{k}\varphi\left(\frac{x}{k}; a\right), \quad k \in \mathbb{N},$$

тоже сходится к нулю равномерно на $\mathbb{R}$ вместе со всеми своими производными, т.е. удовлетворяет условию 2) из определения 1, однако не сходится к нулю в пространстве D, так как она не удовлетворяет условию 1): не существует отрезка $[a; b]$, вне которого все функции $\psi_k(x)$ равны нулю.

6.3. Обобщённые функции

На пространстве D основных функций рассмотрим линейные непрерывные функционалы. Значение функционала f на функции $\varphi \in D$ будем обозначать (f,φ).

Напомним, функционал f, определённый на D, называется *линейным*, если

$$(f, \alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha(f,\varphi) + \beta(f,\psi)$$

для любых чисел α, β и любых φ и ψ из D.

Линейный функционал f называется *непрерывным*, если он удовлетворяет условию: если $\varphi_k \to 0$ в D, то $(f,\varphi_k) \to 0$ при $k \to \infty$.

Определение 1. Любой линейный непрерывный функционал на D называется *обобщнной функцией*.

В множестве обобщённых функций на D естественным образом вводятся операции сложения двух функций и умножения функции на число. Именно, для любых двух функций f и g и любых чисел α и β через $\alpha f+\beta g$ обозначается функционал, который на любую функцию $\varphi \in D$ действует по формуле

$$(\alpha f+\beta g,\varphi)=\alpha(f,\varphi)+\beta(g,\varphi).$$

Легко видеть, что так определённый функционал $\alpha f+$ $+\beta g$ будет линейным и непрерывным, т.е. будет обобщённой функцией на D. (Докажите это утверждение в качестве упражнения.)

Таким образом, *множество обобщнных функций на D с естественными операциями сложения двух функций и умножения функции на число является линейным пространством.* Это линейное пространство будем обозначать D'. Оно является пространством, сопряжённым к пространству D.

Лемма 1. *Для любой локально интегрируемой на $\mathbb{R}$ функции f функционал*

$$(f,\varphi)=\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)\,dx, \quad \varphi \in D, \tag{1}$$

является обобщённой функцией.

Доказательство. Линейность функционала (1) очевидна, докажем его непрерывность.

Пусть $\varphi_k \to 0$ при $k\to\infty$, и пусть $\operatorname{supp}\varphi_k \subset [a;b]\ \forall k$. Тогда

$$|(f,\varphi_k)| \leqslant \int_a^b |f(x)|\cdot|\varphi_k(x)|\,dx \leqslant$$
$$\leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx\cdot\sup_x|\varphi_k(x)| \to 0$$

при $k\to 0$.

Лемма 1 доказана.

Определение 2. Обобщённая функция называется *регулярной*, если она имеет представление вида (1) с некоторой локально интегрируемой функцией f. В противном случае обобщённая функция называется *сингулярной*.

Лемма 2. *Функционал δ, определённый формулой*

$$(\delta,\varphi) = \varphi(0), \quad \varphi \in D, \tag{2}$$

является сингулярной обобщённой функцией.

Доказательство. Линейность и непрерывность функционала (2) очевидна. Докажем, что он не может быть представлен в виде (1).

Допустим, что существует локально интегрируемая функция f такая, что

$$(\delta,\varphi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)\,dx.$$

Вместо $\varphi(x)$ подставим функцию $\varphi(x;a)$, рассмотренную в предыдущем пункте. Тогда

$$\left|\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x;a)\,dx\right| = \left|\int_{-a}^{a} f(x)e^{\frac{x^2}{x^2-a^2}}\,dx\right| \leqslant \int_{-a}^{a} |f(x)|\,dx \to 0$$

при $a \to +0$. С другой стороны, согласно формуле (2),

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x;a)\,dx = \varphi(0;a) = 1.$$

Следовательно, наше допущение неверное.

Лемма 2 доказана.

Определение 3. Обобщённая функция, определяемая формулой (2), называется *δ-функцией*.

Очевидно, если непрерывные функции f и g на $\mathbb{R}$ равны, то соответствующие регулярные обобщённые функции тоже равны. Справедливо и обратное утверждение: если регулярные обобщённые функции, порождённые непрерывными функциями f и g, равны, то $f(x) = g(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

Действительно, если существует точка x_0, в которой, например, $f(x_0) < g(x_0)$, то, в силу непрерывности функций f и g в точке x_0, существует $\delta > 0$ такое, что

$$f(x) < g(x) \quad \forall x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta).$$

Тогда если $\psi(x) = \varphi(x - x_0; \delta)$, где $\varphi(x; \delta)$ — функция «шапочка», рассмотренная в предыдущем пункте, то

$$(f,\psi) = \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)\varphi(x - x_0; \delta)\, dx <$$

$$< \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} g(x)\varphi(x - x_0; \delta)\, dx = (g,\psi),$$

и поэтому регулярные обобщённые функции, порождаемые функциями f и g, являются разными.

Аналогично доказывается, что если регулярные обобщённые функции, порождённые локально интегрируемыми функциями f и g равны, то $f(x) = g(x)$ в любой точке $x \in \mathbb{R}$, где функции f и g непрерывны.

По аналогии с обычными функциями, обобщённую функцию f, которая действует на основные функции от переменной x, удобно обозначать $f(x)$. Например, δ-функцию, определённую по формуле (2), обозначают $\delta(x)$, а обобщённую функцию, которая каждой функции $\varphi(x) \in D$ ставит в соответствие её значение в точке x_0 обозначают $\delta(x - x_0)$ и пишут

$$(\delta(x - x_0),\varphi(x)) = \varphi(x_0). \tag{3}$$

Функция $\delta(x - x_0)$ называется *смещнной δ-функцией.*

Обычно регулярную обобщённую функцию отождествляют с функцией, которая её порождает. Например, говорят об обобщённых функциях $f(x) = x^2$, $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $f(x) = \sin x$, $f(x) = |x|$, $f(x) = \operatorname{sgn} x$ и т.д. В этом смысле множество обычных функций можно рассматривать как часть множества обобщённых функций.

Если функция $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, локально интегрируема и $x = ay + b$, $a \neq 0$, то для любой $\varphi \in D$ справедливо равенство

$$\int_{\mathbb{R}} f(ay+b)\varphi(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}} f(x) \cdot \varphi\left(\frac{x-b}{a}\right)\frac{1}{a}\,dx,$$

т.е.

$$(f(ay+b),\varphi(y)) = \left(f(x),\frac{1}{a}\varphi\left(\frac{x-b}{a}\right)\right). \qquad (4)$$

Для любой обобщённой функции $f(x)$ из D' равенство (4) примем за определение функции $f(ay+b)$, где $a \neq 0$. Согласно этому определению,

$$(\delta(x-x_0),\varphi(x)) = (\delta(x),\varphi(x+x_0)) = \varphi(x_0),$$

что не противоречит определению (3).

6.4. Умножение обобщённых функций

Для обобщённых функций на D, кроме линейных операций, можно определить операцию умножения на бесконечно дифференцируемую функцию. Именно, для любой обобщённой функции $f(x)$ и любой бесконечно дифференцируемой функции $\psi(x)$ произведение $\psi(x)f(x)$ определим как функционал на D, заданный равенством

$$(\psi f,\varphi) = (f,\psi\varphi) \quad \forall \varphi \in D. \qquad (1)$$

Очевидно, что так определённый функционал ψf является линейным и непрерывным на D.

Пример 1.

$$(1+x)\delta(x) = \delta(x). \qquad (2)$$

Действительно, для любой функции $\varphi \in D$

$$((1+x)\delta(x),\varphi(x)) = (\delta(x),(1+x)\varphi(x)) = \varphi(0) = (\delta(x),\varphi(x)),$$

что и доказывает равенство (2).

Аналогично, из определения (1) следует, что

$$\psi(x)\delta(x) = \psi(0)\delta(x)$$

для любой бесконечно дифференцируемой на $\mathbb{R}$ функции $\psi(x)$.

Возникает вопрос: нельзя ли определить умножение любых обобщённых функций? Оно должно быть ассоциативным, коммутативным и совпадать с определённым выше умножением на бесконечно дифференцируемую функцию. Известно, что такое умножение определить нельзя. Чтобы это показать, рассмотрим ещё одну важную обобщённую функцию, обозначаемую $\mathcal{P}\,\dfrac{1}{x}$ и называемую *конечной частью* или *главным значением интеграла от функции* $\dfrac{1}{x}$.

Пример 2. Через $\mathcal{P}\,\dfrac{1}{x}$ обозначим функционал, который на $\varphi \in D$ действует по формуле

$$\left(\mathcal{P}\frac{1}{x}\,,\varphi(x)\right) = \int_0^{+\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x}\,dx.$$

Этот функционал принимает конечное значение на любой $\varphi \in D$. Его линейность очевидна. Для доказательства его непрерывности заметим, что

$$\int_0^{+\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x}\,dx = -\int_0^{+\infty} (\varphi'(x) + \varphi'(-x))\ln x\,dx,$$

и поэтому

$$\left(\mathcal{P}\frac{1}{x}\,,\varphi(x)\right) = -\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi'(x)\ln|x|\,dx.$$

Пусть $\varphi_k \to \varphi$ в D при $k \to \infty$. Тогда, согласно определению сходимости в D, существует отрезок $[a;b]$ такой, что вне $[a;b]$ функции $\psi_k = \varphi_k - \varphi$ равны нулю. Следовательно,

$$\left(\mathcal{P}\frac{1}{x}\,,\psi_k\right) = \int_a^b \psi_k'(x)\ln|x|\,dx,$$

$$\left|\left(\mathcal{P}\frac{1}{x}\,,\psi_k\right)\right| \leqslant \sup_{x\in\mathbb{R}} |\psi_k'(x)| \cdot \int_a^b \Bigl|\ln|x|\Bigr|\,dx \to 0$$

при $k \to \infty$.

Пример 3.

$$x\mathcal{P}\frac{1}{x} = 1. \tag{3}$$

Действительно, для любой функции $\varphi \in D$

$$\left(x\mathcal{P}\frac{1}{x}\,,\varphi(x)\right) = \left(\mathcal{P}\frac{1}{x}\,,x\varphi(x)\right) =$$

$$= \int_0^{+\infty} (\varphi(x) + \varphi(-x))\,dx, = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,dx = (1,\varphi),$$

что и доказывает равенство (3).

Вернёмся к вопросу об определении произведения обобщённых функций. Из равенств

$$\Big(x\delta(x)\Big)\mathcal{P}\frac{1}{x} = 0 \cdot \mathcal{P}\frac{1}{x} = 0,$$

$$\delta(x)\left(x\mathcal{P}\frac{1}{x}\right) = \delta(x) \cdot 1 = \delta(x)$$

следует, что для функций x, $\delta(x)$ и $\mathcal{P}\,\dfrac{1}{x}$ нельзя определить произведение, обладающее свойствами ассоциативности и коммутативности.

6.5. Носитель обобщённой функции

Для обобщённой функции нет смысла говорить о её значении в точке. Однако довольно естественными являются следующие определения.

Определение 1. Обобщённые функции f и g называются *равными на открытом множестве* $G \subset \mathbb{R}$, если $(f,\varphi) = (g,\varphi)$ для любой функции $\varphi \in D$, носитель которой содержится в G.

В этом случае пишут $f = g$ на G. В частности, $f = 0$ на G, если $(f,\varphi) = 0$ для любой функции $\varphi \in D$, $\operatorname{supp}\varphi \subset G$.

Очевидно, что δ-функция равна нулю на любом открытом множестве, не содержащем точку $x = 0$.

Определение 2. Объединение всех открытых множеств, на которых обобщённая функция f равна нулю, называется *нулевым множеством функции* f, а его дополнение до $\mathbb{R}$ называется *носителем функции* f и обозначается $\operatorname{supp} f$.

Нулевое множество любой обобщённой функции является открытым (в частности, оно может быть пустым), а носитель является замкнутым множеством. Например, нулевое множество δ-функции — это объединение интервалов $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$, а носитель δ-функции состоит из одной точки $x = 0$.

Очевидно, что если регулярная обобщённая функция порождается непрерывной на $\mathbb{R}$ функцией f, то её носитель совпадает с носителем функции f.

Как и для обычных функций, обобщённая функция называется *финитной*, если она имеет ограниченный носитель. Следовательно, δ-функция является финитной.

6.6. Пространство D' обобщённых функций

В линейном пространстве D' обобщённых функций на D введём так называемую *поточечную сходимость*.

Определение 1. Говорят, что последовательность обобщённых функций f_n, $n \in \mathbb{N}$, *сходится к обобщнной функции* f, если

$$\lim_{n\to\infty} (f_n,\varphi) = (f,\varphi) \quad \forall \varphi \in D.$$

Последовательность обобщённых функций называется *сходящейся*, если существует обобщённая функция, к которой эта последовательность сходится.

Введённая сходимость называется ещё *слабой сходимостью*.

Определение 2. Линейное пространство линейных непрерывных функционалов на D, в котором введена слабая (поточечная) сходимость, называется *пространством, сопряжнным к пространству* D, и обозначается D'.

Пространство D' называют ещё *пространством обобщнных функций*. При этом если последовательность $\{f_n\}$ сходится к f в смысле определения 1, то говорят, что f_n сходится к f в D' и пишут

$$f_n \to f \text{ в } D' \text{ при } n \to \infty.$$

Пример 1. Докажем, что последовательность функций

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0; \\ n, & \text{если } 0 \leqslant x < \dfrac{1}{n}; \\ 0, & \text{если } x \geqslant \dfrac{1}{n}, \end{cases} \tag{1}$$

в D' сходится к δ-функции.

Каждая функция $f_n(x)$ является локально интегрируемой на $\mathbb{R}$ и на D по формуле

$$(f_n,\varphi) = \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\varphi(x)\,dx, \quad \varphi \in D,$$

порождает регулярную обобщённую функцию. Утверждение будет доказано, если мы покажем, что $(f_n,\varphi) \to \varphi(0)$ при $n \to \infty$ для любой функции $\varphi \in D$. А это следует из того, что

$$(f_n,\varphi) = \int_0^{1/n} n\varphi(x)\,dx = \varphi(0) + n\int_0^{1/n} (\varphi(x) - \varphi(0))\,dx,$$

где последнее слагаемое стремится к нулю при $n \to \infty$, так как

$$n\int_0^{1/n} |\varphi(x) - \varphi(0)|\,dx \leqslant \max_x |\varphi'(x)| n \int_0^{1/n} x\,dx = \\ = \frac{1}{2n}\max_x |\varphi'(x)| \to 0$$

при $n \to \infty$.

Таким образом, $f_n(x) \to \delta(x)$ в D' при $n \to \infty$.

Пример 2. Заметим, что последовательность функций (1) является простейшим примером так называемой *δ-образной последовательности.* Напомним, что последовательность неотрицательных функций $\psi_n(x)$, $x \in \mathbb{R}$, называется *δ-образной*, если

1) $\int_{\mathbb{R}} \psi_n(x)\,dx = 1 \quad \forall\, n$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{-h}^{h} \psi_n(x)\,dx = 1 \quad \forall\, h > 0$.

Докажем, что любая δ-образная последовательность функций $\psi_n(x)$ в D' при $n \to \infty$ сходится к $\delta(x)$.

Пусть $\varphi(x) \in D$. Нужно доказать, что

$$(\psi_n,\varphi) = \int_{\mathbb{R}} \psi_n(x)\varphi(x)\,dx \to \varphi(0)$$

при $n \to \infty$. Положим

$$M = \sup_x |\varphi(x)|, \quad M_1 = \sup_x |\varphi'(x)|.$$

Тогда

$$|(\psi_n,\varphi) - \varphi(0)| = \left| \int_{\mathbb{R}} \psi_n(x)(\varphi(x) - \varphi(0))\,dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant 2M \int_{-\infty}^{-h} \psi_n(x)\,dx + 2M_1 h \int_{-h}^{h} \psi_n(x)\,dx + 2M \int_{h}^{+\infty} \psi_n(x)\,dx$$

для любого $h > 0$. Из свойств функций $\psi_n(x)$ следует, что при $n \to \infty$ 1-е и 3-е слагаемое стремятся к нулю, а 2-е — к $2M_1 h$. Поэтому

$$\varlimsup_{n\to\infty} \left| \int_{\mathbb{R}} \psi_n(x)(\varphi(x) - \varphi(0))\,dx \right| \leqslant 2M_1 h$$

для любого $h > 0$, что и доказывает, что

$$\psi_n(x) \to \delta(x) \text{ в } D' \text{ при } n \to \infty.$$

Пространство D' обобщённых функций оказывается полным. Точнее, имеет место следующее утверждение.

Теорема. *Пусть последовательность обобщённых функций f_n, $n \in \mathbb{N}$, такова, что для каждой функции $\varphi \in D$ числовая последовательность (f_n,φ), $n \in \mathbb{N}$, сходится. Тогда функционал f, определяемый на D равенством*

$$(f,\varphi) = \lim_{n\to\infty} (f_n,\varphi),$$

является линейным и непрерывным на D, т.е. $f \in D'$.

Доказательство этой теоремы можно найти, например, в книге В.С. Владимирова «Обобщённые функции в математической физике».

Предельный переход в D' можно использовать для построения новых обобщённых функций.

Пример 3. Рассмотрим последовательность функций

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}\,, & \text{если } |x| > \dfrac{1}{n}, \\ 0, & \text{если } |x| \leqslant \dfrac{1}{n}. \end{cases}$$

Каждая функция $f_n(x)$ порождает обобщённую функцию:

$$(f_n,\varphi) = \int_{-\infty}^{1/n} \frac{1}{x}\varphi(x)\,dx + \int_{-1/n}^{+\infty} \frac{1}{x}\varphi(x)\,dx = $$
$$= \int_{1/n}^{+\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x}\,dx, \quad \varphi \in D,$$

где под интегралом стоит ограниченная функция. Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty}(f_n,\varphi) = \int_0^{+\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x}\,dx \quad \forall\varphi \in D.$$

А так как

$$\int_0^{+\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x}\,dx = \left(\mathcal{P}\frac{1}{x}\,,\varphi\right),$$

то

$$\lim_{n\to\infty}(f_n,\varphi) = \left(\mathcal{P}\frac{1}{x}\,,\varphi\right) \quad \forall\varphi \in D.$$

Таким образом,

$$f_n(x) \to \mathcal{P}\frac{1}{x}\,,\varphi \text{ в } D' \text{ при } n \to \infty.$$

Заметим, что $f_n(x) \to \dfrac{1}{x}$ при $n \to \infty$ для любого $x \neq 0$. Поэтому иногда говорят, что последовательность функций $f_n(x)$

в D' сходится к функции $f(x) = \dfrac{1}{x}$, и пишут

$$f_n(x) \to \frac{1}{x} \text{ в } D' \text{ при } n \to \infty.$$

Обобщённую функцию $\mathcal{P}\,\dfrac{1}{x}$ тоже иногда обозначают просто $\dfrac{1}{x}$.

6.7. Дифференцирование обобщённых функций

Хорошо известно, что если функция f определена и непрерывно дифференцируема на $\mathbb{R}$, то

$$(f',\varphi) = \int_{\mathbb{R}} f'(x)\varphi(x)\,dx = -\int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi'(x)\,dx = -(f,\varphi')$$

для любой функции $\varphi \in D$.

Легко видеть, что для любой обобщённой функции $f \in D'$ функционал f', определённый равенством

$$(f',\varphi) = -(f,\varphi') \quad \forall \varphi \in D, \tag{1}$$

является линейным и непрерывным на D, т.е. формула (1) определяет обобщённую функцию f'.

Определение 1. Для любой обобщённой функции f обобщённая функция f', определённая равенством (1), называется *производной функции* f.

Производная f' называется *производной первого порядка.* Производная n-го порядка $f^{(n)}$ определяется равенством:

$$(f^{(n)},\varphi) = (-1)^n (f,\varphi^{(n)}), \quad \varphi \in D.$$

Таким образом, *обобщнные функции имеют производные любого порядка.*

Справедливы следующие свойства операции дифференцирования обобщённых функций.

1. *Операция дифференцирования линейна*, т.е. для любых обобщённых функций f и g и любых чисел α и β

$$(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'. \tag{2}$$

Действительно, для любой функции $\varphi \in D$

$$((\alpha f + \beta g)',\varphi) = -(\alpha f + \beta g,\varphi') = -\alpha(\beta,\varphi') - \beta(g,\varphi') = \\ = \alpha(f',\varphi) + \beta(g',\varphi) = (\alpha f' + \beta g',\varphi),$$

что и доказывает равенство (2).

2. *Операция дифференцирования является непрерывным оператором*, т.е. если $f_k \to f$ в D', то и $f_k' \to f'$ в D' при $k \to \infty$.

   Действительно, для любой функции $\varphi \in D$

$$(f_k',\varphi) = -(f_k,\varphi') \to -(f,\varphi') = (f',\varphi)$$

   при $k \to \infty$, что и доказывает наше утверждение.

3. *Если $f \in D'$, а $\psi \in C^\infty$, то*

$$(\psi f)' = \psi' f + \psi f'. \tag{3}$$

   Действительно, для любой функции $\varphi \in D$

$$((\psi f)',\varphi) = -(\psi f,\varphi') = -(f,\psi\varphi') = \\ = -(f,(\psi\varphi)' - \psi'\varphi) = -(f,(\psi\varphi)') + (f,\psi'\varphi) = \\ = (f',\psi\varphi) + (\psi' f,\varphi) = (\psi f' + \psi' f,\varphi),$$

   что и доказывает равенство (3).

Рассмотрим несколько примеров на дифференцирование обобщённых функций.

Пример 1. Найдём производную *функции Хевисайда*

$$\theta(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0, \\ 1, & \text{если } x \geqslant 0. \end{cases}$$

Согласно определению производной,

$$(\theta',\varphi) = -(\theta,\varphi'), \quad \varphi \in D.$$

А так как функция $\theta(x)$ локально интегрируема, то

$$(\theta,\varphi') = \int_0^{+\infty} \varphi'(x)\,dx = -\varphi(0).$$

Следовательно, $(\theta',\varphi) = \varphi(0)$, и поэтому
$$\theta'(x) = \delta(x).$$

Пример 2. Найдём производную функции $f(x) = x\theta(x)$.

Дифференцируя f как произведение, находим:
$$(x\theta(x)) = \theta(x) + x\theta'(x).$$
А так как $\theta'(x) = \delta(x)$ и $x\delta(x) = 0$, то
$$(x\theta(x)) = \theta(x).$$

Пример 3. $x\delta'(x) = -\delta(x)$.

Действительно,
$$x\delta'(x) + \delta(x) = (x\delta(x))' = 0,$$
так как $x\delta(x) = 0$.

Пример 4. Функция $y = \theta(x)e^{-\lambda x}$ удовлетворяет уравнению $y' + \lambda y = \delta(x)$.

Действительно,
$$y' = e^{-\lambda x}\delta(x) - \lambda\theta(x)e^{-\lambda x} = \delta(x) - \lambda y.$$

§ 7. Преобразование Фурье обобщённых функций

7.1. Пространство S основных функций и пространство S' обобщённых функций

Линейное пространство S было введено в главе 15 в п. 4.6. Напомним, что элементами этого пространства являются бесконечно дифференцируемые на $\mathbb{R}$ комплекснозначные функции, каждая из которых удовлетворяет условию: как она сама, так и её производные любого порядка при $x \to \pm\infty$ стремятся к нулю быстрее любой степени $1/x$. Такие функции называются *быстро убывающими.*

Очевидно, любая бесконечно дифференцируемая финитная функция является элементом пространства S, т.е. $D \subset S$. Однако $S \neq D$. Например, функция $\varphi(x) = \exp(-x^2)$ принадлежит S, но не принадлежит D.

Введём в S понятие сходимости.

Определение 1. Последовательность функций $\varphi(x) \in S$ называется *сходящейся в S к функции* $\varphi(x) \in S$, если для любых целых неотрицательных k и m выполняется условие:

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} |x^m(\varphi_n^{(k)}(x) - \varphi^{(k)}(x))| = 0,$$

т.е. для любых k и m $x^m\varphi_n^{(k)}(x)$ при $n \to \infty$ сходится к $x^m\varphi^{(k)}(x)$ равномерно по x на $\mathbb{R}$.

Последовательность функций из S называется *сходящейся в S*, если она в S сходится к некоторой функции из S.

Очевидно, если последовательность функций $\varphi_n(x) \in D$ в D сходится к функции $\varphi(x)$, то $\varphi_n(x) \to \varphi(x)$ и в S.

Определение 2. Линейное пространство S с введённой сходимостью называется *пространством S основных функций.*

Легко видеть, что множество S' всех линейных непрерывных функционалов на S является линейным пространством относительно естественных операций сложения двух функционалов и умножения функционала на число. Как обычно, в S' вводится *поточечная* (или *слабая*) *сходимость*. Именно, говорят, что $f_n \to f$ в S' при $n \to \infty$, если

$$\lim_{n\to\infty} (f_n,\varphi) = (f,\varphi) \quad \forall\varphi \in S.$$

Определение 3. Линейное пространство S' линейных непрерывных функционалов на S называется *пространством S' обобщнных функций.*

В S' аналогом регулярных обобщённых функций являются функции, которые задаются формулами вида

$$(f,\varphi) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)\,dx, \quad \varphi \in S, \tag{1}$$

где $f(x)$ — локально интегрируемая функция, удовлетворяющая условию:

$$\exists k: \quad f(x) = O(x^k) \text{ при } x \to \pm\infty. \tag{2}$$

Любая такая функция называется *функцией медленного роста*, поэтому обобщённые функции из S' тоже называют *обобщнными функциями медленного роста.*

Лемма. *Любая функция $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, медленного роста по формуле* (1) *порождает обобщённую функцию из S'.*

Доказательство. Для любой функции $\varphi \in S$ интеграл (1) сходится, так как при $x \to \pm\infty$ функция $f(x)$ может возрастать лишь как некоторая степень x, а любая функция $\varphi \in S$ убывает быстрее любой степени $1/x$. Линейность функционала (1) очевидна, докажем его непрерывность. Для этого достаточно показать, что он непрерывен в нуле.

Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет условию (2), и пусть $\varphi_n(x) \to 0$ в S при $n \to \infty$. Положим

$$\|\varphi_n\|_{k+2} = \sup_x (1 + |x|^{k+2})|\varphi_n(x)|.$$

Тогда $\|\varphi_n\|_{k+2} \to 0$ при $n \to \infty$, и

$$J_{k+2}(f) = \int_{\mathbb{R}} \frac{|f(x)|}{1 + |x|^{k+2}}\, dx < +\infty.$$

А так как

$$|(f,\varphi_n)| \leqslant \|\varphi_n\|_{k+2} J_{k+2}(f),$$

то $(f,\varphi_n) \to 0$ при $n \to \infty$.

Лемма доказана.

В S', кроме функционалов, порождаемых функциями медленного роста, есть и другие линейные непрерывные функционалы. Например, легко видеть, что любая абсолютно интегрируемая на $\mathbb{R}$ функция $f(x)$ по формуле порождает обобщённую функцию из S'. Функцией из S' будет и δ-функция:

$$(\delta,\varphi) = \varphi(0), \quad \varphi \in S.$$

Для обобщённых функций медленного роста можно определить операцию умножения на многочлен.

Для любой функции $f \in S'$ и любого многочлена $p(x)$ произведение pf определим как функционал, заданный равенством

$$(pf,\varphi) = (f,p\varphi) \quad \forall \varphi \in S.$$

Очевидно, что так определённый функционал pf является линейным и непрерывным на S.

Для обобщённых функций из S' производная определяется так же, как и для функций из D'. Именно, производная f' функции f определяется по формуле

$$(f',\varphi) = -(f,\varphi'), \quad \varphi \in S.$$

Легко доказывается, что

1) производная любой обобщённой функции из S' является обобщённой функцией из S', и, следовательно, *любая функция $f \in S'$ имеет производные любого порядка*;
2) *операция дифференцирования линейна*, т.е. для любых обобщённых функций f и g и любых чисел α и β
$$(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g';$$
3) *операция дифференцирования непрерывна*, т.е. если $f_n \to f$ в S', то и $f_n' \to f$ в S' при $n \to \infty$;
4) для любой функции $f \in S'$ и любого многочлена $p(x)$
$$(pf)' = p'f + pf'.$$

7.2. Преобразование Фурье в пространстве S быстро убывающих функций

Для любой функции $\varphi \in S$ определены прямое и обратное преобразования Фурье:

$$\hat{\varphi}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) e^{-ix\xi} dx,$$
$$\tilde{\varphi}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) e^{ix\xi} dx.$$

В главе 15 (см. п. 4.6) было доказано, что если $\varphi \in S$, то $\hat{\varphi} \in S$ и $\tilde{\varphi} \in S$, причём справедливы формулы обращения

$$F^{-1}[F[\varphi]] = F[F^{-1}[\varphi]] = \varphi \quad \forall \varphi \in S.$$

Из них сразу следует, что преобразования Фурье взаимно однозначно отображают S на S.

Докажем, что *преобразования Фурье являются линейными непрерывными отображениями S на S*.

Линейность очевидна. А для доказательства непрерывности на S достаточно показать, что они непрерывны в нуле.

Пусть $\varphi_n(x) \to 0$ в S при $n \to \infty$. Тогда

$$\begin{aligned} |\xi^k \hat{\varphi}_n^{(l)}(\xi)| &= |\xi^k F[x^l \varphi_n(x)]| = |F[(x^l \varphi_n(x))^{(k)}]| \\ &\leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |(x^l \varphi_n(x))^{(k)}|\, dx \leqslant \\ &\leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sup_x (1+x^2)|(x^l \varphi_n(x))^{(k)}| \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sup_x (1+x^2)|(x^l \varphi_n(x))^{(k)}| \to 0 \end{aligned}$$

при $n \to \infty$, и поэтому

$$\lim_{n\to\infty} \sup_\xi |\xi^k \hat{\varphi}_n^{(l)}(\xi)| = 0$$

для любых целых неотрицательных k и l. Следовательно, $\hat{\varphi}_n \to 0$ в S при $n \to \infty$.

Аналогично доказывается, что $\tilde{\varphi}_n \to 0$ в S при $n \to \infty$.

7.3. Преобразование Фурье обобщённых функций медленного роста

Можно показать, что если функция f непрерывна и абсолютно интегрируема на $\mathbb{R}$, то для любой функции $\varphi \in S$

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ix\xi}\, dx \right) \varphi(\xi)\, d\xi = \int_{\mathbb{R}} f(x) \left(\int_{\mathbb{R}} \varphi(\xi) e^{-ix\xi}\, d\xi \right) dx,$$

и, следовательно,

$$\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)\varphi(\xi)\,d\xi = \int_{\mathbb{R}} f(x)\hat{\varphi}(x)\,dx.$$

Это равенство делает естественным следующее определение.

Определение 1. Для любой обобщённой функции $f \in S'$ функционал $\hat{f}$ такой, что

$$(\hat{f},\varphi) = (f,\hat{\varphi}) \quad \forall \varphi \in S,$$

называется *преобразованием Фурье* или *образом Фурье функции* f, а оператор $F[f] = \hat{f}$ — *преобразованием Фурье.*

Таким образом, по определению,

$$(F[f],\varphi) = (f,F[\varphi]) \quad \forall \varphi \in S.$$

Аналогично, функционал $\tilde{f}$ такой, что

$$(\tilde{f},\varphi) = (f,\tilde{\varphi}) \quad \forall \varphi \in S,$$

называется *обратным преобразованием Фурье* или *прообразом Фурье функции* f, а оператор $F^{-1}[f] = \tilde{f}$ — *обратным преобразованием Фурье.*

Пример 1. Найдём образ и прообраз Фурье δ-функции.

По определению,

$$\begin{aligned}(\hat{\delta},\varphi) &= (\delta,\hat{\varphi}) = \hat{\varphi}(0),\\ (\tilde{\delta},\varphi) &= (\delta,\tilde{\varphi}) = \tilde{\varphi}(0).\end{aligned}$$

А так как

$$\hat{\varphi}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(1,\varphi)$$

и $\tilde{\varphi}(0) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\,(1,\varphi)$, то

$$F[\delta] = F^{-1}[\delta] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,.$$

Пример 2. Найдём преобразование Фурье функции $\theta(x)$.

По определению,

$$(F[\theta],\varphi) = (\theta,F[\varphi]) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} dx \int_{\mathbb{R}} \varphi(\xi) e^{-i\xi x} d\xi.$$

Следовательно,

$$(F[\theta],\varphi) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{\eta\to+\infty} \int_0^{\eta} dx \int_{\mathbb{R}} \varphi(\xi) e^{-i\xi x} d\xi.$$

В последнем интеграле переставим порядок интегрирования и проинтегрируем по x. Тогда

$$(F[\theta],\varphi) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{\eta\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} \varphi(\xi) \frac{1 - e^{-i\xi x}}{i\xi} d\xi.$$

Очевидно, последний интеграл по $\mathbb{R}$ равен сумме

$$\int_0^{+\infty} \varphi(\xi) \frac{1 - e^{-i\xi\eta}}{i\xi}\, d\xi + \int_0^{+\infty} \varphi(-\xi) \frac{1 - e^{i\xi\eta}}{-i\xi}\, d\xi,$$

поэтому

$$(F[\theta],\varphi) = -\frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\varphi(\xi) - \varphi(-\xi)}{\xi}\, d\xi +$$
$$+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{\eta\to+\infty} \int_0^{+\infty} \left(\frac{\varphi(-\xi)}{i\xi} e^{i\xi\eta} - \frac{\varphi(\xi)}{i\xi} e^{-i\xi\eta} \right) d\xi.$$

Из теоремы Римана об осцилляции следует, что

$$\lim_{\eta\to+\infty} \int_1^{+\infty} \frac{\varphi(\pm\xi)}{i\xi} e^{\pm i\xi\eta} d\xi = 0,$$
$$\lim_{\eta\to+\infty} \int_0^{1} \frac{\varphi(\pm\xi) - \varphi(0)}{i\xi} e^{\pm i\xi\eta} d\xi = 0,$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}(F[\theta],\varphi) &= -\frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\varphi(\xi) - \varphi(-\xi)}{\xi}\, d\xi + \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{\eta\to+\infty} \left(\varphi(0) \int_0^{1} \frac{2\sin\eta\xi}{\xi}\, d\xi \right) = \\ &= -\frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\varphi(\xi) - \varphi(-\xi)}{\xi}\, d\xi + \frac{\pi}{\sqrt{2\pi}} \varphi(0).\end{aligned}$$

Таким образом,

$$F[\theta] = -\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\mathcal{P}\frac{1}{\xi} + \sqrt{\frac{\pi}{2}}\delta(\xi).$$

Аналогично доказывается, что

$$F^{-1}[\theta] = \frac{i}{\sqrt{2\pi}}\mathcal{P}\frac{1}{\xi} + \sqrt{\frac{\pi}{2}}\delta(\xi).$$

Теорема 1. *Для любой обобщённой функции $f \in S'$ функционалы $\hat{f}$ и $\tilde{f}$ являются линейными и непрерывными на S, т.е. $\hat{f} \in S'$ и $\tilde{f} \in S'$. Кроме того, справедливы формулы обращения:*

$$F^{-1}[F[f]] = F[F^{-1}[f]] = f.$$

Доказательство. Для любых функций φ и ψ из S и любых чисел α и β имеем:

$$(\hat{f},\alpha\varphi + \beta\psi) = (f,\alpha\hat{\varphi} + \beta\psi) = \\ = \alpha(f,\hat{\varphi}) + \beta(f,\hat{\psi}) = \alpha(\hat{f},\varphi) + \beta(\hat{f},\psi).$$

Линейность функционала $\hat{f}$ доказана. Докажем непрерывность.

Пусть $\varphi_n \to \varphi$ в S при $n \to \infty$. Тогда, как доказано в предыдущем пункте, и $\hat{\varphi}_n \to \hat{\varphi}$ в S при $n \to \infty$. Следовательно,

$$(f,\hat{\varphi}_n) \to (f,\hat{\varphi}) \text{ при } n \to \infty,$$

и поэтому

$$\lim_{n\to\infty}(\hat{f},\varphi_n) = (\hat{f},\varphi).$$

Таким образом, $\hat{f} \in S'$. Аналогично доказывается, что $\tilde{f} \in \in S'$.

Формулы обращения для функции $f \in S'$ следуют из формул обращения для функций из S. Действительно,

$$(F^{-1}[F[f]],\varphi) = (F[f],F^{-1}[\varphi]) = (f,\varphi)$$

для любой функции $\varphi \in S$. Следовательно,

$$F^{-1}[F[f]] = f.$$

Аналогично доказывается, что

$$F[F^{-1}[f]] = f.$$

Теорема 1 доказана.

Пример 3. Найдём преобразования Фурье функции $f(x) = 1$.

В примере 1 было получено, что

$$1 = \sqrt{2\pi} F[\delta], \qquad 1 = \sqrt{2\pi} F^{-1}[\delta].$$

Отсюда по формулам обращения получаем:

$$F^{-1}[1] = \sqrt{2\pi}\delta, \quad F[1] = \sqrt{2\pi}\delta.$$

Теорема 2. *Преобразования Фурье являются линейными непрерывными операторами, отображающими S' на S'.*

Доказательство. Для любых функций f и g из S' и любых чисел α и β

$$\begin{aligned}(F[\alpha f + \beta g],\varphi) &= (\alpha f + \beta g, F[\varphi]) = \\ &= \alpha(f,F[\varphi]) + \beta(g,F[\varphi]) = \\ &= \alpha(F[f],\varphi) + \beta(F[g],\varphi) = \\ &= (\alpha F[f] + \beta F[g],\varphi), \quad \varphi \in S.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$F[\alpha f + \beta g] = \alpha F[f] + \beta F[g].$$

Линейность оператора F на S' доказана. Докажем его непрерывность.

Пусть $f_n \to f$ в S'. Тогда

$$(F[f_n],\varphi) = (f_n,F[\varphi]) \to (f,F[\varphi]) = (F[f],\varphi)$$

при $n \to \infty$ для любой функции $\varphi \in S$. Следовательно,

$$F[f_n] \to F[f] \text{ в } S' \text{ при } n \to \infty.$$

Аналогично доказывается, что обратное преобразование Фурье тоже является линейным непрерывным оператором из S' в S'.

Из формул обращения следует, что операторы F и F^{-1} отображают S' на S'. Действительно, любой элемент $f \in S'$ является образом элемента $\tilde{f} \in S'$ при отображении F и образом элемента $\hat{f} \in S'$ при отображении F^{-1}.

Теорема 2 доказана.

Получим *формулы для преобразования Фурье от производной.*

Для любой функции $\varphi(\xi) \in S$ имеем:

$$(F[f^{(k)}],\varphi) = (f^{(k)},F[\varphi]) = (-1)^k \left(f,\frac{d^k}{dx^k}F[\varphi]\right) =$$
$$= (f,F[(i\xi)^k\varphi(\xi)]) = (F[f],(i\xi)^k\varphi(\xi)).$$

Таким образом,

$$F[f^{(k)}] = (i\xi)^k\hat{f}(\xi).$$

Аналогично доказывается формула

$$F^{-1}[f^{(k)}] = (-i\xi)^k\tilde{f}(\xi).$$

В заключение получим *формулы для производной от преобразования Фурье.*

Для любой функции $\varphi(\xi) \in S$ имеем:

$$\left(\frac{d^k}{d\xi^k}\hat{f}(\xi),\varphi(\xi)\right) = (-1)^k(\hat{f}(\xi),\varphi^{(k)}(\xi)) =$$
$$= (-1)^k(f(x),F[\varphi^{(k)}(\xi)]) =$$
$$= (-1)^k(f(x),(ix)^kF[\varphi]) =$$
$$= (F[(-ix)^kf(x)],\varphi(\xi)).$$

Следовательно,

$$\frac{d^k}{d\xi^k}\hat{f}(\xi) = F[(-ix)^kf(x)].$$

Аналогично доказывается, что

$$\frac{d^k}{d\xi^k}\tilde{f}(\xi) = F^{-1}[(ix)^kf(x)].$$

Полученные формулы записывают ещё и так:

$$F[x^k f(x)] = i^k \frac{d^k}{d\xi^k} \hat{f}(x),$$

$$F^{-1}[x^k f(x)] = (-i)^k \frac{d^k}{d\xi^k} \tilde{f}(x).$$

Пример 4. Найдём преобразования Фурье от функции $f(x) = x^k$, где $k \in \mathbb{N}$.

$$F[x^k] = F[x^k \cdot 1] = i^k \frac{d^k}{d\xi^k} (\sqrt{2\pi}\delta(\xi)) = \sqrt{2\pi} i^k \delta^{(k)}(\xi);$$

$$F^{-1}[x^k] = \sqrt{2\pi}(-i)^k \delta^{(k)}(\xi).$$

ОГЛАВЛЕНИЕ