МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное агентство по образованию
Государственное образовательное учреждение
Высшего профессионального образования
Московский физико-технический институт
(государственный университет)

М.Е. Широков

О НЕКОТОРЫХ ПОНЯТИЯХ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Москва, 2010

Составитель М.Е. Широков

УДК 517

Рецензент: *Амосов Г.Г., д.ф.-м.н., доцент*

О некоторых понятиях теории вероятностей
Учебно-методическое пособие. М.: МФТИ, 2010. 30 с.

Содержание

1. Алгебры и σ-алгебры

Ключевыми в аксиоматике теории вероятностей являются понятия алгебры и σ-алгебры событий. Данный раздел посвящен детальному рассмотрению этих понятий.

1.1. Алгебры

Пусть Ω — произвольное множество, элементы которого будем обозначать переменной ω. Для обозначения подмножеств множества Ω будут использоваться символы $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, ..., а для обозначения семейств[1] таких подмножеств — символы $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ ..., Семейство, состоящее из множеств $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ (соответственно из множеств $\mathcal{A}_i$, $i = \overline{1, n}$), будем обозначать $\{\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}\}$ (соответственно $\{\mathcal{A}_i\}_{i=1}^n$).

Для обозначения пересечений и объединений множеств используются стандартные символы «$\cap$» и «$\cup$». Объединение любого числа попарно непересекающихся множеств называется суммой этих множеств и обозначается $\mathcal{A} + \mathcal{B} + \mathcal{C}$ или $\sum_i \mathcal{A}_i$. Дополнение подмножества $\mathcal{A} \subseteq \Omega$, т.е. подмножество множества Ω, состоящее из элементов, не входящих в $\mathcal{A}$, обозначается $\overline{\mathcal{A}}$.

Определение 1. *Семейство $\mathfrak{A}$ подмножеств множества Ω называется алгеброй, если оно содержит $\emptyset$ и Ω и выполнены следующие условия:*

1) *для любого множества $\mathcal{A}$ из $\mathfrak{A}$ его дополнение $\overline{\mathcal{A}}$ является элементом семейства $\mathfrak{A}$;*

2) *для любых множеств $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ из $\mathfrak{A}$ их пересечение $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ и объединение $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ являются элементами семейства $\mathfrak{A}$.*

---

[1] Множеств, элементами которых являются подмножества множества Ω (термин «семейство» используется как синоним термина «множество» для избежания выражений типа «множество множеств»).

Заметим, что в условии 2) в данном определении достаточно требовать принадлежность семейству $\mathfrak{A}$ либо только пересечений любых двух множеств из $\mathfrak{A}$, либо только объединений таких множеств. Действительно, если, например, $\mathcal{A}\cap\mathcal{B} \in \mathfrak{A}$ для любых множеств $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ из $\mathfrak{A}$, то в силу условия 1) имеем $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \overline{\overline{\mathcal{A}} \cap \overline{\mathcal{B}}} \in \mathfrak{A}$.

Таким образом, семейство $\mathfrak{A}$ является алгеброй, если оно содержит $\emptyset$ и Ω и является «замкнутым» относительно операций дополнения и пересечения (объединения) в том смысле, что, применяя эти операции к множеству или паре множеств из $\mathfrak{A}$, нельзя получить множество, не являющееся элементом $\mathfrak{A}$.

Пример 1. Простейший пример алгебры подмножеств произвольного множества Ω — это семейство, состоящее из двух элементов $\emptyset$ и Ω. Такую алгебру будем называть *беднейшей* алгеброй подмножеств множества Ω (по понятным причинам) и обозначать $\mathfrak{A}_{\min}(\Omega)$.

Пример 2. Другой, в определенном смысле, противоположный пример алгебры подмножеств произвольного множества Ω — это семейство, состоящее из *всех* возможных подмножеств множества Ω. Такую алгебру будем называть *богатейшей* алгеброй подмножеств множества Ω (по столь же понятным причинам) и обозначать $\mathfrak{A}_{\max}(\Omega)$.

Пример 3. Пример алгебры подмножеств произвольного множества Ω, более богатой, чем $\mathfrak{A}_{\min}(\Omega)$, но в общем случае не совпадающей с $\mathfrak{A}_{\max}(\Omega)$, можно построить, зафиксировав произвольное подмножество $\mathcal{A} \subset \Omega$, отличное от $\emptyset$ и Ω. Семейство $\{\mathcal{A}\}$, единственным элементом которого является подмножество $\mathcal{A}$, алгеброй не является, поскольку не содержит $\emptyset$ и Ω. Добавление этих двух элементов не спасает положения: семейство $\{\emptyset,\ \mathcal{A},\ \Omega\}$ также не является алгеброй, поскольку содержит множество $\mathcal{A}$, но не содержит его дополнение $\overline{\mathcal{A}}$. А вот семейство $\{\emptyset,\ \mathcal{A},\ \overline{\mathcal{A}},\ \Omega\}$ уже обладает всеми свойствами алгебры. Такую алгебру подмножеств множества Ω будем называть *алгеброй, порожденной подмножеством* $\mathcal{A} \subset \Omega$, и обозначать $\alpha(\{\mathcal{A}\})$.

Задача 1. Охарактеризовать множество Ω, для которого

a) $\mathfrak{A}_{\min}(\Omega) = \mathfrak{A}_{\max}(\Omega)$;

b) $\alpha(\{\mathcal{A}\}) = \mathfrak{A}_{\max}(\Omega)$ при некотором $\mathcal{A} \subset \Omega$.

Последний пример показывает, что добавление некоторых новых подмножеств к исходному семейству подмножеств множества Ω, которое не является алгеброй, превращает это семейство в алгебру. Ниже мы увидим (следствие 1), что для *любого* семейства подмножеств *произвольного* множества Ω существует *минимальный однозначно определенный* набор подмножеств множества Ω, добавление которых к этому семейству превращает его в алгебру.

Задача 2. Указать минимальный набор подмножеств множества Ω, которые необходимо добавить к семейству $\{\mathcal{A}, \mathcal{B}\}$, состоящему из несовпадающих подмножеств $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ множества Ω, отличных от $\emptyset$ и Ω, для превращения этого семейства в алгебру.

Приведенные выше примеры алгебр носили универсальный характер, т.е. не зависели от природы множества Ω. Рассмотрим два примера алгебр подмножеств множества Ω конкретного вида.

Пример 4. Пусть $\Omega = \mathbb{N}$. Нетрудно видеть, что семейство, состоящее из всех подмножеств натурального ряда $\mathbb{N}$, которые либо конечны (т.е. состоят из конечного числа натуральных чисел), либо имеют конечное дополнение, образуют алгебру.

Пример 5. Пусть $\Omega = [0, 1]$. Рассмотрим семейство подмножеств отрезка $[0, 1]$, представляющих собой объединение конечного числа промежутков вида $[a, b]$, (a, b), $[a, b)$, $(a, b]$.

Непосредственная проверка показывает, что данное семейство является алгеброй.

Введем следующее важное понятие.

Определение 2. *Пусть $\mathfrak{A}$ — алгебра подмножеств множества Ω. Семейство $\mathfrak{B}$ подмножеств множества Ω называется подалгеброй алгебры $\mathfrak{A}$, если выполнены следующие условия:*

1) *семейство $\mathfrak{B}$ является подсемейством алгебры $\mathfrak{A}$, т.е. из $\mathcal{A} \in \mathfrak{B}$ следует $\mathcal{A} \in \mathfrak{A}$;*

2) *семейство $\mathfrak{B}$ является алгеброй в смысле определения* 1.

В приведенных выше примерах алгебра $\mathfrak{A}_{\min}(\Omega)$ является подалгеброй алгебры $\alpha(\{\mathcal{A}\})$, которая сама является подалгеброй алгебры $\mathfrak{A}_{\max}(\Omega)$. Заметим, что любая алгебра подмножеств множества Ω является подалгеброй алгебры $\mathfrak{A}_{\max}(\Omega)$.

Обратим внимание на аналогию между понятиями алгебры и ее подалгебры и понятиями линейного пространства и его подпространства. Линейное пространство определяется как множество элементов, для которых определены линейные операции (сложение и умножение на число) таким образом, что их применение к любым элементам данного множества дает некоторый элемент того же множества. Подпространством линейного пространства называется любое подмножество этого пространства, которое «замкнуто» относительно линейных операций в том смысле, что, применяя линейные операции к элементам этого подмножества, нельзя получить элемент, ему не принадлежащий.

Таким образом, общим в определениях алгебры-подалгебры и линейного пространства-подпространства является требование замкнутости относительно некоторого набора операций. В первом случае — это операции дополнения, пересечения и объединения множеств, во втором —

линейные операции. Мы в дальнейшем будем использовать данную аналогию, считая, что линейная алгебра хорошо знакома читателю.

Поскольку алгебры подмножеств данного множества Ω представляют собой семейства, т.е. множества, с ними можно проводить теоретико-множественные операции, т.е. операции пересечения, объединения и т.д. Важнейшей среди них является операция пересечения двух и большего числа алгебр, которой мы посвятим отдельное определение.

Определение 3. *Пусть $\{\mathfrak{A}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ — произвольный набор алгебр подмножеств множества Ω, индексируемых некоторым параметром $\lambda \in \Lambda$. Пересечением $\bigcap_{\lambda\in\Lambda}\mathfrak{A}_\lambda$ этого набора алгебр называется семейство, которое состоит из подмножеств, принадлежащих всем алгебрам данного набора, т.е.*

$$\mathcal{A} \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda}\mathfrak{A}_\lambda \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{A} \in \mathfrak{A}_\lambda \quad \forall\lambda \in \Lambda.$$

Для понимания сути данной операции полезно разобраться в следующем примере.

Пример 6. Пусть $\Omega = [0,1]\times[0,1]$ — единичный квадрат на плоскости. Рассмотрим две алгебры подмножеств этого квадрата.

Алгебра $\mathfrak{C}_\mathrm{v}$ всех вертикальных цилиндров — это семейство множеств вида $\mathcal{C}^\mathrm{v}_\mathcal{A} = \{(x,y)\,|\,x \in \mathcal{A},\ y \in [0,1]\}$, где $\mathcal{A}$ — произвольное подмножество отрезка $[0,1]$. То, что это семейство является алгеброй, нетрудно проверить непосредственно, заметив, что $\overline{\mathcal{C}^\mathrm{v}_\mathcal{A}} = \mathcal{C}^\mathrm{v}_{\overline{\mathcal{A}}}$ и $\mathcal{C}^\mathrm{v}_\mathcal{A}\cap\mathcal{C}^\mathrm{v}_{\mathcal{A}'} = \mathcal{C}^\mathrm{v}_{\mathcal{A}\cap\mathcal{A}'}$ для любых подмножеств $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}'$ отрезка $[0,1]$, и учитывая, что семейство всех таких подмножеств образует алгебру $\mathfrak{A}_{\max}([0,1])$.

Алгебра $\mathfrak{C}_\mathrm{h}$ всех горизонтальных цилиндров — это семейство множеств вида $\mathcal{C}^\mathrm{h}_\mathcal{B} = \{(x,y)\,|\,x \in [0,1],\ y \in \mathcal{B}\}$, где $\mathcal{B}$ — произвольное подмножество отрезка $[0,1]$.

Вопрос: из каких множеств состоит семейство $\mathfrak{C}_{\mathrm{v}} \cap \mathfrak{C}_{\mathrm{h}}$? *Стандартный неправильный ответ:* данное семейство состоит из множеств вида $\mathcal{A} \times \mathcal{B} = \{(x, y) \,|\, x \in \mathcal{A},\ y \in \mathcal{B}\}$, т.е. «квадратиков» с произвольными сторонами $\mathcal{A} \subseteq [0,1]$ и $\mathcal{B} \subseteq [0,1]$. Ошибка связана с переносом операции пересечения с самих алгебр на их элементы. *Пересечение алгебр — это не есть семейство, составленное из пересечений элементов этих алгебр!* Слабым оправданием этой ошибки является наличие множеств разной природы в рассматриваемых конструкциях (каждая алгебра — это множество, само составленное из множеств), а значит, и двух разных операций пересечения.

На самом деле семейство $\mathfrak{C}_{\mathrm{v}} \cap \mathfrak{C}_{\mathrm{h}}$ состоит всего из двух множеств $\emptyset$ и $\Omega = [0,1] \times [0,1]$, поскольку только эти множества являются вертикальными и горизонтальными цилиндрами одновременно.

В приведенном выше примере пересечение двух алгебр $\mathfrak{C}_{\mathrm{v}}$ и $\mathfrak{C}_{\mathrm{h}}$ само является алгеброй. Это не случайно!

Теорема 1. *Пересечение любого набора алгебр подмножеств произвольного множества Ω является алгеброй.*

Доказательство. Пусть $\{\mathfrak{A}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ — произвольный набор алгебр подмножеств множества Ω. По определению семейство $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathfrak{A}_\lambda$ содержит $\emptyset$ и Ω.

Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — любые два множества из $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathfrak{A}_\lambda$. По определению при каждом $\lambda \in \Lambda$ имеем $\mathcal{A} \in \mathfrak{A}_\lambda$ и $\mathcal{B} \in \mathfrak{A}_\lambda$, а значит, и $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} \in \mathfrak{A}_\lambda$, поскольку $\mathfrak{A}_\lambda$ — алгебра. Следовательно, $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ — элемент семейства $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathfrak{A}_\lambda$.

Так же легко доказывается, что из $\mathcal{A} \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathfrak{A}_\lambda$ следует $\overline{\mathcal{A}} \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathfrak{A}_\lambda$. $\square$

Приведенное выше простое утверждение сформулировано в виде теоремы, поскольку оно имеет важное следствие.

Следствие 1. *Для любого семейства $\mathfrak{F}$ подмножеств* *произвольного множества Ω существует единственная алгебра $\alpha(\mathfrak{F})$, обладающая следующими свойствами:*

1) *$\mathfrak{F}$ является подсемейством алгебры $\alpha(\mathfrak{F})$, т.е. из $\mathcal{A} \in \mathfrak{F}$ следует $\mathcal{A} \in \alpha(\mathfrak{F})$;*

2) *$\alpha(\mathfrak{F})$ является подалгеброй любой алгебры, содержащей $\mathfrak{F}$ в качестве подсемейства.*

Доказательство. Рассмотрим набор, состоящий из всех алгебр подмножеств множества Ω, содержащих $\mathfrak{F}$ в качестве подсемейства. Этот набор непуст, поскольку он содержит алгебру $\mathfrak{A}_{\max}(\Omega)$ всех подмножеств множества Ω. В силу теоремы 1 пересечение всех алгебр данного набора является алгеброй, которая содержит $\mathfrak{F}$ в качестве подсемейства и по определению операции пересечения является подалгеброй каждой алгебры из указанного набора. $\square$

Алгебра $\alpha(\mathfrak{F})$ является минимальной алгеброй, содержащей семейство $\mathfrak{F}$, в том смысле, что если из нее удалить один или несколько любых ее элементов, то она либо перестанет быть алгеброй, либо не будет содержать $\mathfrak{F}$ в качестве подсемейства.

Простейший пример алгебры $\alpha(\mathfrak{F})$ — это рассмотренная в примере 3 алгебра $\alpha(\{\mathcal{A}\}) = \{\emptyset,\ \mathcal{A},\ \overline{\mathcal{A}},\ \Omega\}$, порожденная множеством $\mathcal{A} \subset \Omega$. Другой пример — алгебра $\alpha(\{\mathcal{A},\ \mathcal{B}\})$, порожденная семейством из двух различных подмножеств $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ множества Ω, которую читатель должен был построить в задаче 2.

Задача 3. Пусть $\Omega = \mathbb{N}$ и $\mathfrak{F}$ — семейство одноэлементных множеств вида $\{n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Показать, что $\alpha(\mathfrak{F})$ — это алгебра из примера 4.

Задача 4. Пусть $\Omega = [0,1]$ и $\mathfrak{F}$ — семейство всех отрезков $[a,b] \subseteq [0,1]$. Показать, что $\alpha(\mathfrak{F})$ — это алгебра из примера 5.

Развивая отмеченную ранее аналогию между понятиями алгебры-подалгебры и линейного пространства-подпространства, заметим, что алгебра $\alpha(\mathfrak{F})$, порожденная семейством $\mathfrak{F}$ подмножеств множества Ω, является аналогом линейной оболочки $\operatorname{lin}(\mathcal{L}_0)$ множества $\mathcal{L}_0$ векторов линейного пространства $\mathcal{L}$ — минимального подпространства пространства $\mathcal{L}$, содержащего все векторы из $\mathcal{L}_0$. В силу этой аналогии алгебру $\alpha(\mathfrak{F})$ будем кратко называть *алгебраической оболочкой* семейства $\mathfrak{F}$[2].

Задача 5.* Дать конструктивное описание алгебры $\alpha(\mathfrak{F})$ для любого семейства подмножеств $\mathfrak{F}$ произвольного множества Ω.

1.2. σ-алгебры

Если $\mathfrak{A}$ — алгебра подмножеств множества Ω, то, рассуждая по индукции, нетрудно показать, что пересечение и объединение любого *конечного* числа множеств из $\mathfrak{A}$ является множеством из $\mathfrak{A}$. Однако из этого рассуждения не следует, что пересечение и объединение *любого* набора множеств из $\mathfrak{A}$ является множеством из $\mathfrak{A}$. Другими словами, алгебра $\mathfrak{A}$ может быть не замкнута относительно операций пересечения и объединения, примененных сразу с бесконечному числу ее элементов (см. примеры ниже).

С точки зрения использования рассматриваемых теоретико-множественных конструкций в теории вероятностей важным является требование замкнутости алгебры относительно операций пересечения и объединения, примененных к любому *счетному* набору ее элементов. Это требование приводит нас к следующему понятию.

Определение 4. *Алгебра $\mathfrak{A}$ подмножеств множества Ω называется σ-алгеброй, если для любого счетного набо-*

[2]Эта терминология не является общепринятой.

ра $\{\mathcal{A}_i\}$ ее элементов множества $\bigcap_i \mathcal{A}_i$ и $\bigcup_i \mathcal{A}_i$ являются элементами этой алгебры.

В качестве простейших примеров алгебр, которые являются σ-алгебрами, можно рассмотреть алгебры из примеров 1–3 (в алгебрах из примеров 1 и 3 просто не существует нетривиальных счетных наборов, в алгебре из примера 2 требование определения 4 выполнено по определению этой алгебры).

Задача 6. Показать, что для проверки наличия у алгебры $\mathfrak{A}$ свойства σ-алгебры достаточно показать, что либо только пересечение, либо только объединение любого счетного набора множеств из этой алгебры является ее элементом, причем во втором случае можно ограничиться только наборами из непересекающихся множеств (т.е. суммами вместо объединений).

Таким образом, σ-алгебру от алгебры отличает наличие у нее дополнительного свойства (так же, как квадрат от прямоугольника!). Естественный вопрос, возникающий у вдумчивого читателя: а может это свойство выполнено автоматически? Иначе говоря, существуют ли алгебры, которые не являются σ-алгебрами (так же, как существуют прямоугольники, отличные от квадратов)?

Ясно, что пример алгебры, не являющейся σ-алгеброй, нельзя построить, рассматривая алгебры подмножеств конечного множества Ω. А вот счетного множества Ω уже достаточно для конструкции такого примера.

Пример 7. Алгебра подмножеств натурального ряда $\mathbb{N}$, рассмотренная в примере 4, не является σ-алгеброй. Действительно, возьмем счетный набор одноэлементных множеств вида $\{2n\}$, $n \in \mathbb{N}$, принадлежащих этой алгебре. Их объединение — это множество четных натуральных чисел, которое не является конечным и не имеет конечного дополнения, а значит, не является элементом данной алгебры.

Задача 7. Показать, что алгебра, рассмотренная в примере 5, не является σ-алгеброй.

Задача 8. Показать, что алгебра всех вертикальных цилиндров $\mathfrak{C}_{\mathrm{v}}$ и алгебра всех горизонтальных цилиндров $\mathfrak{C}_{\mathrm{h}}$, рассмотренные в примере 6, являются σ-алгебрами.

Понятие подалгебры (определение 2) имеет свой σ-алгебраический аналог.

Определение 5. *Пусть $\mathfrak{A}$ — σ-алгебра подмножеств множества Ω. Семейство $\mathfrak{B}$ подмножеств множества Ω называется σ-подалгеброй σ-алгебры $\mathfrak{A}$, если выполнены следующие условия:*

1) *семейство $\mathfrak{B}$ является подсемейством σ-алгебры $\mathfrak{A}$, т.е. из $\mathcal{A} \in \mathfrak{B}$ следует $\mathcal{A} \in \mathfrak{A}$;*

2) *семейство $\mathfrak{B}$ является σ-алгеброй в смысле определения* 4.

Семейства всех вертикальных цилиндров и всех горизонтальных цилиндров из примера 6 являются различными σ-подалгебрами σ-алгебры $\mathfrak{A}_{\mathrm{max}}([0,1] \times [0,1])$ всех подмножеств квадрата $[0,1] \times [0,1]$, а вот алгебра из примера 4 является подалгеброй, но не σ-подалгеброй σ-алгебры $\mathfrak{A}_{\mathrm{max}}(\mathbb{N})$ всех подмножеств натурального ряда $\mathbb{N}$ (см. пример 7). Заметим, что любая σ-алгебра подмножеств произвольного множества Ω является σ-подалгеброй σ-алгебры $\mathfrak{A}_{\mathrm{max}}(\Omega)$.

Возвращаясь к аналогии с линейными пространствами, заметим, что хорошим аналогом понятия σ-алгебры является понятие замкнутого подпространства линейного пространства, в котором задана какая-либо метрика. Замкнутым называется подпространство, которое содержит пределы всех последовательностей, составленных из элементов этого подпространства. Легко проверить, что любое подпространство в $\mathbb{R}^n$ является замкнутым (поэтому в линейной алгебре и не вводится специально это понятие). Но в бесконечномерных пространствах существуют незамкнутые подпространства. В качестве примера можно рассмотреть подпространство $\mathbb{P}([0,1])$ всех полиномов в линейном пространстве $\mathbb{C}([0,1])$ всех непрерывных функций на отрезке $[0,1]$ с метрикой $\rho(f,g) = \sup_{x\in[0,1]}|f(x) - g(x)|$, поскольку любая функция из $\mathbb{C}([0,1])$ является пределом некоторой последовательности полиномов из $\mathbb{P}([0,1])$ в силу теоремы Вейерштрасса. В линейном пространстве с метрикой можно определить не только суммы конечного числа элементов, но и счетные суммы, т.е. ряды (с помощью предельного перехода, так же, как определяются обычные ряды). При этом замкнутое подпространство можно определить как подпространство, которое содержит все такого рода суммы своих элементов (это следует из стандартного представления предела любой сходящейся последовательности в виде суммы ряда). Данное замечание делает указанную выше аналогию наиболее прозрачной, поскольку σ-алгебру можно определить как алгебру, содержащую все счетные суммы своих элементов (это читатель должен был установить, решая задачу 6).

Поскольку σ-алгебра — это частный случай алгебры, для любого набора σ-алгебр можно рассмотреть их пересечение (см. определение 3), которое в силу теоремы 1 является алгеброй. Замечательно, что операция пересечения не может вывести из класса σ-алгебр.

Теорема 2. *Пересечение любого набора σ-алгебр подмножеств произвольного множества Ω является σ-алгеброй.*

Доказательство. Пусть $\{\mathfrak{A}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ — произвольный набор σ-алгебр подмножеств множества Ω. В силу теоремы 1 (и задачи 6) достаточно показать, что для любого счетного набора $\{\mathcal{A}_i\}$ множеств из $\bigcap_{\lambda\in\Lambda}\mathfrak{A}_\lambda$ множество $\bigcap_i \mathcal{A}_i$ является элементом семейства $\bigcap_{\lambda\in\Lambda}\mathfrak{A}_\lambda$. По определению при каждом $\lambda \in \Lambda$ имеем $\{\mathcal{A}_i\} \subseteq \mathfrak{A}_\lambda$, а значит, $\bigcap_i \mathcal{A}_i \in \mathfrak{A}_\lambda$, поскольку $\mathfrak{A}_\lambda$ — σ-алгебра. Следовательно, $\bigcap_i \mathcal{A}_i$ — элемент семейства $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathfrak{A}_\lambda$. $\square$

То же рассуждение, которое позволило из теоремы 1 получить следствие 1, позволяет вывести из теоремы 2 следующий важный результат.

Следствие 2. *Для любого семейства $\mathfrak{F}$ подмножеств произвольного множества Ω существует единственная σ-алгебра $\sigma(\mathfrak{F})$, обладающая следующими свойствами*:

1) *$\mathfrak{F}$ является подсемейством σ-алгебры $\sigma(\mathfrak{F})$, т.е. из $\mathcal{A} \in \mathfrak{F}$ следует $\mathcal{A} \in \sigma(\mathfrak{F})$;*

2) *$\sigma(\mathfrak{F})$ является σ-подалгеброй любой σ-алгебры, содержащей $\mathfrak{F}$ в качестве подсемейства.*

Алгебра $\sigma(\mathfrak{F})$ является минимальной σ-алгеброй, содержащей семейство $\mathfrak{F}$, в том же смысле, в котором $\alpha(\mathfrak{F})$ является минимальной алгеброй, содержащей это семейство.

В рамках аналогии с линейными пространствами σ-алгебра $\sigma(\mathfrak{F})$, порожденная семейством $\mathfrak{F}$ подмножеств множества Ω, является аналогом замыкания линейной оболочки $\overline{\mathrm{lin}}(\mathcal{L}_0)$ множества $\mathcal{L}_0$ векторов линейного пространства $\mathcal{L}$ с метрикой (минимального замкнутого подпространства пространства $\mathcal{L}$, содержащего все векторы из $\mathcal{L}_0$). В силу этой аналогии σ-алгебру $\sigma(\mathfrak{F})$ будем кратко называть *σ-алгебраической оболочкой* семейства $\mathfrak{F}$.

Заметим, что в отличие от алгебраической оболочки $\alpha(\mathfrak{F})$ существование и единственность σ-алгебраической оболочки $\sigma(\mathfrak{F})$ невозможно установить конструктивным образом даже в случае счетного семейства $\mathfrak{F}$, т.е. нельзя дать явное описание тех множеств, которые входят в σ-алгебру $\sigma(\mathfrak{F})$. На первый взгляд кажется, что $\sigma(\mathfrak{F})$ — это семейство всех счетных пересечений и объединений множеств из $\mathfrak{F}$, однако это не так, как показывает следующий пример.

Пример 8. Пусть $\mathfrak{A}$ — алгебра всех промежутков отрезка $[0,1]$, рассмотренная в примере 5. Для каждого натурального n по индукции определим семейство множеств так: $\mathfrak{B}_n$ есть совокупность всевозможных счетных пересечений и объединений множеств из $\mathfrak{B}_{n-1}$, $\mathfrak{B}_0 = \mathfrak{A}$. Семейство $\mathfrak{B}_\infty = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \mathfrak{B}_n$, т.е. объединение возрастающей последовательности семейств $\{\mathfrak{B}_n\}$, не является σ-алгеброй [3, § 30, XIV]. Поскольку любое множество из $\mathfrak{B}_\infty$ принадлежит σ-алгебре $\sigma(\mathfrak{A})$, она *богаче*, чем семейство $\mathfrak{B}_\infty$, построенное конструктивным образом из алгебры $\mathfrak{A}$.

Таким образом, неконструктивное рассуждение, основанное на использовании теоремы 2, является единственным способом доказательства существования σ-алгебраической оболочки у любого семейства подмножеств произвольного множества Ω.

1.3. σ-алгебры борелевских множеств

Понятие σ-алгебраической оболочки приводит нас к следующему важному понятию.

Определение 6. *Пусть $\mathfrak{I}$ — семейство всех интервалов вида (a,b) на прямой $\mathbb{R}$. σ-алгебра $\sigma(\mathfrak{I})$ называется борелевской σ-алгеброй на прямой $\mathbb{R}$ и обозначается $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$, а ее элементы — борелевскими множествами.*

Для любого борелевского множества $\mathcal{A}$ (например, отрезка $[0,1]$) борелевской σ-алгеброй $\mathfrak{B}(\mathcal{A})$ называется σ-алгебра, составленная из множеств вида $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$, $\mathcal{B} \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$.

Помимо интервалов σ-алгебра $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ содержит все «простые» подмножества прямой: точки, отрезки, конечные и бесконечные полуинтервалы, их дополнения, а также объединения и пересечения любых счетных наборов таких множеств. Покажем, например, что σ-алгебра $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ содержит произвольный отрезок $[a,b]$, $a \leqslant b$. Поскольку при любом

n множество $(a - 1/n,\ b + 1/n)$ принадлежит семейству $\mathfrak{I}$ из определения 6, множество $[a, b] = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (a - 1/n,\ b + 1/n)$ принадлежит σ-алгебре $\sigma(\mathfrak{I}) = \mathfrak{B}(\mathbb{R})$.

Стандартный способ доказательства «борелевости» какого-либо подмножества прямой $\mathbb{R}$ — представление его в виде композиции операций дополнения, пересечения и объединения, примененных к счетным наборам простых подмножеств указанного выше вида. В то же время из примера 8 следует, что σ-алгебра $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ не исчерпывается множествами, допускающими такое представление!

Задача 9. Показать принадлежность σ-алгебре $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ множества всех иррациональных чисел.

Борелевским является даже такое экзотическое множество, как множество Кантора (см. [2, с. 74]). Вообще, можно смело сказать, что σ-алгебра $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ содержит все подмножества прямой $\mathbb{R}$, возникающие в практической деятельности человека (при всей неоднозначности этого понятия!). Тем не менее существуют множества, не являющиеся борелевскими (см. приведенный ниже пример 9), и их необходимо учитывать при теоретических исследованиях.

Заметим, что выбор в определении 6 именно семейства интервалов $\mathfrak{I}$ качестве порождающего σ-алгебру $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ не является существенным.

Задача 10. Показать, что в качестве семейства $\mathfrak{I}$ в определении 6 можно взять любое из следующих семейств подмножеств прямой $\mathbb{R}$:

- семейство всех отрезков $[a, b]$;
- семейство всех полуинтервалов $(a, b]$ (или $[a, b)$);
- семейство всех лучей $[a, +\infty)$ (или $(-\infty, b]$);
- семейство всех лучей $(a, +\infty)$ (или $(-\infty, b)$);

- семейство всех отрезков $[a, b]$ с рациональными концами,

т.е., показать, что σ-алгебраические оболочки всех указанных семейств совпадают с σ-алгебраической оболочкой семейства интервалов $\mathfrak{I}$.
Подсказка: для того чтобы доказать, что у двух различных наборов векторов в линейном пространстве одна и та же линейная оболочка, достаточно показать, что все векторы первого набора можно представить в виде линейных комбинаций векторов второго набора и наоборот. *Решение:* [1, с. 23]

В соответствии с определением 6 борелевская σ-алгебра $\mathfrak{B}([0,1])$ определяется как семейство, состоящее из пересечений множеств из $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ с отрезком $[0,1]$. Заметим, что σ-алгебру $\mathfrak{B}([0,1])$ можно определить и независимым образом.

Задача 11. Пусть $\mathfrak{A}$ — алгебра промежутков отрезка $[0,1]$, рассмотренная в примере 5. Показать, что $\sigma(\mathfrak{A}) = \mathfrak{B}([0,1])$.

Замечательной особенностью борелевских множеств является их *измеримость*, т.е. возможность однозначного сопоставления каждому такому множеству неотрицательного числа или $+\infty$ таким образом, что полученное соответствие является адекватным обобщением на σ-алгебру борелевских множеств понятия длины отрезка, интервала и т.п. Ниже мы покажем (см. пример 9), что подобного обобщения на σ-алгебру всех подмножеств числовой прямой не существует.

Сформулируем соответствующий результат для σ-алгебры $\mathfrak{B}([0,1])$, доказательство которого можно найти в [1, 4].

Теорема 3. *Существует единственная функция* $\mathbf{P}_{\mathrm{L}}$, *определенная на элементах σ-алгебры $\mathfrak{B}([0,1])$ борелевских множеств и принимающая значения в $[0,1]$, которая обладает следующими свойствами:*

1) $\mathbf{P}_{\mathrm{L}}(\emptyset) = 0$, $\mathbf{P}_{\mathrm{L}}([0,1]) = 1$;

2) $\mathbf{P}_{\mathrm{L}}\left(\sum_i \mathcal{B}_i\right) = \sum_i \mathbf{P}_{\mathrm{L}}(\mathcal{B}_i)$ *для любого конечного или счетного набора* $\{\mathcal{B}_i\}$ *непересекающихся множеств из* $\mathfrak{B}([0,1])$;

3) $\mathbf{P}_{\mathrm{L}}([a,b]) = b-a$ *при любых* $a, b \in [0,1]$, *таких что* $a \leqslant b$.

Эта функция на σ-алгебре $\mathfrak{B}([0,1])$ называется мерой Лебега.

Предлагаем читателю доказать, что из указанных свойств функции $\mathbf{P}_{\mathrm{L}}$ следует, что

- $\mathbf{P}_{\mathrm{L}}([a,b)) = \mathbf{P}_{\mathrm{L}}((a,b]) = \mathbf{P}_{\mathrm{L}}((a,b)) = b-a$ при любых a и b из $[0,1]$, таких что $a \leqslant b$;

- $\mathbf{P}_{\mathrm{L}}(\mathcal{I}_{[0,1]}) = 1$, где $\mathcal{I}_{[0,1]}$ — множество иррациональных чисел из $[0,1]$.

Таким образом, мера Лебега $\mathbf{P}_L$ — это обобщение понятия длины отрезка или (полу)интервала на класс борелевских множеств.

Следующий пример показывает, что σ-алгебру $\mathfrak{B}([0,1])$ в теореме 3 нельзя заменить на σ-алгебру $\mathfrak{A}_{\max}([0,1])$ всех подмножеств отрезка $[0,1]$.

Пример 9. Построим счетный набор $\{\mathcal{A}_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ подмножеств отрезка $[0,1]$, обладающий следующими свойствами:

- $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \mathcal{A}_k = (0,1]$ и $\mathcal{A}_k \cap \mathcal{A}_j = \emptyset$ для всех $k \neq j$;

- множество $\mathcal{A}_k$ получено сдвигом по модулю 1 из множества $\mathcal{A}_0$, т.е. поворотом этого множества на некоторый угол при отождествлении интервала $(0,1]$ с замкнутым кругом.

Если бы функция $\mathbf{P}_\mathrm{L}$ имела бы продолжение на σ-алгебру $\mathfrak{A}_{\max}([0,1])$, обладающее свойствами 1–3 из теоремы 3, то мы получили бы, что

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathbf{P}_\mathrm{L}(\mathcal{A}_k) = \mathbf{P}_\mathrm{L}((0,1]) = 1$$

(в силу первого свойства набора $\{\mathcal{A}_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$), что противоречит тому, что $\mathbf{P}_\mathrm{L}(\mathcal{A}_k) = \mathbf{P}_\mathrm{L}(\mathcal{A}_0)$ при всех k (в силу второго свойства этого набора).

Это наблюдение и теорема 3 показывают, что все множества из набора $\{\mathcal{A}_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ не являются борелевскими.

Будем строить набор $\{\mathcal{A}_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$, отождествляя интервал $(0,1]$ с замкнутым кругом $\mathcal{C}$. Зафиксируем иррациональное число q. Заметим, что каждой точке $x_0 \in \mathcal{C}$ можно сопоставить счетный набор точек $\{x_k\}_{k\in\mathbb{Z}} \subset \mathcal{C}$, полученных из точки x_0 поворотом на угол $qk\pi$, причем все точки в этом наборе разные в силу иррациональности числа q. Ясно, что два такого рода набора либо не пересекаются, либо совпадают. Поэтому круг $\mathcal{C}$ можно представить в виде объединения семейства $\{\mathcal{T}_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, состоящего из непересекающихся наборов точек указанного выше вида (множество индексов Λ можно считать некоторым подмножеством круга $\mathcal{C}$). Это семейство несчетно, поскольку множество $\mathcal{C}$ несчетно, а при каждом $\lambda \in \Lambda$ набор $\mathcal{T}_\lambda$ состоит из счетного числа точек. Для каждого $\lambda \in \Lambda$ из набора $\mathcal{T}_\lambda$ *выберем* по одной точке y_λ. Положим $\mathcal{A}_0 = \{y_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$. Пусть $\mathcal{A}_k$ — множество, полученное из $\mathcal{A}_0$ поворотом на угол $qk\pi$. Предоставляем читателю проверить выполнение для набора $\{\mathcal{A}_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ указанных выше свойств.

Понятие борелевской σ-алгебры на прямой обобщается на случай произвольного метрического пространства[3], в частности пространства $\mathbb{R}^n$.

[3] Метрическим пространством называется множество $\mathbb{X}$, для любых двух элементов x и y которого определено расстояние $\rho(x,y)$, обладающее рядом естественных свойств [2].

Определение 7. *Пусть $\mathbb{X}$ — метрическое пространство с метрикой ρ, $\mathfrak{U}$ — семейство, состоящее из подмножеств вида*

$$\mathcal{U}_r(x) = \{y \in \mathbb{X} \,|\, \rho(x, y) < r\}, \quad x \in \mathbb{X}, \quad r > 0,$$

т.е. «открытых шаров» радиуса r с центром x. σ-алгебра $\sigma(\mathfrak{U})$ называется борелевской σ-алгеброй на пространстве $\mathbb{X}$ и обозначается $\mathfrak{B}(\mathbb{X})$, а ее элементы — борелевскими множествами.

Задача 12. Пусть $\mathbb{X} = \mathbb{R}^2$. Показать, что σ-алгебра $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^2)$ содержит любой квадрат, а также границу этого квадрата.

Пример 10. Пусть $\mathbb{R}^\infty$ — пространство упорядоченных числовых последовательностей $x = (x_1, x_2, x_3, \dots)$ с метрикой $\rho(x, y) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2^{-k}|x_k - y_k|}{1+|x_k - y_k|}$. Борелевская σ-алгебра $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^\infty)$ играет важную роль в теории вероятностей. Подробности о свойствах этой σ-алгебры см. в [4, с. 160].

Другие примеры борелевских σ-алгебр, используемых в теории вероятностей и ее приложениях, можно найти в [1, 4].

2. Вероятностное пространство

В аксиоматике А.Н.Колмогорова *вероятностным пространством* называется тройка $\{\Omega,\ \mathfrak{A},\ \mathbf{P}\}$, состоящая из произвольного множества Ω, называемого *множеством элементарных исходов*, σ-алгебры $\mathfrak{A}$ подмножеств этого множества, называемых *событиями*, и *вероятностной меры* $\mathbf{P}$ на σ-алгебре $\mathfrak{A}$, т.е. функции $\mathbf{P} : \mathfrak{A} \to [0, 1]$, обладающей следующими свойствами:

1) $\mathbf{P}(\emptyset) = 0$, $\mathbf{P}(\Omega) = 1$;

2) $\mathbf{P}\left(\sum_i \mathcal{A}_i\right) = \sum_i \mathbf{P}(\mathcal{A}_i)$ для любого конечного или счетного набора $\{\mathcal{A}_i\}$ непересекающихся множеств из $\mathfrak{A}$.

Пример 11. Простейший способ превратить любое множество Ω в множество элементарных исходов некоторого вероятностного пространства — это взять в качестве σ-алгебры событий $\mathfrak{A}$ σ-алгебру $\mathfrak{A}_{\min}(\Omega) = \{\emptyset,\ \Omega\}$, а в качестве вероятностной меры $\mathbf{P}$ — функцию, принимающую значения 0 и 1 на множествах $\emptyset$ и Ω соответственно.

Пример 12. Более содержательный пример вероятностного пространства можно построить из произвольного множества Ω, выбирая в качестве σ-алгебры событий $\mathfrak{A}$ σ-алгебру $\sigma(\{\mathcal{A}\}) = \{\emptyset,\ \mathcal{A},\ \overline{\mathcal{A}},\ \Omega\}$, порожденную некоторым подмножеством $\mathcal{A}$, отличным от $\emptyset$ и Ω, а в качестве вероятностной меры $\mathbf{P}$ — функцию, принимающую значения 0, p, $1-p$ и 1 на множествах $\emptyset$, $\mathcal{A}$, $\overline{\mathcal{A}}$ и Ω соответственно, при любом p из $[0,1]$.

Задача 13. Превратить *произвольное* множество Ω в множество элементарных исходов некоторого вероятностного пространства, в котором вероятностная мера $\mathbf{P}$ принимает не менее 5 различных значений.

Пример 13. Пусть $\Omega = \{\omega_i\}_{i=1}^{n}$ — конечное или счетное множество ($n \leqslant +\infty$). Сопоставим каждому элементарному исходу ω_i неотрицательное число p_i так, что $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$. Выбирая в качестве σ-алгебры событий σ-алгебру $\mathfrak{A}_{\max}(\Omega)$ всех подмножеств множества Ω и полагая $\mathbf{P}(\mathcal{A}) = \sum_{i:\omega_i\in\mathcal{A}} p_i$ для любого множества $\mathcal{A} \subseteq \Omega$, получаем вероятностное пространство, называемое *дискретным* и подробно изучаемое в элементарных курсах теории вероятностей.

Вопрос. Почему в случае произвольного множества Ω в качестве σ-алгебры событий нельзя выбрать σ-алгебру $\mathfrak{A}_{\max}(\Omega)$ всех подмножеств этого множества?

Ответ. Как показано в примере 9, в случае несчетного множества $\Omega = [0,1]$ функции $\mathbf{P} : \mathfrak{A}_{\max}(\Omega) \mapsto [0,1]$, удовлетворяющей свойствам 1–2 указанного выше определения вероятностной меры, не существует.

Используя теорему 3, получаем следующий важный пример вероятностного пространства.

Пример 14. Множество $\Omega = [0, 1]$ с σ-алгеброй событий $\mathfrak{B}([0, 1])$ и вероятностной мерой Лебега $\mathbf{P}_{\mathrm{L}}$ является вероятностным пространством.

Задача 14. Используя меру Лебега, превратить вещественную прямую $\mathbb{R}$ в множество элементарных исходов некоторого вероятностного пространства, в котором $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ — σ-алгебра событий.

Более сложные примеры вероятностных пространств можно найти в [4].

3. Случайные величины

В случае дискретного вероятностного пространства с множеством элементарных исходов $\Omega = \{\omega_i\}_{i=1}^{n}$ и σ-алгеброй событий $\mathfrak{A}_{\max}(\Omega)$ случайной величиной называется любая вещественнозначная функция на этом множестве. В общем случае в определение случайной величины необходимо включить требование измеримости относительно σ-алгебры событий.

Определение 8. *Случайной величиной на вероятностном пространстве $\{\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P}\}$ называется функция $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$, обладающая следующим свойством:*[4]

$$\{\omega \in \Omega \,|\, \xi(\omega) \leqslant c\} \in \mathfrak{A}, \quad \forall c \in \mathbb{R},$$

которое называется свойством измеримости относительно σ-алгебры $\mathfrak{A}$ или, кратко, свойством $\mathfrak{A}$-измеримости.

Заметим, что для дискретного вероятностного пространства свойство $\mathfrak{A}$-измеримости выполнено для любой функ-

[4]Иначе говоря, это свойство означает, что множество решений неравенства $\xi(\omega) \leqslant c$ является событием при любом c.

ции на множестве элементарных исходов, поскольку любое подмножество этого множества является событием. Именно поэтому в определении случайной величины на таком вероятностном пространстве свойство $\mathfrak{A}$-измеримости не упоминалось.

На первый взгляд, свойство $\mathfrak{A}$-измеримости в определении 8 сильно портит ту ясную картину, которая была в случае дискретного вероятностного пространства. Почему в общем случае нельзя считать случайной величиной любую функцию на множестве элементарных исходов?

Попробуем ответить на этот вопрос, рассуждая с прикладной точки зрения. Представим себе физика-теоретика, которому поручено разработать статистическую модель некоторого физического устройства, напряжение на выходе которого является случайной величиной (в общечеловеческом смысле этого слова). Анализируя физические процессы, протекающие внутри данного прибора, физик строит вероятностное пространство $\{\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P}\}$, отражающее вероятностный характер этих процессов. Ясно, что при этом случайное напряжение на выходе прибора — это случайная величина $U(\omega)$ — функция на множестве элементарных исходов Ω. Предположим, что эта функция не обладает свойством $\mathfrak{A}$-измеримости, т.е. существует такое c, например $c = 36$, при котором множество $\{\omega \in \Omega \,|\, U(\omega) \leqslant c\}$ не лежит в $\mathfrak{A}$. Это значит, что мы не можем ответить на вопрос о вероятности того, что напряжение на выходе прибора не превосходит 36 В, поскольку множество $\{\omega \in \Omega \,|\, U(\omega) \leqslant 36\}$ не входит в область определения функции $\mathbf{P}$! Ясно, что статистическая модель, которая не может ответить на такие простые вопросы, бесполезна (она даже может быть вредна для здоровья, поскольку 36 В — максимальное безопасное для человека напряжение!) Это рассуждение показывает, что всякая функция $U(\omega)$, претендующая на роль случайного напряжения на выходе нашего гипотетического прибора, должна быть $\mathfrak{A}$-измеримой.

Другой вопрос, который должен был бы возникнуть у вдумчивого читателя, — это явная асимметрия в приведенном выше определении $\mathfrak{A}$-измеримости. Почему в этом определении именно $\leqslant$, а не $<$, $\geqslant$ или $>$? Ответ на этот вопрос мы сформулируем в виде задачи.

Задача 15. Пользуясь свойствами σ-алгебры $\mathfrak{A}$, показать, что в определении 8 можно использовать любое из неравенств $<$, $\geqslant$ или $>$, т.е., что любое из этих неравенств приводит к эквивалентному определению.

Показать также, что для доказательства $\mathfrak{A}$-измеримости функции ξ достаточно проверить, что множество решений неравенства $\xi(\omega) \leqslant c$ является событием только при любых рациональных c.

Рассмотрим некоторые примеры.

Пример 15. Функция ξ на множестве элементарных исходов вероятностного пространства из примера 11 является случайной величиной тогда и только тогда, когда эта функция — константа, т.е. она принимает одно и то же значение на всех элементарных исходах.

Действительно, если $\xi(\omega) \equiv C$, то множество решений неравенства $\xi(\omega) \leqslant c$ либо пусто (если $c < C$), либо совпадает с Ω (если $c \geqslant C$). Для доказательства обратного утверждения предположим, что в Ω существуют такие ω_1 и ω_2, что $\xi(\omega_1) < \xi(\omega_2)$. Если $c = \frac{1}{2}(\xi(\omega_2) - \xi(\omega_1))$, то множество решений неравенства $\xi(\omega) \leqslant c$ содержит ω_1, но не содержит ω_2, а значит, это множество не является элементом σ-алгебры $\{\emptyset, \Omega\}$.

Пример 16. Функция ξ на множестве элементарных исходов вероятностного пространства из примера 12 является случайной величиной тогда и только тогда, когда эта функция принимает только два значения, причем одно на множестве $\mathcal{A}$, а другое — на множестве $\overline{\mathcal{A}}$.

Действительно, пусть $\xi(\omega) = C_1$, если $\omega \in \mathcal{A}$, и $\xi(\omega) = C_2$, если $\omega \in \overline{\mathcal{A}}$. Будем для определенности считать, что $C_1 \leqslant C_2$. Тогда

$$\{\omega \in \Omega \,|\, \xi(\omega) \leqslant c\} = \begin{cases} \emptyset, & \text{если } c < C_1, \\ \mathcal{A}, & \text{если } C_1 \leqslant c < C_2, \\ \Omega, & \text{если } C_2 \leqslant c, \end{cases}$$

т.е. при любом c множество решений неравенства $\xi(\omega) \leqslant c$ является элементом σ-алгебры $\{\emptyset, \mathcal{A}, \overline{\mathcal{A}}, \Omega\}$. Обратное утверждение доказывается так же, как и в примере 15.

Последние два примера являются иллюстрацией следующего общего наблюдения (прямо вытекающего из определения 8): *чем богаче σ-алгебра событий вероятностного пространства, тем богаче множество случайных величин на этом пространстве.* Или, образно выражаясь, *чем богаче σ-алгебра событий, тем проще заданной функции на множестве элементарных исходов стать случайной величиной.*

Для произвольного множества $\mathcal{A} \subseteq \Omega$ функцию

$$\chi_{\mathcal{A}}(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{если } \omega \in \mathcal{A}, \\ 0, & \text{если } \omega \in \overline{\mathcal{A}}, \end{cases}$$

будем называть *индикаторной функцией множества $\mathcal{A}$.*

Задача 16. Пусть $\{\Omega,\ \mathfrak{A},\ \mathbf{P}\}$ — произвольное вероятностное пространство. Показать, что функция $\chi_{\mathcal{A}}$ является случайной величиной на этом пространстве тогда и только тогда, когда $\mathcal{A} \in \mathfrak{A}$.

С помощью индикаторных функций случайные величины из примера 16 можно представить в виде $\xi = C_1\chi_{\mathcal{A}} + C_2\chi_{\overline{\mathcal{A}}}$. Вообще, любую функцию ξ на произвольном множестве Ω, принимающую конечный или счетный набор значений $\{C_i\}_{i=1}^{n}$, $(n \leqslant +\infty)$, можно представить в виде $\xi =$

$\sum_{i=1}^{n} C_i \chi_{\mathcal{A}_i}$, где $\mathcal{A}_i$ — подмножество множества Ω, на котором функция ξ принимает значение C_i. Ясно, что набор множеств $\{\mathcal{A}_i\}_{i=1}^{n}$ образует разбиение множества Ω, т.е. что $\mathcal{A}_i \cap \mathcal{A}_j = \emptyset$ при $i \neq j$ и $\bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{A}_i = \Omega$.

Задача 17. Пусть $\{\mathcal{A}_i\}_{i=1}^{n}$ — конечное или счетное разбиение произвольного множества Ω. Показать, что существует вероятностное пространство, в котором Ω — множество элементарных исходов, а $\sigma(\{\mathcal{A}_i\}_{i=1}^{n})$ — σ-алгебра событий. Охарактеризовать класс случайных величин на этом вероятностном пространстве.

Пример 17. Рассмотрим вероятностное пространство $\{[0,1],\ \mathfrak{B}([0,1]),\ \mathbf{P}_{\mathrm{L}}\}$ (пример 14). Числовая функция на $[0,1]$, для которой выполнено условие $\mathfrak{B}([0,1])$-измеримости, называется *борелевской*. Класс борелевских функций на $[0,1]$ достаточно широк, он включает в себя все непрерывные функции на $[0,1]$, а также все поточные пределы последовательностей, состоящих из непрерывных функций. Борелевской является даже «сильно разрывная» функция Дирихле, принимающая значения 0 и 1 на множествах рациональных и иррациональных чисел соответственно. Это следует из утверждения задачи 16 и борелевости множества иррациональных чисел, доказанной читателем в задаче 9. Неборелевская функция на $[0,1]$ — это такая же экзотика, как неборелевское множество на этом отрезке в том смысле, что имея неборелевское множество $\mathcal{A}$ можно построить неборелевскую функцию $\chi_{\mathcal{A}}$ (задача 16), а имея неборелевскую функцию ξ можно построить неборелевское множество $\{\omega \in [0,1] \,|\, \xi(\omega) \leqslant c\}$, выбирая подходящее c. Несмотря на экзотичность неборелевских функций, их существование необходимо учитывать в теоретических исследованиях. Подробнее о свойствах борелевских функций можно почитать в [1].

Задача 18. Пусть $\mathfrak{C}_{\mathrm{v}}^{\mathrm{B}}$ — семейство вертикальных цилиндров из квадрата $[0,1]\times[0,1]$ с борелевским основанием, т.е. множеств вида $\mathcal{C}^{\mathrm{v}}_{\mathcal{B}} = \{(x,y)\,|\,x\in\mathcal{B},\ y\in[0,1]\}$, где $\mathcal{B}$ — произвольное борелевское подмножество отрезка $[0,1]$. Показать, что:[5]

(i) семейство $\mathfrak{C}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{v}}$ является σ-алгеброй;

(ii) $\mathfrak{C}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{v}} = \mathfrak{C}_{\mathrm{v}} \cap \mathfrak{B}([0,1]\times[0,1])$, где $\mathfrak{C}_{\mathrm{v}}$ — σ-алгебра всех вертикальных цилиндров из $[0,1]\times[0,1]$, рассмотренная в примере 6, а $\mathfrak{B}([0,1]\times[0,1])$ — σ-алгебра всех борелевских подмножеств квадрата $[0,1]\times[0,1]$ (см. определение 7);

(iii) функция $\mathbf{P}_c(\mathcal{C}^{\mathrm{v}}_{\mathcal{B}}) = \mathbf{P}_{\mathrm{L}}(\mathcal{B})$, $\mathcal{B}\in\mathfrak{B}([0,1])$, является вероятностной мерой на σ-алгебре $\mathfrak{C}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{v}}$ ($\mathbf{P}_{\mathrm{L}}$ — мера Лебега).

Какие функции на $[0,1]\times[0,1]$ являются случайными величинами на вероятностном пространстве $\{[0,1]\times[0,1],\ \mathfrak{C}^{\mathrm{B}}_{\mathrm{v}},\ \mathbf{P}_c\}$?

В современной математической литературе можно встретить следующее, формально более сильное, определение $\mathfrak{A}$-измеримости.

Определение 9. *Пусть $\mathfrak{A}$ — σ-алгебра подмножеств множества Ω. Функция $\xi:\Omega\to\mathbb{R}$ называется измеримой относительно σ-алгебры $\mathfrak{A}$, если:*

$$\xi^{-1}(\mathcal{B}) \doteq \{\omega\in\Omega\,|\,\xi(\omega)\in\mathcal{B}\}\in\mathfrak{A},\quad \forall\mathcal{B}\in\mathfrak{B}(\mathbb{R}).$$

Поскольку $\{\omega \in \Omega\,|\,\xi(\omega) \leqslant c\} = \xi^{-1}((-\infty,c])$ из $\mathfrak{A}$-измеримости в смысле определения 9 следует $\mathfrak{A}$-измеримость в смысле определения 8. Нетривиальным является обратное утверждение, которое вытекает из следующего общего результата.

[5] Пункт (ii) — задача повышенной трудности.

Предложение 1. *Пусть ξ — числовая функция на произвольном множестве Ω, а $\mathfrak{A}$ — σ-алгебра подмножеств этого множества. Пусть $\mathfrak{F}$ — семейство подмножеств вещественной прямой $\mathbb{R}$ такое, что $\sigma(\mathfrak{F}) = \mathfrak{B}(\mathbb{R})$. Если $\xi^{-1}(\mathcal{B}) \in \mathfrak{A}$ для любого $\mathcal{B} \in \mathfrak{F}$, то $\xi^{-1}(\mathcal{B}) \in \mathfrak{A}$ для любого $\mathcal{B} \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$, т.е. функция ξ является $\mathfrak{A}$-измеримой в смысле определения* 9.

Доказательство. Доказательство этого предложения — пример применения «метода подходящих множеств» [4].

Пусть ξ — такая функция, что $\xi^{-1}(\mathcal{B}) \in \mathfrak{A}$ для любого $\mathcal{B} \in \mathfrak{F}$. Определим семейство $\mathfrak{E}$ как семейство *всех* подмножеств $\mathcal{B}$ прямой $\mathbb{R}$, для которых $\xi^{-1}(\mathcal{B}) \in \mathfrak{A}$. Ясно, что семейство $\mathfrak{E}$ включает в себя $\mathfrak{F}$ в качестве подсемейства и содержит $\emptyset$ и $\mathbb{R}$ (поскольку $\xi^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \mathfrak{A}$ и $\xi^{-1}(\mathbb{R}) = \Omega \in \mathfrak{A}$). Используя легко проверяемые соотношения

$$\xi^{-1}\left(\overline{\mathcal{B}}\right) = \overline{\xi^{-1}\left(\mathcal{B}\right)} \quad \text{и} \quad \xi^{-1}\left(\bigcap_i \mathcal{B}_i\right) = \bigcap_i \xi^{-1}(\mathcal{B}_i),$$

справедливые для любого подмножества $\mathcal{B} \subseteq \mathbb{R}$ и любого набора $\{\mathcal{B}_i\}$ подмножеств прямой $\mathbb{R}$, нетрудно показать, что семейство $\mathfrak{E}$ является σ-алгеброй. Поскольку $\sigma(\mathfrak{F}) = \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ — минимальная σ-алгебра, содержащая семейство $\mathfrak{F}$, заключаем, что σ-алгебра $\mathfrak{E}$ содержит $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ в качестве σ-подалгебры. □

Взяв в качестве семейства $\mathfrak{F}$ семейство всех полуинтервалов вида $(-\infty, c]$ и используя результат задачи 10, из предложения 1 получаем требуемое утверждение.

Следствие 3. $\mathfrak{A}$-*измеримость в смысле определения* 8 *равносильна* $\mathfrak{A}$-*измеримости в смысле определения* 9.

Определение 9 является предпочтительным, поскольку допускает естественное обобщение на случай векторнозначных случайных величин (случайных элементов) на вероятностном пространстве $\{\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P}\}$, которые определяются как функции $\bar{\xi}$ на множестве элементарных исходов со значениями в каком-либо метрическом пространстве $\mathbb{X}$ (например, в $\mathbb{R}^n$), обладающие следующим свойством $\mathfrak{A}$-измеримости:

$$\bar{\xi}^{-1}(\mathcal{B}) \doteq \{\omega \in \Omega \,|\, \bar{\xi}(\omega) \in \mathcal{B}\} \in \mathfrak{A}, \quad \forall \mathcal{B} \in \mathfrak{B}(\mathbb{X}),$$

где $\mathfrak{B}(\mathbb{X})$ — борелевская σ-алгебра в $\mathbb{X}$ (см. определение 7) [4].

Литература

1. *Богачев В.И.* Основы теории меры. Т.1. – Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2003. – 543 с.
2. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. Изд. 6-е – М.:Наука, 1989. – 624 с.
3. *Куратовский К.* Топология. Т.1. – М.:Мир, 1966. – 595 с.
4. *Ширяев А.Н.* Вероятность. – М.:Наука, 1980. – 576 с.