Московский физико-технический институт
(государственный университет)

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ КУРСА ТФКП

Составители: М.И. Карлов
Е.С. Половинкин
М.И. Шабунин

МОСКВА 2007

УДК 517.

Рецензент:
Доктор физико-математических наук, профессор *Иванов Г.Е.*

Методические указания по решению задач курса ТФКП / Сост. М.И. Карлов, Е.С. Половинкин, М.И. Шабунин. — М.: МФТИ, 2007. 78 с.

УДК 517

Предназначено для студентов и преподавателей университетов и технических вузов.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ КУРСА ТФКП

Составители: КАРЛОВ Михаил Иванович
ПОЛОВИНКИН Евгений Сергеевич
ШАБУНИН Михаил Иванович

© Московский физико-технический институт (государственный университет), 2007
© Составители, 2007

Содержание

§ 1. Ряд Лорана

Справочные сведения

1. Область сходимости ряда Лорана. Ряд вида

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n, \tag{1}$$

где a — фиксированная точка комплексной плоскости, c_n — заданные комплексные числа, называется *рядом Лорана.* Ряд (1) называется *сходящимся в точке* z, если в этой точке сходятся ряды

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n, \tag{2}$$

$$\sum_{n=-1}^{-\infty} c_n(z-a)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-a)^n}, \tag{3}$$

а сумма ряда (1) по определению равна сумме рядов (2) и (3). Область сходимости ряда (2) — круг

$$|z-a| < R$$

(при $R = 0$ ряд (2) сходится только при $z = a$, а при $R = \infty$ — во всей комплексной плоскости). Ряд (3) сходится в области

$$|z-a| > \rho.$$

Если $\rho < R$, то ряд (1) сходится в области

$$D = \{z\colon \rho < |z-a| < R\}, \tag{4}$$

т. е. в круговом кольце с центром в точке a (эту область называют *кольцом сходимости ряда* Лорана (1)).

Сумма ряда Лорана в области (4) является регулярной функцией, а во всяком замкнутом кольце

$$D_1 = \{z\colon \rho < \rho_1 \leqslant |z-a| \leqslant R_1 < R\},$$

где $D_1 \subset D$, ряд (1) сходится равномерно.

2. Разложение регулярной функции в ряд Лорана.

Функция $f(z)$, регулярная в кольце D, представляется в этом кольце сходящимся рядом Лорана (1), т. е.

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n, \tag{5}$$

где

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta - a| = R_0} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad \rho < R_0 < R, \tag{6}$$

окружность в формуле (6) ориентирована положительно (обход совершается против часовой стрелки).

Разложение (5) функции $f(z)$, регулярной в кольце D, единственно.

3. Неравенства Коши для коэффициентов ряда Лорана.

Если функция $f(z)$ регулярна в кольце

$$D = \{z \colon \rho < |z-a| < R\},$$

и при этом

$$M = \max_{z \in \gamma_r} |f(z)|,$$

где

$$\gamma_r = \{z \colon |z-a| = r,\ \rho < r < R\},$$

то для коэффициентов c_n ряда Лорана (5) справедливы неравенства

$$|c_n| \leqslant \frac{M}{r^n}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Замечание. Для нахождения коэффициентов c_n ряда Лорана (5) функции $f(z)$, регулярной в кольце $D = \{z \colon \rho < |z - a| < R\}$, формулы (6) обычно не используют, а представляют функцию $f(z)$ в виде суммы $f_1(z) + f_2(z)$, где функция $f_1(z)$ регулярна в области $|z-a| < R$, а функция $f_2(z)$ регулярна в области $|z-a| > \rho$. Разложив функцию $f_1(z)$ в ряд Тейлора в окрестности точки a, а функцию $f_2(z)$ — по отрицательным степеням $z-a$ с помощью приемов, указанных в § 7, можно найти разложение (5). Если $f(z)$ — рациональная функция, то ее представляют в виде суммы простых дробей.

Примеры с решениями

Пример. Функцию $f(z)=\frac{1}{(1-z)(z+3)}$, регулярную в областях $D_1=\{z\colon |z|<1\}$, $D_2=\{z\colon 1<|z|<3\}$, $D_3=\{z\colon |z|>3\}$, разложить в этих областях в ряд Лорана.

Решение. Представим $f(z)$ в виде суммы простых дробей:

$$f(z)=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1-z}+\frac{1}{z+3}\right). \tag{7}$$

Если $|z|<1$, то

$$\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty} z^n, \tag{8}$$

а если $|z|>1$, то

$$\frac{1}{1-z}=-\frac{1}{z\left(1-\frac{1}{z}\right)}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}. \tag{9}$$

Аналогично, если $|z|<3$, то

$$\frac{1}{z+3}=\frac{1}{3\left(1+\frac{z}{3}\right)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{3^{n+1}}, \tag{10}$$

а если $|z|>3$, то

$$\frac{1}{z+3}=\frac{1}{z\left(1+\frac{3}{z}\right)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}3^{n-1}}{z^n}. \tag{11}$$

а) В области D_1, где $|z|<1$, используя формулы (7), (8), (10), получаем

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4}\left[1+\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}\right]z^n.$$

Этот ряд есть ряд Тейлора для функции $f(z)$.

б) В области D_2, где $1 < |z| < 3$, используя формулы (7), (9), (10), имеем

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{4}\right) \frac{1}{z^n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{4 \cdot 3^{n+1}}.$$

Этот ряд содержит как положительные, так и отрицательные степени z.

в) В области D_3, где $|z| > 3$, используя разложения (7), (9), (11), находим

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 3^{n-1} - 1}{4z^n}.$$

Этот ряд содержит только отрицательные степени z.

Пример. Рациональная функция $f(z)$ разложена в ряд Лорана

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n (n+1)}{z^{2n}} - \frac{4^{n+1}}{z^{2n+1}} \right).$$

Разложить ее в ряд Лорана по степеням z в кольце, содержащем точку $z = \frac{3}{2}$. Указать границы кольца сходимости.

Решение. Ряд $f_1(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+1)}{z^{2n}}$ сходится в области $|z| > 1$, а ряд

$$f_2(z) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^{n+1}}{z^{2n+1}} = -\frac{4}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{4}{z^2}\right)^n$$

сходится, если $\left|\frac{4}{z^2}\right| < 1$, т. е. $|z| > 2$. Так как точка $z = \frac{3}{2}$ содержится в кольце $1 < |z| < 2$, то функцию $f_2(z)$ нужно представить рядом по степеням z, сходящимся в области $|z| < 2$.

Используя разложение $\sum\limits_{n=0}^{\infty} t^n = \frac{1}{1-t}$, запишем $f_2(z)$ в виде

$$f_2(z) = -\frac{4}{z} \cdot \frac{1}{1 - \frac{4}{z^2}} = -\frac{4z}{z^2 - 4} = \frac{z}{1 - \frac{z^2}{4}},$$

откуда

$$f_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{4^n}, \quad |z| < 2,$$

а искомое разложение

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+1)}{z^{2n}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{4^n}, \quad 1 < |z| < 2. \qquad \blacktriangle$$

Пример. Разложить в ряд Лорана в кольце с центром в точке $z = 0$, которому принадлежит точка $z = 3$, функцию

$$f(z) = \frac{3z^3 + 6z^2 - 8}{z^2 - 3z - 4}.$$

Указать границы кольца сходимости.

Решение. Разделив многочлен $3z^3 + 6z^2 - 8$ на многочлен $z^2 - 3z - 4$, запишем функцию $f(z)$ в виде

$$f(z) = 3z + 15 + \frac{57z + 52}{(z-4)(z+1)},$$

а затем представим полученную правильную дробь в виде суммы простых дробей:

$$\frac{57z + 52}{(z-4)(z+1)} = \frac{A}{z-4} + \frac{B}{z+1},$$

где

$$A = \left. \frac{57z + 52}{z+1} \right|_{z=4} = 56, \quad B = \left. \frac{57z + 52}{z-4} \right|_{z=-1} = 1.$$

Следовательно,

$$f(z) = 3z + 15 + \frac{56}{z-4} + \frac{1}{z+1}.$$

Функция $f(z)$ регулярна во всей комплексной плоскости с выколотыми точками $z_1 = -1$, $z_2 = 4$ и ее можно разложить в ряд по степеням z в областях $|z| < 1$, $1 < |z| < 4$ и $|z| > 4$. Точка $z = 3$ принадлежит кольцу $1 < |z| < 4$. Поэтому функцию $\frac{56}{z-4}$ нужно разложить в ряд по положительным степеням z, а функцию $\frac{1}{z+1}$ — в ряд по отрицательным степеням z. Преобразуем исходную функцию:

$$f(z) = 3z + 15 - \frac{14}{1 - \frac{z}{4}} + \frac{1}{z\left(1 + \frac{1}{z}\right)},$$

откуда

$$f(z) = 3z + 15 - 14\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{4}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{z^{n+1}} =$$

$$= 1 - \frac{z}{2} - 14\sum_{n=2}^{\infty}\frac{z^n}{4^n} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{z^n}.$$

Полученный ряд сходится в кольце $1 < |z| < 4$.

Пример. Разложить функцию $f(z) = \frac{z^2+2}{z(z+2i)}$ в ряд Лорана по степеням $z - 2i$ в кольце D, которому принадлежит точка $z = 1$. Указать границы кольца сходимости.

Решение. Представим $f(z)$ в виде

$$f(z) = \frac{z^2 + 2iz - 2iz + 2}{z(z+2i)} = 1 - i\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z+2i}\right).$$

Функция $f(z)$ регулярна во всей комплексной плоскости с выколотыми точками $z = 0$ и $z = -2i$. Поэтому ее можно разложить в ряд Лорана по степеням $z - 2i$ в областях

$$|z - 2i| < 2, \quad 2 < |z - 2i| < 4, \quad |z - 2i| > 4.$$

Полагая $z - 2i = t$, получим $f(z) = \varphi(t)$, где

$$\varphi(t) = 1 - \frac{i}{t+2i} - \frac{i}{t+4i}.$$

Так как точка $z = 1$ принадлежит кольцу

$$2 < |z - 2i| < 4,$$

то функцию $\varphi(t)$ нужно разложить по степеням t в области $2 <$

$< |t| < 4$. Преобразуем функцию $\varphi(t)$:

$$\varphi(t) = 1 - \frac{i}{t\left(1 + \frac{2i}{t}\right)} - \frac{1}{4\left(1 + \frac{t}{4i}\right)}.$$

Тогда

$$\varphi(t) = 1 - i\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(2i)^n}{t^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^n}{i^n 4^{n+1}},$$

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2i)^n}{2(z-2i)^n} + \frac{3}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(4i)^n}(z-2i)^n,$$

$$2 < |z - 2i| < 4. \qquad \blacktriangle$$

Пример. Разложить функцию

$$f(z) = \left(\frac{z^2}{2} - 2z + \frac{5}{2}\right)\cos\frac{1}{z-2}$$

в ряд Лорана по степеням $z - 2$ в кольце

$$D = \{z\colon 0 < |z-2| < \infty\}.$$

Решение. Пусть $z - 2 = t$, тогда

$$f(z) = \frac{1}{2}(t^2+1)\cos\frac{1}{t} = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{t^{2(n-1)}(2n)!} + \frac{(-1)^n}{t^{2n}(2n)!}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+2)!} + \frac{(-1)^n}{(2n)!}\right)\frac{1}{t^{2n}} =$$

$$= \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(4n^2+6n+1)}{2(2n+2)!\,t^{2n}} =$$

$$= \frac{1}{2}(z-2)^2 + \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(4n^2+6n+1)}{2(2n+2)!(z-2)^{2n}}. \qquad \blacktriangle$$

§ 2. Изолированные особые точки однозначного характера

Справочные сведения

1. Классификация изолированных особых точек.

Пусть функция $f(z)$ регулярна в некоторой окрестности точки $a \neq \infty$, т. е. в кольце

$$0 < |z-a| < \rho,$$

но не регулярна в точке a. Тогда точка a называется *изолированной особой точкой однозначного характера функции* $f(z)$.

Аналогично, бесконечно удаленная точка называется изолированной особой точкой однозначного характера функции $f(z)$, если эта функция регулярна в некоторой области

$$\rho < |z| < \infty.$$

В зависимости от поведения функции $f(z)$ вблизи особой точки a различают три типа особых точек. Изолированная конечная или бесконечно удаленная особая точка a однозначного характера функции $f(z)$ называется

1) *устранимой особой точкой*, если существует конечный предел $\lim\limits_{z\to a} f(z)$;
2) *полюсом*, если существует бесконечный предел $\lim\limits_{z\to a} f(z) = \infty$;
3) *существенно особой точкой*, если не существует (ни конечного, ни бесконечного) предела функции $f(z)$ в точке a.

2. Ряд Лорана в окрестности особой точки.

Если функция $f(z)$ регулярна в кольце $0 < |z-a| < \rho$, то ее можно представить в виде сходящегося в этом кольце ряда

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n, \qquad (1)$$

который называют *рядом Лорана функции* $f(z)$ *в окрестности* *точки* a, а ряды

$$f_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-a)^n}, \tag{2}$$

$$f_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n \tag{3}$$

называют соответственно *главной частью* и *правильной частью* ряда Лорана функции $f(z)$ в окрестности точки a.

Аналогично, если функция регулярна в области $R < |z| < \infty$, то она представляется сходящимся в этой области рядом

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n, \tag{4}$$

который называют *рядом Лорана функции* $f(z)$ *в окрестности бесконечно удаленной точки*, а ряды

$$f_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n, \tag{5}$$

$$f_2(z) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} z^{-n} \tag{6}$$

называют соответственно главной и правильной частью ряда (4).

Главные части (2) и (5) рядов Лорана (1) и (4) состоят из всех тех и только тех членов этих рядов, которые стремятся к бесконечности при $z \to a$ $(z \to \infty)$. Функцию $f(z)$ называют регулярной в точке $z = \infty$, если эта функция регулярна в кольце $R < |z| < \infty$ и существует конечный $\lim\limits_{z \to \infty} f(z)$.

3. Устранимая особая точка.

Для того чтобы конечная или бесконечно удаленная изолированная особая точка a была устранимой, необходимо и достаточно, чтобы все коэффициенты главной части ряда Лорана в окрестности точки a были равны нулю, т. е. $f_1(z) \equiv 0$. Если точка $z = a$, где $a \neq \infty$, является устранимой особой точкой функции

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n, \quad 0 < |z-a| < R,$$

то, полагая

$$f(a) = \lim_{z \to a} f(z) = c_0,$$

получаем функцию, регулярную в точке a. Поэтому нередко устранимую особую точку рассматривают как точку регулярности.

4. Полюс

4.1. Для того чтобы изолированная особая точка a (конечная и бесконечно удаленная) была полюсом функции $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы главная часть ряда Лорана функции $f(z)$ в окрестности точки a содержала конечное число ненулевых слагаемых.

4.2. Полюс в конечной точке

а) Точка $z = a$, где $a \neq \infty$, является полюсом функции $f(z)$ тогда и только тогда, когда эта функция представляется в виде

$$f(z) = (z-a)^{-m} h(z), \quad h(a) \neq 0, \quad m \in \mathbb{N}, \tag{7}$$

где $h(z)$ — функция, регулярная в точке a. Число m называется *порядком полюса.*

Если точка $a \neq \infty$ — полюс функции $f(z)$, то его порядок — такое число $m \in \mathbb{N}$, что

$$\lim_{z \to a} f(z)(z-a)^m = \alpha,$$

где $\alpha \neq 0$, или

$$f(z) \sim \frac{\alpha}{(z-a)^m}, \quad \alpha \neq 0 \quad (z \to a). \tag{8}$$

б) Пусть $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$, где $g(z)$ и $h(z)$ — функции, регулярные в точке $a \neq \infty$. Тогда если $g(a) \neq 0$, а точка a — нуль кратности m функции $h(z)$, то $z = a$ — полюс m-го порядка функции $f(z)$; если точка a является нулем функций $g(z)$

и $h(z)$ кратности k и m соответственно, то при $m > k$ точка $z = a$ — полюс функции $f(z)$ кратности $m - k$, а при $m \leqslant k$ — устранимая особая точка.

4.3. Полюс в бесконечно удаленной точке

а) Точка $z = \infty$ является полюсом функции $f(z)$ тогда и только тогда, когда эта функция представляется в виде

$$f(z) = z^m g(z), \quad g(\infty) \neq 0, \quad m \in \mathbb{N}. \tag{9}$$

Число m в формуле (9) называется *порядком полюса* $z = \infty$.

Если $z = \infty$ — полюс функции $f(z)$, то его порядок m — такое число, что $\lim\limits_{z\to\infty} \frac{f(z)}{z^m} = \alpha$, где $\alpha \neq 0$, или

$$f(z) \sim \alpha z^m, \quad \alpha \neq 0 \quad (z \to \infty). \tag{10}$$

б) Порядок m полюса $z = \infty$ функции $f(z)$ равен кратности нуля функции $f\left(\frac{1}{z}\right)$ в точке $z = 0$.

5. Существенно особая точка

5.1. Для того чтобы изолированная особая точка a была существенно особой точкой функции $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы главная часть ряда Лорана функции $f(z)$ в окрестности точки a содержала бесконечное число ненулевых слагаемых.

5.2. Теорема Сохоцкого. *Если $a \in \overline{\mathbb{C}}$ — существенно особая точка функции $f(z)$, то для любого $A \in \overline{\mathbb{C}}$ найдется последовательность точек $\{z_n\}$, сходящаяся к точке a и такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n) = A$.*

5.3. Теорема Пикара. *Если $a \in \overline{\mathbb{C}}$ — существенно особая точка функции $f(z)$, то для любого $A \in \overline{\mathbb{C}}$, кроме, быть может, одного, уравнение $f(z) = A$ имеет в любой окрестности точки a бесконечное множество решений (корней).*

6. Целые и мероморфные функции

6.1. Если функция $f(z)$ регулярна в каждой точке $z \in \mathbb{C}$, то такая функция называется *целой*. Функция $f(z)$ называется *мероморфной*, если на каждом ограниченном множестве $G \in \mathbb{C}$ эта функция регулярна, за исключением, быть может, конечного числа полюсов.

6.2. Если $z = \infty$ — полюс порядка n целой функции $f(z)$, то $f(z)$ — многочлен степени n, а если целая функция $f(z)$ регулярна в точке $z = \infty$, то $f(z) = \text{const}$. Целую функцию, для которой $z = \infty$ — существенно особая точка, называют *целой трансцедентной.* Такими являются функции

$$e^z, \quad \sin z, \quad \cos z, \quad \operatorname{sh} z, \quad \operatorname{ch} z.$$

6.3. Теорема Лиувилля для целой функции. *Если целая функция $f(z)$ удовлетворяет в области $R < |z| < \infty$ неравенству*

$$|f(z)| \leqslant M|z|^m,$$

где $M > 0$, m — целое, $m \geqslant 0$, то $f(z)$ — многочлен степени не выше m.

Примеры с решениями

Пример. Найти все особые точки функции $f(z)$ и определить их вид (тип), если: $f(z) = \frac{1}{\cos 1/z}$

1) $f(z) = e^{1/z^2}$; 2) $f(z) = \frac{z^6}{(z+1)^2(z^2+4)}$;

3) $f(z) = \frac{1}{\cos 1/z}$; 4) $f(z) = \frac{z-\pi}{\sin 2z - 2\sin z}$;

5) $f(z) = e^{1/\sin z}$; 6) $f(z) = \frac{1}{z} - \frac{1}{e^z - 1}$.

Решение. 1) Функция e^{1/z^2} регулярна во всех точках $z \in \in \mathbb{C}$, кроме точки $z = 0$. Пусть $z = x + iy$, тогда если $z = = x$, то $e^{1/x^2} \to \infty$ при $x \to 0$, а если $z = iy$, то $e^{-1/y^2} \to 0$ при $y \to 0$. Таким образом, функция e^{1/z^2} не имеет предела в точке $z = 0$ и поэтому $z = 0$ — существенно особая точка этой функции. Это можно установить, представив функцию e^{1/z^2} рядом Лорана в окрестности точки $z = 0$, т. е. рядом

$$e^{1/z^2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n! z^{2n}}.$$

Главная часть этого ряда $f_1(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n! z^{2n}}$ содержит бесконечное число ненулевых слагаемых.

Точка $z = \infty$ есть точка регулярности функции e^{1/z^2}, так как

$$\lim_{z\to\infty} e^{1/z^2} = 0.$$

Это утверждение равносильно тому, что функция e^{ζ^2} регулярна в точке $\zeta = 0$.

2) Нули функций $(z+1)^2$ и z^2+4, т.е. точки $z_1 = -1$, $z_2 = 2i$, $z_3 = -2i$ являются полюсами функции $f(z)$, причем z_1 — полюс второго порядка, а z_2 и z_3 — полюса первого порядка, так как эти точки не являются нулями функции z^6, z_1 — нуль кратности 2 функции $(z+1)^2$, а z_2 и z_3 — нули кратности 1 функции z^2+4.

Точка $z = \infty$ — полюс второго порядка функции $f(z)$, так как $f(z)$ регулярна в области $|z| > 2$ и $f(z) \sim z^2$ при $z \to \infty$. Других особых точек в $\overline{\mathbb{C}}$ у функции $f(z)$ нет.

3) Нули функции $\cos\frac{1}{z}$, т.е. точки

$$z_k = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + \pi k}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

являются полюсами первого порядка. Действительно, если $\varphi(z) = \cos\frac{1}{z}$, то

$$\varphi'(z_k) = -\frac{1}{z_k^2}\sin\frac{1}{z_k} = \frac{(-1)^{n+1}}{z_k^2} \neq 0.$$

Точка $z = 0$ не является изолированной особой точкой. Она является предельной точкой (точкой накопления) полюсов z_k.

Точка $z = \infty$ — точка регулярности функции $f(z)$, так как функция $\frac{1}{\cos\zeta}$ регулярна в точке $\zeta = 0$. Других особых точек в $\overline{\mathbb{C}}$ у функции $f(z)$ нет.

4) Пусть $g(z) = \sin 2z - 2\sin z$, тогда

$$g(z) = 2\sin z(\cos z - 1).$$

Так как $z_k = k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$ — нули кратности 1 функции $\sin z$, а $\widetilde{z}_m = 2m\pi \quad (m \in \mathbb{Z})$ — нули кратности 1 функции $\cos z - 1$, то

$z'_n = 2n\pi \quad (n \in \mathbb{Z})$ — нули кратности 2 функции $g(z)$, а

$$z''_n = (2n+1)\pi \quad (n \in \mathbb{Z})$$

— нули кратности 1 этой функции. Поэтому точки z'_n — полюсы второго порядка функции $f(z)$, а точки z''_n (кроме точки $z = \pi$) — полюсы первого порядка функции $f(z)$, так как $z = \pi$ — нуль функции $z - \pi$.

Точка $z = \infty$ является предельной точкой полюсов функции $f(z)$, а других особых точек (кроме перечисленных) у функции $f(z)$ в $\overline{\mathbb{C}}$ нет.

5) Покажем, что точки $z_k = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ (нули функции $\sin z$) являются существенно особыми точками функции $f(z)$. Пусть $g(z) = \sin z$, тогда

$$g(z_k) = 0, \quad g'(z_k) = \cos k\pi = (-1)^k$$

и поэтому

$$\sin z = (-1)^k (z - k\pi) h(z), \quad \text{где} \quad h(k\pi) = 1.$$

Пусть $k = 2n$, тогда

$$\sin z = (z - 2\pi n) h(z).$$

Если $z = x$ и $x \to 2\pi n + 0$, то $\sin x \to +0$ и $f(x) \to +\infty$, а если $z = x$ и $x \to 2\pi - 0$, то $\sin x \to -0$ и $f(x) \to 0$. Таким образом, функция $f(z)$ не имеет предела при $z \to 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, и точки $2\pi n$ — существенно особые.

Аналогично установим, что точки $(2n+1)\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, также являются существенно особыми. Итак, точки $z_k = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, — существенно особые точки функции $f(z)$, а точка $z = \infty$ — их предельная точка.

6) Запишем $f(z)$ в виде

$$f(z) = \frac{e^z - 1 - z}{z(e^z - 1)}.$$

Нули функции $e^z - 1$, т. е. точки $z_k = 2k\pi i$ $(k \in \mathbb{Z},\ k \neq 0)$ — полюсы первого порядка функции $f(z)$ (они не являются нулями функции $e^z - 1 - z$). Точка $z = 0$ — устранимая особая точка, так как она является нулем второго порядка функций e^z-1-z и $z(e^z-1)$. Точка $z=\infty$ — предельная точка полюсов функции $f(z)$.

Пример.

Найти главную часть $f_1(z)$ ряда Лорана функции $f(z)$ в окрестности точки a и определить вид особой точки a, если $f(z)=z\cos\frac{1}{z-1},\ \ a=1$

1) $f(z)=z^3e^{1/z},\ \ a=0;$ 2) $f(z)=\frac{1}{(z^2+1)^2},\ \ a=i;$

3) $f(z)=z\cos\frac{1}{z-1},\ \ a=1;$ 4) $f(z)=\frac{z^5+z^2}{z^2+4},\ \ a=\infty.$

Решение. 1) Так как $e^{1/z}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n n!}$, то

$$f(z)=z^3+z^2+\frac{z}{2}+\frac{1}{6}+\sum_{n=4}^{\infty}\frac{1}{n!z^{n-3}},$$

$$f_1(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+3)!z^n}.$$

Главная часть $f_1(z)$ содержит бесконечное число ненулевых слагаемых и поэтому $z=0$ — существенно особая точка функции $f(z)$.

2) $f(z)=\frac{h(z)}{(z-i)^2}$,

$$h(z)=\frac{1}{(z+i)^2}=h(i)+h'(i)(z-i)+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{h^{(k)}(i)}{k!}(z-i)^k,$$

где $h(i)=-\frac{1}{4},\ \ h'(i)=-\frac{2}{(2i)^3}=-\frac{i}{4}$, откуда

$$f_1(z)=\frac{h(i)}{(z-i)^2}+\frac{h'(i)}{z-i}=-\frac{1}{4(z-i)^2}-\frac{i}{4(z-i)},$$

а $z=i$ — полюс второго порядка функции $f(z)$.

3) Пусть $z-1=t$, тогда $f(z)=\varphi(t)=(t+1)\cos\frac{1}{t}$. Представим функцию $\varphi(t)$ в окрестности точки $t=0$ ее рядом Лорана

$$\varphi(t)=(t+1)\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!t^{2n}}\right).$$

Отсюда следует, что главная часть ряда Лорана функции $f(z)$

в окрестности точки $z = 1$ — ряд

$$f_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!z^{2n-1}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!z^{2n}},$$

а $z = 1$ — существенно особая точка функции $f(z)$.

4) Разделив многочлен $z^5 + z^2$ на многочлен $z^2 + 4$, представим функцию $f(z)$ в виде

$$f(z) = z^3 - 4z + \frac{z^2 + 16z}{z^2 + 4}.$$

Функция $g(z) = \frac{z^2+16z}{z^2+4}$ регулярна в точке $z = \infty$, так как она регулярна в области $|z| > 2$ и существует $\lim\limits_{z\to\infty} g(z) = 1$.

Поэтому главная часть ряда Лорана функции $f(z)$ в окрестности бесконечно удаленной точки есть сумма $z^3 - 4z$, а $z = \infty$ — полюс третьего порядка функции $f(z)$.

Пример. Пусть $a \neq \infty$ — существенно особая точка функции $f(z)$ и полюс функции $g(z)$. Докажем, что $z = a$ — существенно особая точка функции $\varphi(z) = f(z)g(z)$.

Решение. Предположим противное. Тогда $z = a$ — либо устранимая особая точка, либо полюс функции $\varphi(z)$. Если $z = a$ — устранимая особая точка функции $\varphi(z)$, то существует конечный $\lim\limits_{z\to a} \varphi(z) = A$. По условию $z = a$ — полюс функции $g(z)$ и поэтому $g(z) = \frac{h(z)}{(z-a)^m}$, $h(a) \neq 0$, $m \in \mathbb{N}$. Но тогда функция

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{g(z)} = \frac{\varphi(z)}{h(z)}(z-a)^m$$

имеет в точке a предел, равный нулю, что противоречит условию (функция $f(z)$ не имеет предела в точке a, так как для нее точка a является существенно особой). Если $z = a$ — полюс функции $\varphi(z)$, то

$$\varphi(z) = \frac{h_1(z)}{(z-a)^k}, \quad h_1(a) \neq 0, \quad k \in \mathbb{N},$$

и тогда

$$f(z) = \frac{h_1(z)}{h(z)}(z-a)^{m-k},$$

откуда следует, что при $m \geqslant k$ точка $z = a$ является устранимой, а при $m < k$ — полюсом функции $f(z)$, что противоречит условию.

Итак, $z = a$ — существенно особая точка функции $\varphi(z)$.

Пример. Найти все особые точки функции $f(z)$ и определить их вид: $f(z) = \frac{e^{1/z^3}\cos\frac{1}{z+1}}{\sin^3 z(z^4+1)^2}$

1) $f(z) = \frac{e^{1/(i-z)}}{1+\sin\frac{\pi i z}{2}}$; 2) $f(z) = \frac{e^{\operatorname{ctg}\pi z}}{(z^2-1)^2(\operatorname{ch} z+1)}$;

3) $f(z) = \frac{e^{1/z^3}\cos\frac{1}{z+1}}{\sin^3 z(z^4+1)^2}$; 4) $f(z) = \frac{(z^2+\pi^2)\operatorname{tg} z}{\operatorname{sh} z}\left(e^{\pi/(2z)} - e\right)$.

Решение. 1) Особыми точками функции $f(z)$ в $\mathbb{C}$ могут быть только точка $z = i$ и корни уравнения $\sin\frac{\pi i z}{2} = -1$ — точки z_k такие, что

$$\frac{\pi i z_k}{2} = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi,$$

откуда $z_k = i(1-4k)$, $k \in \mathbb{Z}$. Точка i является существенно особой точкой функции $e^{1/(i-z)}$ и полюсом функции $\frac{1}{1+\sin(\pi i z/2)}$.

Откуда следует (пример 3), что $z = i$ — существенно особая точка функции $f(z)$. Точки z_k $(k \neq 0)$ — полюсы первого порядка функции $f(z)$, так как в силу условия $\cos\frac{\pi i z_k}{2} \neq 0$ они являются нулями кратности 1 функции $1+\sin\frac{\pi i z}{2}$, а $z = \infty$ — предельная точка полюсов.

2) Особыми точками функции $f(z)$ в $\mathbb{C}$ могут быть только точки 1 и -1, а также корни z_k уравнения $\sin\pi z = 0$ (числа $z_k = k$, $k \in \mathbb{Z}$) и корни $\widetilde{z}_k$ уравнения $\operatorname{ch} z = -1$, равносильного уравнению $e^z = -1$, откуда $\widetilde{z}_k = i\pi + 2k\pi i$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Точки $z_k = k$ $(k \in \mathbb{Z},\ k \neq \pm 1)$ — существенно особые точки функции $f(z)$, точки $z = \pm 1$ также являются (пример 3) существенно особыми — это полюсы функции $\frac{1}{(z^2-1)^2(\operatorname{ch} z+1)}$.

Точки $\widetilde{z}_k$ — полюсы первого порядка $(\operatorname{sh} z_k \neq 0)$ функции $f(z)$. Точка $z = \infty$ — предельная точка для точек z_k и $\widetilde{z}_k$.

3) Точка $z = 0$ — нуль функции $\sin z = 0$ (полюс функции $f(z)e^{-1/z^3}$) и существенно особая точка функции e^{-1/z^3} является существенно особой точкой функции $f(z)$ (пример 3).

Точка $z = -1$ также является существенно особой точкой функции $f(z)$.

Корни уравнения

$$z^4 = -1,$$

т. е. точки $z_k = e^{i\pi(2k+1)/4}$ $(k = 0,\ 1,\ 2,\ 3)$ — полюсы второго порядка, а точки $\widetilde{z}_k = k\pi$ $(k \in \mathbb{Z},\ \ k \neq 0)$ — полюсы третьего порядка функции $f(z)$. Точка $z = \infty$ — предельная точка полюсов $\widetilde{z}_k$.

4) Особыми точками в $\mathbb{C}$ могут быть только нули функций $\cos z$, $\operatorname{sh} z$ и точка $z = 0$. Точка $z = 0$ — существенно особая точка функций $e^{\pi/(2z)}$ и $f(z)$, точки $z_k = \frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ — нули кратности 1 функции $\cos z$ — являются полюсами первого порядка функции $f(z)$. Нули функции $\operatorname{sh} z$ — точки $\widetilde{z}_k = k\pi i$ $(k \in \mathbb{Z},\ \ k \neq \pm 1)$ — являются полюсами первого порядка функции $f(z)$, а $i\pi$ и $-i\pi$ — устранимые особые точки, $z = \infty$ — предельная точка полюсов $\widetilde{z}_k$.

§ 3. Вычисление вычетов

Справочные сведения

1. Определение вычета

1.1. Вычет в конечной точке.

Пусть $a \in \mathbb{C}$ — изолированная особая точка однозначного характера функции $f(z)$. Тогда функция $f(z)$ регулярна в кольце $0 < |z - a| < \rho$.

Если

$$\gamma_R = \{z\colon |z - a| = R\},$$

где $0 < R < \rho$ — положительно ориентированная окружность, то *вычетом функции* $f(z)$ *в точке* a называется число

$$\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma_R} f(z)\, dz,$$

которое обозначается $\operatorname*{res}_{z=a} f(z)$. Итак,

$$\operatorname*{res}_{z=a} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|z-a|=R} f(z)\,dz. \tag{1}$$

Символ $\oint$ указывает на то, что обход контура совершается в положительном направлении (против часовой стрелки).

1.2. Вычет в бесконечно удаленной точке.

Пусть функция $f(z)$ регулярна в области $|z| > \rho$ (точка $z = \infty$ является либо изолированной особой точкой однозначного характера, либо точкой регулярности функции $f(z)$). Тогда *вычетом функции $f(z)$ в бесконечности* называется число, определяемое формулой

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\gamma_R} f(z)\,dz, \quad 0 < \rho < R, \tag{2}$$

где $\gamma_R = \{z\colon |z| = R\}$ — окружность радиуса R, ориентированная по часовой стрелке (при обходе γ_R область $|z| > R$ остается слева).

Заметим, что если функция $f(z)$ регулярна в точке $a \neq \infty$, то $\operatorname*{res}_{z=a} f(z) = 0$, а если функция $f(z)$ регулярна в точке $z = \infty$, то отсюда не следует, что ее вычет в бесконечности равен нулю $\left(\operatorname*{res}_{z=\infty} 1/z = -1\right)$.

2. Теорема о вычетах.

Если функция $f(z)$ регулярна в $\mathbb{C}$, за исключением конечного числа изолированных особых точек $z_1, z_2, \ldots, z_n$, то сумма всех вычетов функции $f(z)$, включая и вычет в точке $z = \infty$, равна нулю, т. е.

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z) + \operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = 0,$$

откуда

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = -\sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z). \tag{3}$$

3. Вычеты и ряд Лорана

3.1. Если функция $f(z)$ регулярна в проколотой окрестности точки a, т. е. в кольце $0 < |z - a| < \rho$, то она представляется в этом кольце рядом Лорана

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n, \tag{4}$$

где $f_1(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-a)^n}$ — главная часть ряда Лорана.

Тогда

$$\operatorname*{res}_{z=a} f(z) = c_{-1}, \tag{5}$$

т. е. вычет функции $f(z)$ в точке a равен коэффициенту ряда Лорана (4) при $\frac{1}{z-a}$.

3.2. Если $f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$ — ряд Лорана функции $f(z)$, регулярной в окрестности точки $z = \infty$ (в области $|z| > \rho$), то

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = -c_1, \tag{6}$$

т. е. вычет в точке $z = \infty$ равен коэффициенту этого ряда при $\frac{1}{z}$, взятому со знаком минус.

4. Формулы для вычета в конечной точке.

4.1. Полюс первого порядка.

Если $z = a$ $(a \neq \infty)$ — полюс первого порядка (простой полюс) функции $f(z)$, то

$$\operatorname*{res}_{z=a} f(z) = \lim_{z \to a} \left[(z-a) f(z)\right]. \tag{7}$$

Пусть $f(z) = \frac{h(z)}{\varphi(z)}$, где $h(z)$ и $\varphi(z)$ — функции, регулярные в точке a, причем

$$\varphi(a) = 0, \quad \varphi'(a) \neq 0.$$

Тогда

$$\operatorname*{res}_{z=a} f(z) = \frac{h(a)}{\varphi'(a)}. \tag{8}$$

В частности, если $\varphi(z) = z - a$, т. е.

$$f(z) = \frac{h(z)}{z-a},$$

то

$$\operatorname*{res}_{z=a} f(z) = h(a). \tag{9}$$

4.2. Полюс порядка $m > 1$.

Если $z = a$ $(a \neq \infty)$ — полюс порядка $m > 1$, то

$$\operatorname*{res}_{z=a} f(z) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z\to a} \left[(z-a)^m f(z)\right]^{(m-1)}. \tag{10}$$

В частности, если

$$f(z) = \frac{h(z)}{(z-a)^m}, \tag{11}$$

где $h(z)$ — функция, регулярная в точке, и $h(a) \neq 0$, то

$$\operatorname*{res}_{z=a} f(z) = \frac{1}{(m-1)!} h^{(m-1)}(a), \tag{12}$$

т. е. вычет функции $f(z)$ в точке a равен коэффициенту при $(z-a)^{m-1}$ ряда Тейлора $h(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$.

5. Формулы для вычета в бесконечно удаленной точке.

5.1. Если функция $f(z)$ регулярна в точке $z = \infty$, то

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = \lim_{z\to\infty} \left[z\left(f(\infty) - f(z)\right)\right]. \tag{13}$$

5.2. Пусть $z = \infty$ — нуль порядка k функции $f(z)$, тогда

$$f(z) \sim \frac{A}{z^k} \quad \text{при} \quad z \to \infty, \quad A \neq 0. \tag{14}$$

Если в асимптотической формуле (14) $k = 1$, то

$$f(z) \sim \frac{A}{z} \quad \text{и тогда} \quad \operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = -A, \tag{14}$$

а если $k \geqslant 2$, то $\operatorname*{res}\limits_{z=\infty} f(z) = 0$.

5.3. Если функция $f(z)$ представлена в виде $f(z) = \varphi\left(\frac{1}{z}\right)$, где функция $\varphi(\zeta)$ регулярна в точке $\zeta = 0$, то

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = -\varphi'(0). \tag{15}$$

Примеры с решениями

Пример. $f(z) = \frac{2\cos z - \cos^3 z}{\sin z}$, $a = \pi$ Найти $\operatorname*{res}\limits_{z=a} f(z)$, если:

1) $f(z) = \frac{z^2+7z}{z^2-z-2}$, $a = -1$; 2) $f(z) = ze^{1/z^2}$, $a = \infty$;

3) $f(z) = \frac{2\cos z - \cos^3 z}{\sin z}$, $a = \pi$; 4) $f(z) = \frac{z^3+2z^2+3z}{(z-1)^3}$, $a = 1$;

5) $f(z) = \frac{1}{z(e^{2z}-1)}$, $a = 0$; 6) $f(z) = e^{z/(1-z)}$, $a = 1$ и $a = \infty$;

7) $f(z) = z\sin\frac{z+1}{z-1}$, $a = 1$; 8) $f(z) = \frac{z^2}{(z-2)(z^2+1)}$, $a = \infty$.

Решение. 1) Так как

$$z^2 - z - 2 = (z+1)(z-2),$$

то $f(z) = \frac{g(z)}{z+1}$, где $g(z) = \frac{z^2+7z}{z-2}$. По формуле (9), где $g(-1) = 2$, находим

$$\operatorname*{res}_{z=-1} f(z) = g(-1) = 2.$$

2) Функция $f(z)$ представляется в области $D = \{z\colon 0 < |z| < < \infty\}$ рядом Лорана

$$f(z) = z + \frac{1}{z} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!z^{2n-1}},$$

в котором коэффициент при $\frac{1}{z}$ равен 1. По формуле (6) находим $\operatorname*{res}\limits_{z=\infty} f(z) = -1$.

3) Точка $z = \pi$ — полюс первого порядка функции $f(z)$, так как $z = \pi$ — нуль кратности 1 функции $\sin z$. Пусть

$$h(z) = 2\cos z - \cos^3 z, \quad \varphi(z) = \sin z.$$

Тогда по формуле (8), где $h(\pi) = -1$, $\varphi'(\pi) = -1$, находим $\operatorname*{res}\limits_{z=\pi} f(z) = 1$.

4) Точка $z = 1$ — полюс третьего порядка функции $f(z)$. Пусть

$$h(z) = z^3 + 2z^2 + 3z,$$

тогда по формуле (12), где $h''(z) = 6z + 4$, $h''(1) = 10$, находим

$$\operatorname*{res}_{z=1} f(z) = \frac{h''(1)}{2} = 5.$$

5) Точка $z = 0$ — полюс второго порядка функции $f(z)$. Воспользуемся формулой (10). Найдем

$$\lim_{z\to 0} \left(\frac{z}{e^{2z} - 1}\right)' = \lim_{z\to 0} \frac{e^{2z} - 1 - 2ze^{2z}}{(e^{2z} - 1)^2}.$$

Применяя формулу Тейлора для функции e^{2z}, получаем

$$e^{2z} - 1 - 2ze^{2z} = -2z^2 + \ldots\,, \quad (e^{2z} - 1)^2 = 4z^2 + \ldots\,,$$

поэтому искомый предел равен $-\frac{1}{2}$ и $\operatorname*{res}\limits_{z=0} f(z) = -\frac{1}{2}$.

6) Так как $\frac{z}{1-z} = -1 - \frac{1}{z-1}$, то

$$f(z) = e^{-1} \cdot e^{-1/(z-1)} = e^{-1} \left(1 - \frac{1}{z-1} + \frac{1}{2(z-1)^2} + \ldots\right),$$

откуда следует, что

$$\operatorname*{res}_{z=1} f(z) = -e^{-1}.$$

Функция $f(z)$ имеет в $\mathbb{C}$ единственную изолированную особую точку $z = 1$ и регулярна в области $1 < |z| < \infty$. По теореме о вычетах (формула (3))

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = -\operatorname*{res}_{z=1} f(z) = e^{-1}.$$

7) Положим $t = z - 1$, тогда

$$f(z) = (t+1)\sin\left(1 + \frac{2}{t}\right) = \varphi(t)$$

и

$$\operatorname*{res}_{z=1} f(z) = \operatorname*{res}_{t=0} \varphi(z).$$

Найдем коэффициент c_{-1} при $\frac{1}{t}$ ряда Лорана

$$\varphi(t) = (t+1)\left(\sin 1 \cdot \cos\frac{2}{t} + \cos 1 \cdot \sin\frac{2}{t}\right) =$$
$$= (t+1)\left[\sin 1\left(1 - \frac{2}{t^2} + \ldots\right) + \cos 1\left(\frac{2}{t} - \frac{4}{3t^3} + \ldots\right)\right].$$

Отсюда следует, что $c_{-1} = 2\cos 1 - 2\sin 1$ и $\operatorname*{res}_{z=1} f(z) = 2(\cos 1 -$ $- \sin 1)$.

8) Функция $f(z)$ регулярна в области $2 < |z| < \infty$, а точка $z = \infty$ является для этой функции нулем кратности 1, причем $f(z) \sim \frac{1}{z}$ при $z \to \infty$. Это означает, что коэффициент ряда Лорана функции $f(z)$ в окрестности точки $z = \infty$ равен 1 и поэтому $\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = -1$.

Пример. Найти вычеты функции $f(z)$ во всех ее конечных особых точках и в бесконечности, если: $f(z) = \frac{z^3}{z+1}e^{1/z}$

1) $f(z) = \frac{z^4}{1+z^4}$; 2) $f(z) = \frac{\sin z}{z^3(z-\pi)}$;

3) $f(z) = \frac{z^3}{z+1}e^{1/z}$; 4) $f(z) = \frac{1}{z^2-4}\cos\frac{z-1}{z+1}$.

Решение. 1) Нулями функции $z^4 + 1$, т. е. корнями уравнения $z^4 = -1$, являются числа $z_k = e^{i\pi+2k\pi/4}$, $k = 0, 1, 2, 3$, и точки z_k — полюсы первого порядка функции $f(z)$. По формуле (8) находим

$$\operatorname*{res}_{z=z_k} f(z) = \frac{z_k^4}{4z_k^3} = \frac{z_k}{4},$$

где

$$z_0 = \frac{1+i}{\sqrt{2}}, \quad z_1 = \frac{i-1}{\sqrt{2}},$$
$$z_2 = -z_0 = -\frac{1+i}{\sqrt{2}}, \quad z_3 = -z_1 = \frac{1-i}{\sqrt{2}}.$$

По теореме о вычетах

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = -\sum_{k=0}^{3} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z) = 0.$$

Этот результат также следует из того, что ряд Лорана функции $f(z)$ в окрестности бесконечности содержит только члены вида $c_{2k}z^{2k}$ $(k \in \mathbb{Z})$.

2) Точка $z = 0$ — полюс второго порядка функции $f(z)$, а точка $z = \pi$ — устранимая особая точка этой функции (точка регулярности). Других особых точек в конечной плоскости у функции $f(z)$ нет. Найдем коэффициент c_{-1} ряда Лорана при $\frac{1}{z}$ функции $f(z)$. Имеем

$$f(z) = \frac{1}{z^2}\left(1 - \frac{z^2}{3!} + \ldots\right)\left(-\frac{1}{\pi}\right)\left(1 - \frac{z}{\pi}\right)^{-1} =$$
$$= -\frac{1}{\pi z^2}\left(1 - \frac{z^2}{3!} + \ldots\right)\left(1 + \frac{z}{\pi} + \frac{z^2}{\pi^2} + \ldots\right),$$

откуда $c_{-1} = -\frac{1}{\pi^2}$ и $\operatorname*{res}_{z=0} f(z) = -\frac{1}{\pi^2}$.

Далее, $\operatorname*{res}_{z=\pi} f(z) = 0$, а $\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = -\operatorname*{res}_{z=0} f(z) = \frac{1}{\pi^2}$.

3) В конечной плоскости функция $f(z)$ имеет две изолированные особые точки: $z = -1$ (полюс первого порядка) и существенно особую точку $z = 0$.

По формуле (8) находим $\operatorname*{res}_{z=-1} f(z) = -e^{-1}$. Для нахождения вычета в бесконечности воспользуемся разложением функции $f(z)$ в ряд Лорана:

$$f(z) = z^2\left(1 + \frac{1}{z}\right)^{-1} e^{1/z} =$$
$$= z^2\left(1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3} + \ldots\right)\left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{6z^3} + \ldots\right),$$

откуда находим, что коэффициент c_{-1} при $\frac{1}{z}$ равен $\frac{1}{6} - \frac{1}{2} + 1 - 1$, т. е. $c_{-1} = -\frac{1}{3}$. Поэтому $\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = \frac{1}{3}$. По теореме о вычетах

$$\operatorname*{res}_{z=0} f(z) = -\operatorname*{res}_{z=-1} f(z) - \operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = e^{-1} - \frac{1}{3}.$$

4) В конечной плоскости функция $f(z)$ имеет три особые точки: $z_1 = 2$ и $z_2 = -2$ — полюсы первого порядка, $z = -1$ — существенно особая точка.

По формуле (9) находим

$$\operatorname*{res}_{z=2} f(z) = g(2),$$

где

$$g(z) = \frac{1}{z+2} \cos \frac{z-1}{z+1}.$$

Следовательно,

$$\operatorname*{res}_{z=2} f(z) = \frac{1}{4} \cos \frac{1}{3}.$$

Аналогично находим

$$\operatorname*{res}_{z=-2} f(z) = -\frac{1}{4} \cos 3.$$

Функция $f(z)$ регулярна в бесконечности и имеет там нуль второго порядка ($f(z) \sim \cos 1/z^2$ при $z \to \infty$). Поэтому $\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = 0$. По теореме о вычетах

$$\operatorname*{res}_{z=-1} f(z) = -\operatorname*{res}_{z=2} f(z) - \operatorname*{res}_{z=-2} f(z) = \frac{1}{4}\left(\cos 3 - \cos \frac{1}{3}\right). \qquad \blacktriangle$$

Пример.

Пусть

$$P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0,$$
$$Q_n(z) = b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \ldots + b_1 z + b_0,$$

где $a_n \neq 0$, $b_n \neq 0$, т. е. $P_n(z)$ и $Q_n(z)$ — многочлены степени n.

Найдем $\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z)$, где $f(z) = \frac{P_n(z)}{Q_n(z)}$.

Решение. Функция $f(z)$ регулярна в точке $z = \infty$. Для нахождения искомого вычета воспользуемся формулой (13), где $f(\infty) = \frac{a_n}{b_n}$. Тогда

$$z(f(\infty) - f(z)) = z\left(\frac{a_n}{b_n} - \frac{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0}{b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \ldots + b_1 z + b_0}\right) = \varphi(z)$$

или

$$\varphi(z) = z\left(\frac{a_n}{b_n} - \frac{a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \ldots + \frac{a_0}{z^n}}{b_n + \frac{b_{n-1}}{z} + \ldots + \frac{b_0}{z^n}}\right) = \frac{a_n b_{n-1} - b_n a_{n-1}}{b_n^2} + h(z),$$

где $h(z) \to 0$ при $z \to \infty$, откуда

$$\lim_{z\to\infty} \varphi(z) = \frac{a_n b_{n-1} - b_n a_{n-1}}{b_n^2} = \operatorname*{res}_{z=\infty} f(z). \qquad \blacktriangle$$

§ 4. Вычисление интегралов по замкнутому контуру

Справочные сведения

При вычислении интегралов по замкнутым контурам применяется следующая теорема.

Теорема Коши о вычетах. *Пусть D — область в $\overline{\mathbb{C}}$ с кусочно-гладкой границей Γ, а функция $f(z)$ регулярна в области D за исключением конечного числа изолированных особых точек $a_k \in D$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ (к их числу относится и точка $z = \infty$, если $\infty \in D$), кроме того, функция $f(z)$ непрерывна вплоть до границы Γ области D. Тогда*

$$\int\limits_{\Gamma^+} f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=a_k} f(z),$$

где Γ^+ — положительно ориентированная относительно области D кривая Γ.

Следствие. (теорема о полной сумме вычетов) *Пусть функция $f(z)$ регулярна во всей плоскости $\mathbb{C}$ за исключением конечного числа изолированных особых точек $a_1, \ldots, a_n$. Тогда*

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=a_k} f(z) + \operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = 0.$$

Примеры с решениями

Пример. Вычислить интеграл

$$I = \oint\limits_{|z|=4} \frac{z^4}{e^z + 1} dz.$$

Решение. Найдем все конечные особые точки подынтегральной функции $f(z)$. Это корни уравнения $e^z + 1 = 0$, т. е. точки $z_k = \pi i + 2\pi i k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Из них внутри круга $\{z\colon |z| < 4\}$ лежат только точки $z_0 = \pi i$ и $z_{-1} = -\pi i$. Следовательно, по теореме о вычетах

$$I = 2\pi i\Big(\operatorname*{res}_{z=\pi i} f(z) + \operatorname*{res}_{z=-\pi i} f(z)\Big).$$

Так как точки $\pm\pi i$ — полюсы первого порядка для функции $f(z)$, то

$$\operatorname*{res}_{z=\pm\pi i} f(z) = \frac{z^4}{(e^z+1)'}\bigg|_{z=\pm\pi i} = \frac{z^4}{e^z}\bigg|_{z=\pm\pi i} = -\pi^4,$$

откуда находим $I = 2\pi i(-\pi^4 - \pi^4) = -4\pi^5 i$.

Пример. Вычислить интеграл

$$I = \oint\limits_{|z|=3} \frac{dz}{(z-1)^2\cdot(1-\cos z)}.$$

Решение. Найдем все особые точки подынтегральной функции $f(z)$. Это корни уравнения $\cos z = 1$, т. е. точки $z_k = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, а также точка $\widetilde{z} = 1$.

Из них внутри круга $\{z\colon |z| < 3\}$ лежат только точки $\widetilde{z} = 1$ и $z_0 = 0$. Следовательно, по теореме о вычетах

$$I = 2\pi i\left(\operatorname*{res}_{z=1} f(z) + \operatorname*{res}_{z=0} f(z)\right).$$

Так как $\widetilde{z} = 1$ — полюс второго порядка для функции $f(z)$, то

$$\operatorname*{res}_{z=1} f(z) = \lim_{z\to 1}\big(f(z)(z-1)^2\big)' = \lim_{z\to 1}\left(\frac{1}{1-\cos z}\right)' =$$
$$= -\frac{\sin z}{(1-\cos z)^2}\bigg|_{z=1} = -\frac{\sin 1}{(1-\cos 1)^2}.$$

Хотя точка $z_0 = 0$ также является полюсом второго порядка для $f(z)$, но вычет в ней удобнее находить, вычислив коэффициент c_{-1} ряда Лорана функции $f(z)$ в окрестности точки 0.

Так как

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \left(\frac{1}{1-z}\right)' = 1 + 2z + 3z^2 + \ldots\ ;$$

$$\frac{1}{1-\cos z} = \frac{1}{1-\left(1-\frac{z^2}{2}+\frac{z^4}{4!}-\frac{z^6}{6!}+\ldots\right)} =$$

$$= \frac{1}{\frac{z^2}{2}\left(1-\frac{z^2}{12}+\ldots\right)} = \frac{2}{z^2}\left(1+\frac{z^2}{12}-\ldots\right),$$

то при перемножении этих рядов получим

$$(1+2z+3z^2+\ldots)\cdot\left(\frac{2}{z^2}+\frac{1}{6}+\ldots\right) = \frac{2}{z^2}+\frac{4}{z}+6+\frac{1}{6}+\sum_{k=1}^{+\infty} c_k z^k,$$

откуда $c_{-1} = 4$. Следовательно,

$$\operatorname*{res}_{z=0} f(z) = c_{-1} = 4, \quad I = 2\pi i\left(4 - \frac{\sin 1}{(1-\cos 1)^2}\right). \qquad \blacktriangle$$

Замечание. В примерах 1, 2 нельзя использовать при вычислении интегралов вычет в бесконечности (см. способ 2 примера 3), так как в этих примерах точка ∞ является неизолированной особой точкой для подынтегральных функций.

Пример. Вычислить интеграл

$$I = \oint\limits_{|z+i|=2} \frac{z^2}{z^2-9}\sin\frac{1}{z}\,dz.$$

Решение. У подынтегральной функции $f(z) = \frac{z^2}{z^2-9}\sin\frac{1}{z}$ всего четыре особые точки: $z_0 = 0$, $z_1 = 3$, $z_2 = -3$, $z_3 = \infty$. В соответствии с этим интеграл I можно вычислить двумя способами.

1 способ.

$$I = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=0} f(z).$$

Точка $z_0 = 0$ является существенно особой точкой для $f(z)$. Чтобы найти вычет в точке z_0, вычислим коэффициент c_{-1} ряда

Лорана в окрестности $z_0 = 0$. Так как

$$\sin\frac{1}{z} = \frac{1}{z} - \frac{1}{3!\cdot z^3} + \frac{1}{5!\cdot z^5} - \frac{1}{7!\cdot z^7} + \ldots;$$

$$\frac{z^2}{z^2-9} = -\frac{z^2}{9}\cdot\frac{1}{1-\frac{z^2}{9}} = -\frac{z^2}{9}\left(1+\frac{z^2}{9}+\frac{z^4}{9^2}+\ldots\right) =$$

$$= -\frac{z^2}{9} - \frac{z^4}{9^2} - \frac{z^6}{9^3} - \ldots,$$

то, перемножив полученные ряды, находим

$$f(z) = \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{3!\cdot z^3} + \frac{1}{5!\cdot z^5} - \frac{1}{7!\cdot z^7} + \ldots\right)\times$$

$$\times\left(-\frac{z^2}{9} - \frac{z^4}{9^2} - \frac{z^6}{9^3} - \ldots\right) =$$

$$= \frac{1}{z}\left(\frac{1}{3!\cdot 9} - \frac{1}{5!\cdot 9^2} + \frac{1}{7!\cdot 9^3} - \ldots\right) + \sum_{\substack{k=-\infty\\k\neq -1}}^{+\infty} c_k z^k,$$

откуда

$$c_{-1} = \frac{1}{3!\cdot 9} - \frac{1}{5!\cdot 9^2} + \frac{1}{7!\cdot 9^3} - \ldots = \frac{1}{3!\cdot 3^2} - \frac{1}{5!\cdot 3^4} + \frac{1}{7!\cdot 3^6} - \ldots.$$

Так как

$$\sin\frac{1}{3} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3!\cdot 3^3} + \frac{1}{5!\cdot 3^5} - \ldots,$$

то

$$c_{-1} = -\left(\sin\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\right)\cdot 3 = 1 - 3\sin\frac{1}{3}.$$

Следовательно, $I = 2\pi i\cdot c_{-1} = 2\pi i(1 - 3\sin\frac{1}{3})$.

2 способ. По теореме о вычетах для области $D = \{z\colon |z+i| > 2\}$ имеем

$$I = -2\pi i\left(\operatorname*{res}_{z=3} f(z) + \operatorname*{res}_{z=-3} f(z) + \operatorname*{res}_{z=\infty} f(z)\right).$$

Точки ± 3 являются полюсами первого порядка для функции $f(z)$ в области D, найдем вычеты функции в этих точках

$$\operatorname*{res}_{z=\pm 3} f(z) = \left.\frac{z^2\sin\frac{1}{z}}{(z^2-9)'}\right|_{z=\pm 3} = \left.\frac{z^2\sin\frac{1}{z}}{2z}\right|_{z=\pm 3} = \pm\frac{3}{2}\sin\left(\pm\frac{1}{3}\right) = \frac{3}{2}\sin\frac{1}{3}.$$

Точка ∞ является устранимым нулем первого порядка функции $f(z)$, причем $f(z) \sim \frac{1}{z}$ при $z \to \infty$, откуда $\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = -1$.

Следовательно,

$$I = -2\pi i \left(\frac{3}{2} \sin\frac{1}{3} + \frac{3}{2} \sin\frac{1}{3} - 1 \right) = 2\pi i \left(1 - 3\sin\frac{1}{3} \right). \qquad \blacktriangle$$

Пример. Вычислить интеграл

$$I = \oint\limits_{|z|=7} \frac{1 - \operatorname{ch} z}{z^3 + 4\pi^2 z}\, dz.$$

Решение. Найдем все особые точки подынтегральной функции $f(z)$, решив уравнение

$$z(z^2 + 4\pi^2) = 0,$$

откуда $z_0 = 0$, $z_1 = 2\pi i$, $z_2 = -2\pi i$.

Точки $\pm 2\pi i$ являются нулями числителя первого порядка $(1 - \operatorname{ch}(\pm 2\pi i) = 0, \ -\operatorname{sh}(\pm 2\pi i) \neq 0)$, а также нулями знаменателя первого порядка. Поэтому эти точки являются устранимыми для $f(z)$. Значит, $\operatorname*{res}_{z=\pm 2\pi i} f(z) = 0$.

Точка $z_0 = 0$ является нулем числителя второго порядка $(1 - \operatorname{ch} 0 = 0, \ -\operatorname{sh} 0 = 0, \ -\operatorname{ch} 0 \neq 0)$ и нулем знаменателя первого порядка. Поэтому эта точка также является устранимой и $\operatorname*{res}_{z=0} f(z) = 0$. В итоге по теореме о вычетах для круга $\{z\colon |z| < 7\}$ получаем

$$I = 2\pi i \Big(\operatorname*{res}_{z=0} f(z) + \operatorname*{res}_{z=2\pi i} f(z) + \operatorname*{res}_{z=-2\pi i} f(z) \Big) = 0. \qquad \blacktriangle$$

Замечание. Вычисление интеграла в примере 4 вторым способом по теореме о вычетах для внешности круга было возможно, но более сложно, чем вычисление первым способом.

Пример. Вычислить интеграл

$$I = \oint\limits_{|z|=4} \frac{z^4}{1-z^8}\,dz.$$

Решение. Найдем все конечные особые точки подынтегральной функции $f(z)$. Это корни уравнения $z^8 = 1$ (восемь полюсов первого порядка на окружности $\{z\colon |z| = 1\}$).

Поскольку вне круга $\{z\colon |z| < 4\}$ находится только одна особая точка $z_0 = \infty$, то в данном примере удобнее вычислить интеграл с помощью вычета функции $f(z)$ в точке $z = \infty$.

Заметим, что $f(z)$ — четная функция и ее ряд Лорана в окрестности точки $z = \infty$ содержит только четные степени z. Поэтому коэффициент этого ряда при $\frac{1}{z}$ равен нулю и $\operatorname*{res}\limits_{z=\infty} f(z) = 0$.

Следовательно, $I = -2\pi i \operatorname*{res}\limits_{z=\infty} f(z) = 0$.

Пример. Вычислить интеграл

$$I = \oint\limits_{|z|=1} \frac{dz}{e^{2/z} - e^{1/z}}.$$

Решение. Найдем все конечные особые точки подынтегральной функции $f(z)$, решив уравнение $e^{2/z} = e^{1/z}$ или $e^{1/z} = 1$, откуда $\frac{1}{z} = 2\pi i k,\ \ k \in \mathbb{Z},\ \ k \neq 0$, т. е.

$$z_k = \frac{1}{2\pi i k}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad k \neq 0.$$

Кроме того, особой является точка $z_0 = 0$ — предельная точка полюсов z_k.

Следовательно, теорему о вычетах можно использовать только для области $D = \{z\colon |z| > 1\}$, в которой лежит лишь одна особая точка $\widetilde{z} = \infty$. Учитывая, что

$$I = -\oint\limits_{|z|=1} f(z)\,dz,$$

получаем $I = -2\pi i \operatorname*{res}\limits_{z=\infty} f(z)$.

Для данной функции $f(z)$ точка $z = \infty$ — полюс первого порядка и поэтому ее ряд Лорана в окрестности ∞ имеет вид

$$f(z) = Az + B + \frac{c_{-1}}{z} + \frac{c_{-2}}{z^2} + \ldots .$$

Пусть $\varphi(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$, тогда

$$\varphi(z) = \frac{A}{z} + B + c_{-1}z + \ldots .$$

Для нахождения c_{-1} нужно найти коэффициент при z ряда Лорана функции $\varphi(z)$ в окрестности точки $z = 0$. В данном примере

$$\varphi(z) = \frac{e^{-z}}{e^z - 1} = \frac{1}{z}\left(1 - z + \frac{z^2}{2} + \ldots\right)\left(1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{6} + \ldots\right)^{-1} =$$
$$= \frac{1}{z}\left(1 - z + \frac{z^2}{2} + \ldots\right)\left(1 - \frac{z}{2} + \frac{z^2}{12} + \ldots\right).$$

Нужно найти коэффициент при z^2 в произведении выражений в скобках. Он равен $\frac{1}{12} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{13}{12}$.

Итак, $c_{-1} = \frac{13}{12}$ и $\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = -\frac{13}{12}$.

Тогда

$$I = -2\pi i\left(-\frac{13}{12}\right) = \frac{13\pi i}{6}.$$ ▲

Пример. Вычислить интеграл

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{a + \sin\varphi}, \quad a > 1.$$

Решение. Пусть $z = e^{i\varphi}$, $\varphi \in [0;\ 2\pi]$, тогда

$$\sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i} = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right),$$

$$dz = ie^{i\varphi}d\varphi = iz\,d\varphi, \quad d\varphi = \frac{dz}{iz}.$$

Интеграл I сводится к интегралу по замкнутому контуру

$\{z\colon |z|=1\}$:

$$I = \oint\limits_{|z|=1} \frac{dz}{iz\left(a+\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right)} = \oint\limits_{|z|=1} \frac{2dz}{z^2+2iaz-1}.$$

Найдем все особые точки подынтегральной функции $f(z)$, решив уравнение

$$z^2+2iaz-1=0.$$

Так как $D=-4a^2+4=4(1-a^2)$, то

$$z_{1,2} = \frac{-2ia \pm 2i\sqrt{a^2-1}}{2} = -i(a \mp \sqrt{a^2-1}).$$

Внутри круга $\{z\colon |z|<1\}$ лежит только одна особая точка

$$z_1 = i(\sqrt{a^2-1}-a).$$

Точка z_1 — полюс первого порядка для $f(z)$. Поэтому

$$\operatorname*{res}_{z=z_1} f(z) = \left.\frac{2}{(z^2+2iaz-1)'}\right|_{z=z_1} = \left.\frac{2}{2z+2ai}\right|_{z=z_1} = \frac{1}{i\sqrt{a^2-1}},$$

$$I = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=z_1} f = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}. \qquad \blacktriangle$$

§ 5. Вычисление значений регулярных ветвей многозначных функций. Ряды Лорана для регулярных ветвей

Справочные сведения

Если многозначная функция допускает выделение регулярной ветви в области G, то таких ветвей, как правило, больше одной. Для выделения из всего множества регулярных ветвей одной определенной ветви нужно еще какое-либо дополнительное условие. Обычно таким условием является задание значения ветви в некоторой точке области G.

1. Значения на одной регулярной ветви.

Допустим, что в области G задана регулярная функция $f(z)$, такая, что $f(z) \neq 0$ при любом $z \in G$. Пусть существуют в области G регулярные ветви $h(z) \in \operatorname{Ln} f(z)$ и $g(z) \in \left\{\sqrt[n]{f(z)}\right\}$ (условия существования таких ветвей содержатся в справочных сведениях предыдущего параграфа). Тогда для любых точек a, $b \in G$ справедливы выражения

$$h(b) = h(a) + \ln\left|\frac{f(b)}{f(a)}\right| + i\Delta_{\gamma_{ab}} \arg f(z), \tag{1}$$

$$g(b) = g(a) \cdot \sqrt[n]{\left|\frac{f(b)}{f(a)}\right|} e^{(i/n)\Delta_{\gamma_{ab}} \arg f(z)}, \tag{2}$$

где γ_{ab} — произвольная, лежащая в области G кусочно гладкая ориентированная кривая с началом в точке a и концом в точке b.

2. Производная регулярной ветви.

Производные регулярных ветвей $h(z) \in \operatorname{Ln} f(z)$ и $g(z) \in \in \left\{\sqrt[n]{f(z)}\right\}$ в области G вычисляются по формулам

$$h'(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}, \quad g'(z) = \frac{f'(z)}{n(g(z))^{n-1}}. \tag{3}$$

3. Ряды Тейлора и Лорана регулярных ветвей.

В соответствии с общими свойствами регулярных функций регулярные ветви многозначных функций могут быть представлены в виде рядов Тейлора и Лорана.

Примеры с решениями

Пример. Пусть $h_k(z)$ — регулярная ветвь многозначной функции $\operatorname{Ln}(1+z)$ в области $G = \{z\colon |z| < 1\}$, такая, что $h_k(0) = = 2\pi i k$. Разложить функцию $h_k(z)$ в ряд Тейлора по степеням z в области G.

Решение. По формуле (3) получаем, что $h_k'(z) = \frac{1}{1+z}$. Отсюда легко вычислить и остальные производные:

$$h_k''(z) = \frac{-1}{(1+z)^2}, \quad \ldots, \quad h_k^{(n)}(z) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+z)^n}.$$

Вычисляя коэффициенты c_n ряда Тейлора по формуле $c_n = \frac{h_k^{(n)}(0)}{n!}$, получаем искомый ряд:

$$h_k(z) = h_k(0) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} z^n}{n}, \quad |z| < 1. \tag{4}$$

▲

Пример. Пусть $a \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$, и $\varphi_k(z)$ — регулярная ветвь многозначной функции $\{(1+z)^a\}$ в области $G = \{z\colon |z| < 1\}$, такая, что

$$\varphi_k(0) = e^{2\pi a i k}.$$

Разложить каждую функцию $\varphi_k(z)$ в ряд Тейлора по степеням z в области G.

Решение. По определению многозначной функции

$$\{(1+z)^a\} = e^{a\,\mathrm{Ln}(1+z)}$$

существует регулярная ветвь $h_k(z) \in \mathrm{Ln}(1+z)$ в области G, такая, что

$$\varphi_k(z) = e^{a h_k(z)}, \quad h_k(0) = 2\pi i k.$$

Дифференцируя сложную функцию, получаем

$$\varphi_k'(z) = \varphi_k(z)\frac{a}{1+z}, \; \ldots, \; \varphi_k^{(n)}(z) = \varphi_k(z)\frac{a(a-1)\ldots(a-n+1)}{(1+z)^n}.$$

Вычисляя коэффициенты c_n ряда Тейлора, получаем

$$\varphi_k(z) = \varphi_k(0) \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} C_a^n z^n, \quad |z| < 1, \tag{5}$$

где $C_a^n = \frac{a(a-1)\ldots(a-n+1)}{n!}$.

Пример. Разложить в ряд Тейлора по степеням z регулярную ветвь $g(z)$ многозначной функции $\left\{\sqrt[3]{1-z^2}\right\}$ в области $G = \{z\colon |z| < 1\}$ с начальным значением $g(0) = e^{2\pi i/3}$.

Решение. По формуле (5) при $a = \frac{1}{3}$ и делая замену $\zeta = -z^2$, сразу получаем ответ:

$$g(z) = e^{2\pi i/3} \sum_{n=0}^{+\infty} C_{1/3}^{n} (-1)^n z^{2n}, \quad |z| < 1. \qquad \blacktriangle$$

Пример. Пусть $h(z)$ — регулярная ветвь многозначной функции $\mathrm{Ln}\, \frac{1-z}{1+z}$ в области $G = \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$, такая, что предельное значение

$$h(0 + i0) = \lim_{\substack{y \to 0 \\ y > 0}} h(iy) = 0.$$

Найти значения $h(0-i0)$, $h(i)$, $h(\infty)$. Разложить функцию $h(z)$ в ряд Лорана по степеням z в окрестности бесконечности и указать кольцо сходимости этого ряда.

Решение. Прежде всего отметим, что такая регулярная ветвь $h(z)$ существует и единственна в данной области G, так как выполнены все условия существования ветвей (см. справочные сведения из §§ 16 и 17). В том числе для любой замкнутой ориентированной простой кусочно гладкой кривой $\gamma \subset G$ справедливо равенство

$$\Delta_\gamma \arg \frac{1 - z}{1 + z} = \Delta_\gamma \arg(z - 1) - \Delta_\gamma \arg(z + 1) = 0.$$

По формуле (1) вычислим значения $h(0 - i0)$, $h(i)$, $h(\infty)$. Выберем кривую $\gamma_1 = \{z\colon |z + 1| = 1\}$ с началом в точке $0 + i0$ (на верхнем краю границы $[-1, 1]$) и концом в точке $0 - i0$ (на нижнем краю границы $[-1, 1]$). Тогда

$$h(0 - i0) = h(0 + i0) + \ln \left| \frac{1}{1} \right| + \\ + i\big(\Delta_{\gamma_1} \arg(z - 1) - \Delta_{\gamma_1} \arg(z + 1)\big) = i(0 - 2\pi) = -2\pi i.$$

Выбирая отрезок мнимой оси $\gamma_2 = [0, i]$ с началом в точке $0 + i0$

и концом в точке i, получаем

$$h(i)=h(0+i0)+\ln\left|\frac{1-i}{1+i}\right|+ \\ +i\big(\Delta_{\gamma_2}\arg(z-1)-\Delta_{\gamma_2}\arg(z+1)\big)=i\left(-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)=-i\frac{\pi}{2}.$$

Для вычисления $h(\infty)$ выберем произвольное действительное число $x>1$ и вычислим вначале значение $h(x)$. Для этого возьмем соответствующую кривую γ_3 с началом в точке $0+i0$ и концом в точке x. По формуле (1) получаем

$$h(x)=h(0+i0)+\ln\left|\frac{1-x}{1+x}\right|+ \\ +i\big(\Delta_{\gamma_3}\arg(z-1)-\Delta_{\gamma_3}\arg(z+1)\big)=\ln\left|\frac{1-x}{1+x}\right|+i(-\pi+0),$$

откуда $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=h(+\infty)=-i\pi$. Так как ∞ является изолированной особой точкой регулярной функции $h(z)$, то из равенства заключаем, что ∞ есть устранимая особая точка и $h(\infty)=-i\pi$.

Для разложения функции $h(z)$ в ряд Лорана в окрестности бесконечности представим в G многозначную функцию в виде

$$\operatorname{Ln}\frac{1-z}{1+z}=\operatorname{Ln}(-1)+\operatorname{Ln}\left(1-\frac{1}{z}\right)-\operatorname{Ln}\left(1+\frac{1}{z}\right)= \\ =\operatorname{Ln}(-1)+h_1(z)-h_2(z). \tag{6}$$

В последнем выражении многозначность содержится в первом слагаемом, а функции $h_1(z)$ и $h_2(z)$ однозначны, причем $h_1(z)$ — регулярная ветвь функции $\operatorname{Ln}\left(1-\frac{1}{z}\right)$ в данной области G и такая, что $h_1(\infty)=0$, а $h_2(z)$ — регулярная ветвь функции $\operatorname{Ln}\left(1+\frac{1}{z}\right)$ в области G, такая, что $h_2(\infty)=0$. Делая замену $\zeta=\frac{1}{z}$, легко убедиться, что такие регулярные ветви в области G существуют, а в силу примера 1 получаем выражения для их рядов Лорана (см. (4)):

$$h_1(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(-\frac{1}{z}\right)^n, \quad |z| > 1;$$

$$h_2(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(\frac{1}{z}\right)^n, \quad |z| > 1.$$

Из определения функции $h(z)$ как ветви многозначной функции $\mathrm{Ln}\,\frac{1-z}{1+z}$ и из выражения (6) получаем

$$h(z) - h_1(z) + h_2(z) \in \mathrm{Ln}(-1),$$

$$\text{т.е.}\quad h(z) - h_1(z) + h_2(z) = i(\pi + 2\pi k(z)),$$

где $k(z)$ принимает целочисленные значения. Так как в равенстве слева стоят непрерывные функции, то $k(z) = k_0 = \mathrm{const}$. Переходя к пределу при $z \to \infty$, получаем $h(\infty) = i(\pi + 2\pi k_0)$, т. е. $h(z) = h_1(z) - h_2(z) + h(\infty)$ при $|z| > 1$. Отсюда получаем ряд Лорана (в силу его единственности) функции h вида

$$h(z) = -i\pi + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{[(-1)^n - 1]}{n} \cdot \frac{1}{z^n} = -i\pi - \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2}{2k+1} z^{-2k-1}$$

в кольце сходимости $|z| > 1$.

§ 6. Интегралы от регулярных ветвей

Справочные сведения

Интегралы от регулярных ветвей многозначных функций находятся с помощью вычисления значений регулярных ветвей многозначных функций, разложений этих ветвей в ряды Лорана и с использованием теории вычетов.

Примеры с решениями

Пример. Пусть регулярная ветвь $g(z)$ многозначной функции $\left\{\sqrt{z^2-4}\right\}$ определена в области G, представляющей собой комплексную плоскость с разрезом по полуокружности $\{z\colon |z| = 2,\ \mathrm{Im}\, z \geqslant 0\}$ (рис. 6.1), причем главная часть ряда Лорана функции $g(z)$ в окрестности $z = \infty$ равна z. Вычислить интеграл

$$J = \oint\limits_{|z|=1} \frac{dz}{g(z) - 3z}.$$

Решение. Прежде всего следует проверить, что в заданной области G действительно существуют регулярные ветви функции $\left\{\sqrt{z^2 - 4}\right\}$. (Сделайте это самостоятельно.)

Для вычисления интеграла J по теории вычетов надо найти особые точки подынтегральной функции, т. е. точки, в которых справедливо равенство $g(z) = 3z$. Чтобы их найти, замечаем, что из последнего равенства следует $g^2(z) = (3z)^2$. Так как по определению корня $g^2(z) = z^2 - 4$, то получаем равенство $z^2 - 4 = 9z^2$, т. е. $z_{1,2} = \pm\frac{i}{\sqrt{2}}$ — точки, в которых возможно равенство $g(z) = 3z$.

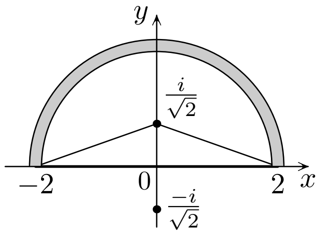

Рис. 6.1

Уточним значения $g\left(\pm\frac{i}{\sqrt{2}}\right)$. Для этого удобно вначале вычислить значение функции g в конечной точке, например в точке $z = 0$. Допустим, что мы знаем значение $g(0)$. Тогда для любого действительного числа $x > 2$ вычислим значение $g(x)$ по формуле (2) из § 18:

$$g(x) = g(0)\sqrt{\left|\frac{x^2-4}{4}\right|}\, e^{i/2\left(\Delta_\gamma \arg(z-2) + \Delta_\gamma \arg(z+2)\right)} =$$

$$= g(0)\frac{x}{2}\sqrt{1 - \frac{4}{x^2}}\, e^{i/2(\pi+0)} = \frac{i}{2}g(0)\cdot x\left(1 - \frac{2}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right).$$

Последнее равенство записано с помощью формулы Тейлора для функции действительного переменного. По теореме о единственности регулярной функции отсюда следует, что

$$g(z) = \frac{i}{2} g(0) \left(z - \frac{2}{z} + o\left(\frac{1}{z}\right) \right), \quad z \in G.$$

Так как по условию задачи главная часть ряда Лорана функции $g(z)$ в ∞ равна z, отсюда получаем, что $g(0) = -2i$. Теперь легко вычислить значения $g\left(\frac{i}{\sqrt{2}}\right)$ и $g\left(-\frac{i}{\sqrt{2}}\right)$ по той же формуле (2) из § 18:

$$g\left(\frac{i}{\sqrt{2}}\right) = -2i \sqrt{\left|\frac{-(1/2) - 4}{4}\right|} e^{(i/2)(-\operatorname{arcctg} 2\sqrt{2} + \operatorname{arcctg} 2\sqrt{2})} = -\frac{3i}{\sqrt{2}}.$$

Аналогично получаем, что

$$g\left(-\frac{i}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{3i}{\sqrt{2}},$$

т. е. равенство $g(z) = 3z$ справедливо в точке $z = -\frac{i}{\sqrt{2}}$. Так как $g'(z) = \frac{z}{g(z)}$, то $g'\left(-\frac{i}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{3} \neq 3$. Таким образом, точка $z = -\frac{i}{\sqrt{2}}$ есть полюс первого порядка подынтегральной функции $f(z) = \frac{1}{g(z) - 3z}$. В итоге вычисляем интеграл по теореме о вычетах

$$J = 2\pi i \operatorname*{res}_{-i/\sqrt{2}} f = 2\pi i \frac{1}{g'\left(-\frac{i}{\sqrt{2}}\right) - 3} = -\frac{3\pi i}{4}. \qquad \blacktriangle$$

§ 7. Вычисление несобственных интегралов

Справочные сведения

1. Метод вычисления несобственных интегралов с помощью теоремы Коши о вычетах (см. § 14) состоит в следующем. Пусть требуется вычислить интеграл от действительной функции $f(x)$ по какому-либо (конечному или бесконечному) интервалу (a, b) оси $\mathbb{R}$. Тогда (a, b) дополняется какой-нибудь кривой Γ, которая вместе с интервалом $(a,\, b)$ ограничивает некоторую область D в $\mathbb{C}$. Если функция $f(x)$ регулярно продолжается в D (и непрерывно в $\overline{D}$), за исключением конечного числа изолированных особых точек $a_k \in D,\ \ k = 1,\, 2,\, \ldots\,,\, n$, то по теореме Коши о вычетах получаем

$$\int\limits_{\partial D} f(z)\,dz = \int\limits_a^b f(x)\,dx + \int\limits_{\Gamma} f(z)\,dz = 2\pi i \left(\sum_{j=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=a_j} f(z)\right).$$

Тогда исходный интеграл $I = \int\limits_a^b f(x)\,dx$ удается вычислить, если удается вычислить интеграл $\int\limits_{\Gamma} f(z)\,dz$ или выразить его через I.

2. Заметим, что в теореме Коши ∂D (граница области D) должна иметь конечную длину. Если $(a,\, b) = \mathbb{R}$, то часто удобно выбирать отрезок $[-R,\, R]$ действительной оси, а в качестве дополняющей кривой Γ — полуокружность $\Gamma = \Gamma_R$ радиуса $R > 0$, расположенную в верхней полуплоскости (рис. 7.1), т. е.

$$\Gamma_R = \{z\colon |z| = R,\ \operatorname{Im} z \geqslant 0\}.$$

При этом может быть использована следующая теорема.

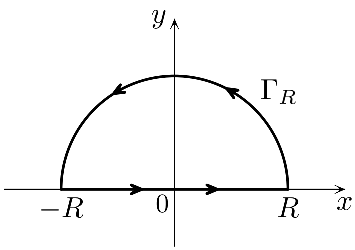

Рис. 7.1

Теорема. *Пусть функция f регулярна в верхней полуплоскости $\{z\colon \operatorname{Im} z > 0\}$, за исключением конечного числа изолированных особых точек $a_1,\, \ldots\,,\, a_n$ и непрерывна вплоть* *до действительной оси. Тогда если*

$$\lim_{R\to+\infty}\int\limits_{\Gamma_R} f(z)\,dz = 0, \tag{1}$$

где $\Gamma_R = \{z\colon |z| = R,\ \operatorname{Im} z \geqslant 0\}$, *то*

$$v.p.\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 2\pi i\left(\sum_{j=1}^{n}\operatorname*{res}_{z=a_j} f(z)\right). \tag{2}$$

Замечание. Существование несобственного интеграла (2) здесь можно гарантировать лишь в смысле главного значения по Коши.

3. Укажем случаи, в которых выполнено условие (1) теоремы 1.

Случай 1.

Лемма. *Пусть функция* $f(z)$ *непрерывна на замкнутом множестве* $\{z\colon \operatorname{Im} z \geqslant 0, |z| \geqslant R_0 > 0\}$ *и пусть*

$$\lim_{R\to+\infty} RM(R) = 0, \quad \text{где} \quad M(R) = \max_{z\in\Gamma_R}|f(z)|.$$

Тогда $\lim\limits_{R\to+\infty}\int\limits_{\Gamma_R} f(z)\,dz = 0$, *где* $\Gamma_R = \{z\colon |z| = R,\ \operatorname{Im} z \geqslant 0\}$.

Замечание. Лемма 1 применима, например, в случае, когда $f(z)$ — рациональная функция, т.е. $f(z) = \frac{P_n(z)}{Q_m(z)}$, где $P_n(z)$ и $Q_m(z)$ — многочлены степеней n и m соответственно. Если $m \geqslant n+2$, то интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится как несобственный и знак *v.p.* в формуле (2) можно опустить. При этом предполагается, что $Q_m(z) \neq 0$ на действительной оси. Для указанного случая формула (2) примет вид

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 2\pi i\sum_{\operatorname{Im} z_k>0}\operatorname*{res}_{z=z_k} f(z). \tag{3}$$

В формуле (3) содержатся вычеты по всем полюсам функции $R(z)$, расположенным в верхней полуплоскости.

Случай 2.

Лемма. (Жордана) *Пусть функция $g(z)$ непрерывна на замкнутом множестве $\{z\colon \operatorname{Im} z \geqslant 0, |z| \geqslant R_0 > 0\}$ и пусть $\lim\limits_{R\to+\infty} M(R) = 0$, где*

$$M(R) = \max_{z\in\Gamma_R} |g(z)|,\ \Gamma_R = \{z\colon |z| = R, \quad \operatorname{Im} z \geqslant 0\}.$$

Тогда если $\alpha > 0$, то

$$\lim_{R\to+\infty} \int\limits_{\Gamma_R} g(z)e^{i\alpha z}\, dz = 0.$$

С помощью леммы Жордана можно вычислять интегралы вида

$$I_1 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \cos\alpha x \cdot g(x)\, dx \quad \text{и } I_2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sin\alpha x \cdot g(x)\, dx,$$

где $g(x)$ — рациональная функция, т. е. $g(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, где $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ — многочлены степеней n и m соответственно, причем $m \geqslant n + 1$. В этом случае интегралы сходятся как несобственные, а формулу (2) можно записать в виде

$$I_1 + iI_2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(x)e^{i\alpha x}dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z_k>0} \operatorname*{res}_{z=z_k} \left(g(z)e^{i\alpha z}\right). \qquad (4)$$

В равенстве (4) содержатся вычеты по всем полюсам функции $g(z)e^{i\alpha z}$, расположенным в верхней полуплоскости.

Примеры с решениями

Пример. Вычислить интеграл

$$I = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4}dx.$$

Решение. Функция $f(z) = \frac{z^2}{1+z^4}$ удовлетворяет условиям леммы 1 и имеет в области D (рис. 7.1), ограниченной кривой Γ_R

$(R > 1)$ и отрезком $[-R,\, R]$, только две особые точки

$$z_1 = e^{i\pi/4} \quad \text{и} \quad z_2 = e^{i3\pi/4},$$

которые являются полюсами первого порядка.

Так как $\operatorname*{res}\limits_{z=z_k} f(z) = \left.\frac{z^2}{4z^3}\right|_{z=z_k} = \frac{1}{4z_k}$, $k = 1, 2$, то по формуле (3) находим

$$I = 2\pi i \left(\operatorname*{res}_{z=z_1} f(z) + \operatorname*{res}_{z=z_2} f(z) \right) = \frac{2\pi i}{4} \left(e^{-i\pi/4} + e^{-i3\pi/4} \right) =$$

$$= \frac{\pi e^{i\pi/2}}{2} \left(e^{-i\pi/4} + e^{-i3\pi/4} \right) = \pi \frac{e^{i\pi/4} + e^{-i\pi/4}}{2} = \pi \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \blacktriangle$$

Пример. Вычислить интеграл

$$I = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 4)^3}.$$

Решение. Как и в примере 1, в области D, ограниченной полуокружностью Γ_R и отрезком $[-R, R]$, применима лемма 1 (замечание 2) к функции $f(z) = \frac{1}{(z^2+4)^3}$, имеющей в верхней полуплоскости $\{z\colon \operatorname{Im} z > 0\}$ единственную особую точку $z_1 = 2i$ — полюс третьего порядка. По формуле (3) находим $I = 2\pi i \operatorname*{res}\limits_{z=2i} f(z)$.

Так как $f(z) = \frac{h(z)}{(z-2i)^3}$, где $h(z) = (z + 2i)^{-3}$, то

$$\operatorname*{res}_{z=2i} f(z) = \frac{1}{2} h''(2i) = \left. \frac{(-3)(-4)}{2} (z + 2i)^{-5} \right|_{z=2i} = \frac{3}{2 \cdot 4^4 i},$$

$$I = 2\pi i \frac{3}{2 \cdot 4^4 i} = \frac{3\pi}{256}. \qquad \blacktriangle$$

Пример. Вычислить интеграл Лапласа

$$I(\alpha) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{1 + x^2} dx, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Решение. Если $\alpha = 0$, то $I(0) = \pi$. Кроме того, $I(\alpha)$ — четная функция. Поэтому достаточно вычислить $I(\alpha)$ при $\alpha >$

> 0. Пусть

$$J(\alpha) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\alpha x}}{1+x^2}dx, \quad \text{где} \quad \alpha > 0.$$

Тогда $I(\alpha) = \operatorname{Re} J(\alpha)$. К функции

$$f(z) = \frac{e^{i\alpha z}}{1+z^2}, \quad \text{где} \quad \alpha > 0,$$

применима лемма Жордана и поэтому

$$\int\limits_{\Gamma_R} f(z)\,dz \to 0 \quad \text{при} \quad R \to +\infty,$$

где $\Gamma_R = \{z\colon |z| = R,\ \operatorname{Im} z \geqslant 0\}$.

Функция $f(z)$ имеет в верхней полуплоскости единственную особую точку $z_0 = i$ — полюс первого порядка, вычет в которой равен

$$\operatorname*{res}_{z=i} f(z) = \left.\frac{e^{i\alpha z}}{2z}\right|_{z=i} = \frac{e^{-\alpha}}{2i},$$

и поэтому по формуле (4) находим

$$J(\alpha) = 2\pi i \cdot \operatorname*{res}_{z=i} f(z) = \pi e^{-\alpha} \quad \text{при} \quad \alpha > 0,$$

$$I(\alpha) = \operatorname{Re} J(\alpha) = \pi e^{-\alpha} \quad \text{при} \quad \alpha > 0,$$

$$I(\alpha) = \pi e^{-|\alpha|}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

▲

Пример. Вычислить интеграл

$$I = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-1)\sin(8x-7)}{x^2-2x+5}dx.$$

Решение. Вычислим интеграл

$$J = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-1)e^{i(8x-7)}}{x^2-2x+5}dx$$

и воспользуемся тем, что $I = \operatorname{Im} J$. К функции

$$f(z) = g(z)e^{i8z}, \quad \text{где} \quad g(z) = \frac{(z-1)e^{-7i}}{z^2-2z+5},$$

применима лемма Жордана и поэтому $\int\limits_{\Gamma_R} f(z)\,dz \to 0$ при $R \to \to +\infty$, где $\Gamma_R = \{z\colon |z| = R,\ \operatorname{Im} z \geqslant 0\}$. Функция $f(z)$ имеет в верхней полуплоскости единственную особую точку $z_0 = 1 + + 2i$ — полюс первого порядка, а

$$\operatorname*{res}_{z=1+2i} f(z) = \left.\frac{(z-1)e^{i(8z-7)}}{(z^2-2z+5)'}\right|_{z=1+2i} = \frac{1}{2}e^{i(1+16i)} = \frac{e^{-16}}{2}(\cos 1 + i\sin 1).$$

По формуле (4) находим

$$J = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=1+2i} f(z) = \pi e^{-16} i(\cos 1 + i\sin 1),$$

откуда

$$I = \operatorname{Im} J = \pi e^{-16}\cos 1. \qquad \blacktriangle$$

Пример. Вычислить интеграл Дирихле

$$I = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx.$$

Решение. Пусть $\Gamma_{\rho,R}$ — контур, изображенный на (рис. 7.2). Рассмотрим интеграл $I_{\rho,R} = \int\limits_{\Gamma_{\rho,R}} \frac{e^{iz}}{z}\,dz$.

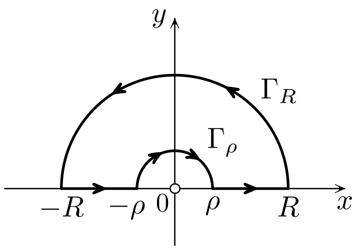

Рис. 7.2

Этот интеграл равен нулю, так как функция e^{iz}/z регулярна внутри контура $\Gamma_{\rho,R}$. С другой стороны, он равен сумме интегралов, взятых по полуокружностям Γ_ρ, Γ_R и отрезкам $[-R,-\rho]$, $[\rho,R]$. Имеем

$$\frac{e^{iz}}{z}=\frac{1}{z}+h(z),$$

где $h(z)$ — функция, регулярная в точке $z=0$. Если $z\in\Gamma_\rho$, то

$$z=\rho e^{i\varphi},\quad 0\leqslant\varphi\leqslant\pi,\quad dz=i\rho e^{i\varphi}\,d\varphi$$

и

$$\int\limits_{\Gamma_\rho}\frac{1}{z}\,dz=i\int\limits_{\pi}^{0}d\varphi=-i\pi.$$

Функция $h(z)$ ограничена в окрестности точки $z=0$ и, следовательно, $\varepsilon_1(\rho)=\int\limits_{\Gamma_\rho}h(z)\,dz\to 0$, при $\rho\to+0$. Отсюда получаем

$$\int\limits_{\Gamma_\rho}\frac{e^{iz}}{z}\,dz=-i\pi+\varepsilon_1(\rho).$$

По лемме Жордана $\varepsilon_2(R)=\int\limits_{\Gamma_R}\frac{e^{iz}}{z}\,dz$ стремится к нулю при $R\to+\infty$. Далее, сумма интегралов по отрезкам $[-R,-\rho]$, $[\rho,R]$ равна

$$\int\limits_{-R}^{-\rho}\frac{e^{ix}}{x}dx+\int\limits_{\rho}^{R}\frac{e^{ix}}{x}dx=\int\limits_{\rho}^{R}\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{x}dx=2i\int\limits_{\rho}^{R}\frac{\sin x}{x}dx.$$

Следовательно,

$$0=I_{\rho,R}=2i\int\limits_{\rho}^{R}\frac{\sin x}{x}dx-i\pi+\varepsilon_1(\rho)+\varepsilon_2(R),\tag{5}$$

где $\varepsilon_1(\rho)\to 0$ $(\rho\to+0)$, $\varepsilon_2(R)\to 0$ $(R\to+\infty)$. Так как интеграл I сходится, то существует

$$\lim_{\substack{\rho \to +0 \\ R \to +\infty}} \int\limits_{\rho}^{R} \frac{\sin x}{x} dx = I.$$

Переходя в соотношении (5) к пределу при $\rho \to +0$, $R \to +\infty$, получаем $2iI - i\pi = 0$, откуда $I = \pi/2$.

Пример. Вычислить интеграл

$$I = \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{x}}{(x+8)^2} dx. \tag{6}$$

Решение. В комплексной плоскости с разрезом по лучу $[0, +\infty)$ функция $f(z) = \sqrt[3]{|z|}e^{i\varphi/3}$, $0 < \varphi < 2\pi$, является регулярной ветвью многозначной функции $\left\{\sqrt[3]{z}\right\}$ (§ 18–19).

Рассмотрим область D — круг $\{z\colon |z| < R\}$, $R > 8$, с разрезом по радиусу $[0, R]$. Граница этой области $\Gamma = \gamma_+ \cup C_R \cup \gamma_-$, где γ_+ — верхний берег разреза, C_R — окружность $\{z\colon |z| = R\}$, γ_- — нижний берег разреза, ориентация кривой Γ показана на (рис. 7.3).

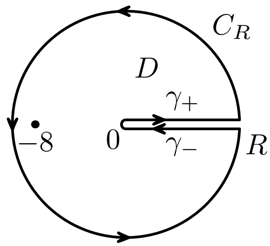

Рис. 7.3

Функция $g(z) = \frac{f(z)}{(z+8)^2}$ регулярна в области D, за исключением точки $z = -8$ — полюса второго порядка, и непрерывна около Г вплоть до Г. По теореме о вычетах получаем

$$\int\limits_{\Gamma} g(z)\,dz = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=-8} g(z), \quad \text{т. е.}$$

$$\int\limits_{C_R} \frac{f(z)}{(z+8)^2}\,dz + \int\limits_{\gamma_+} \frac{f(z)}{(z+8)^2}\,dz + \int\limits_{\gamma_-} \frac{f(z)}{(z+8)^2}\,dz = $$

$$= 2\pi i \operatorname*{res}_{z=-8} \frac{f(z)}{(z+8)^2}. \qquad (7)$$

Покажем, как с помощью этого равенства можно вычислить интеграл (6). Рассмотрим поочередно члены равенства (7).

1. Оценим интеграл

$$I_R = \int\limits_{C_R} \frac{f(z)}{(z+8)^2}\,dz.$$

При $|z| = R$ получаем

$$|f(z)| = \sqrt[3]{R}, \quad |z+8| \geqslant ||z| - 8| = R - 8 > 0,$$

откуда $\frac{1}{|z+8|} \leqslant \frac{1}{R-8}$. Поэтому

$$|I_R| \leqslant \frac{\sqrt[3]{R}}{(R-8)^2} \cdot 2\pi R \to 0 \quad \text{при} \quad R \to +\infty.$$

2. Если $z \in \gamma_+$, то

$$f(z) = f(x + i0) = \sqrt[3]{x}, \quad x \geqslant 0.$$

Поэтому

$$I_1 = \int\limits_{\gamma_+} \frac{f(z)}{(z+8)^2}\,dz = \int\limits_0^R \frac{\sqrt[3]{x}}{(x+8)^2}\,dx.$$

Отметим, что при $R \to +\infty$ этот интеграл стремится к искомому интегралу (6).

3. Если $z \in \gamma_-$, то

$$f(z) = f(x - i0) = \sqrt[3]{x} e^{2\pi i/3}, \quad x \geqslant 0.$$

Поэтому интеграл

$$I_2 = \int\limits_{\gamma_-} \frac{f(z)}{(z+8)^2}\, dz = -e^{2\pi i/3} \int\limits_0^R \frac{\sqrt[3]{x}}{(z+8)^2} dx = -e^{2\pi i/3} \cdot I_1.$$

4. Правая часть равенства (7) не зависит от R при $R > 8$ и равна

$$2\pi i \cdot \operatorname*{res}_{z=-8} \frac{f(z)}{(z+8)^2} = 2\pi i f'(z)\Big|_{z=-8} = 2\pi i \frac{f(z)}{3z}\Big|_{z=-8} =$$
$$= 2\pi i \cdot \frac{2}{3(-8)} e^{\pi i/3} = -\frac{\pi i}{6} e^{\pi i/3}.$$

В результате из равенства (7) при $R \to +\infty$ получаем

$$\left(1 - e^{2\pi i/3}\right) I = -\frac{\pi i}{6} e^{\pi i/3},$$

откуда

$$I = -\frac{\pi i e^{\pi i/3}}{6\left(1 - e^{2\pi i/3}\right)} = \frac{\pi}{12} \frac{1}{\frac{e^{\pi i/3} - e^{-\pi i/3}}{2i}} = \frac{\pi}{12 \sin\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{6\sqrt{3}}. \qquad \blacktriangle$$

Пример. Вычислить интеграл

$$I = \int\limits_1^2 \sqrt[5]{\frac{(2-x)^3}{(x-1)^3}} dx.$$

Решение. Для вычисления этого интеграла с помощью вычетов регулярно продолжим подынтегральную функцию с интервала $(1, 2]$ в некоторую область в $\overline{\mathbb{C}}$, граница которой содержит отрезок $[1, 2]$. Так как подынтегральная функция при продолжении в $\overline{\mathbb{C}}$ становится многозначной функцией $\left\{\sqrt[5]{\frac{(2-z)^3}{(z-1)^3}}\right\}$, то необходимо позаботиться о возможности выделения регулярных ветвей этой функции в полученной области. Следуя результатам § 18–19, получаем, что в области $\overline{\mathbb{C}} \setminus [1, 2]$ у функции

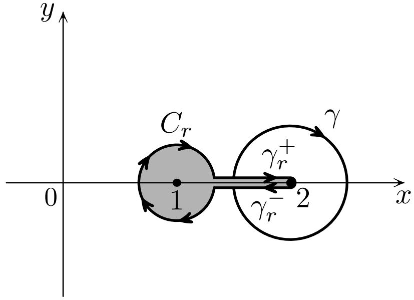

Рис. 7.4

$\left\{\sqrt[5]{\frac{(2-z)^3}{(z-1)^3}}\right\}$ существуют регулярные ветви. Выберем такую ее регулярную ветвь $f(z)$, у которой $f(x+i0)>0$ при $x\in(1,2)$. Если для разреза $[1,2]$ ввести, как и в предыдущей задаче, два берега: верхний γ^+ и нижний γ^-, то эта ветвь $f(z)$ непрерывно продолжима на границу $\gamma^+\cup\gamma^-$ всюду, кроме точки 1. Чтобы выполнялись условия теоремы Коши о вычетах, нужно исключить точку 1 из границы и рассмотреть область

$$D(r)=\overline{\mathbb{C}}\setminus\left([1,2]\cup\{z\colon |z-1|\leqslant r\}\right),\quad \text{где}\quad r\in(0,1).$$

В этой области функция $f(z)$ всюду регулярна (кроме ∞) и непрерывно продолжима вплоть до ее границы $\Gamma_r=C_r\cup\gamma_r^+\cup\gamma_r^-$, где окружность $C_r=\{z\colon |z-1|=r\}$ ориентирована по ходу часовой стрелки, γ_r^+ — верхний берег разреза отрезка $[1+r,2]$ с ориентацией от точки $1+r$ до точки 2, γ_r^- — нижний берег разреза отрезка $[1+r,2]$ с ориентацией от точки 2 до точки $1+r$. Таким образом выбранная ориентация границы Γ_r является положительной для области $D(r)$.

Так как в области $D(r)$ функция $f(z)$ имеет единственную особую точку $z=\infty$, то по теореме Коши о вычетах получаем

$$\int\limits_{\gamma_r^+} f(z)\,dz+\int\limits_{C_r} f(z)\,dz+\int\limits_{\gamma_r^-} f(z)\,dz=2\pi i\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z). \qquad (8)$$

Покажем, что второе слагаемое левой части (8) стремится к нулю при $r \to +0$. Имеем

$$\left|\int\limits_{C_r} f(z)\,dz\right| \leqslant \int\limits_{C_r} |f(z)||dz| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{C_r} \left(\frac{1+r}{r}\right)^{3/5} |dz| = \left(\frac{1+r}{r}\right)^{3/5} 2\pi r \to 0 \quad \text{при} \quad r \to +0.$$

Если $x \in \gamma_r^+$, то $f(x) = \sqrt[5]{\left(\frac{2-x}{x-1}\right)^3}$,

$$\int\limits_{\gamma_r^+} f(z)\,dz = \int\limits_{1+r}^{2} f(x)\,dx \to I \quad \text{при} \quad r \to +0. \tag{9}$$

Если $x \in \gamma_r^-$, то

$$f(x) = \sqrt[5]{\left(\frac{2-x}{x-1}\right)^3} e^{-i\frac{6\pi}{5}},$$

так как

$$\Delta\gamma \arg\left(\frac{2-z}{z-1}\right)^3 = -6\pi,$$

где $\gamma = \{z\colon |z-2| = \varepsilon,\ 0 < \varepsilon < 1\}$ — окружность, ориентированная по ходу часовой стрелки. Поэтому

$$\int\limits_{\gamma_r^-} f(z)\,dz \to -e^{-6\pi i/5} I \quad \text{при} \quad r \to +0. \tag{10}$$

Найдем $\operatorname*{res}\limits_{z=\infty} f(z) = -c_{-1}$, где c_{-1} — коэффициент при $\frac{1}{z}$ ряда Лорана функции $f(z)$ в окрестности точки $z = \infty$. Если $x \in \mathbb{R}$ и $x > 2$, то

$$f(x) = \sqrt[5]{\left|\frac{(2-x)^3}{(x-1)^3}\right|} e^{-i3\pi/5} = e^{-3\pi i/5}\left(1 - \frac{2}{x}\right)^{3/5}\left(1 - \frac{1}{x}\right)^{-3/5} =$$

$$= e^{-\frac{3\pi i}{5}}\left(1 - \frac{6}{5x} + \ldots\right)\left(1 + \frac{3}{5x} + \ldots\right) =$$

$$= e^{-3\pi i/5}\left(1 + \left(\frac{3}{5} - \frac{6}{5}\right)\frac{1}{x} + \ldots\right) = S(x).$$

Так как сумма аналитического продолжения полученного ряда $S(z)$ и функция $f(z)$ регулярны в кольце $\{z\colon |z| > 2\}$, причем $f(x) = S(x)$ для всех $x \in \mathbb{R}$, $x > 2$, то по теореме единственности для регулярных функций

$$f(z) = S(z) = e^{-3\pi i/5} - \frac{e^{-3\pi i/5}}{z} \cdot \frac{3}{5} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{c_k}{z^k}$$

для всех $z \in \mathbb{C}$, $|z| > 2$.

Следовательно,

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = -c_{-1} = \frac{3}{5} e^{-3\pi i/5}. \tag{11}$$

Переходя к пределу в равенстве (8) с учетом соотношений (9)–(11), получаем

$$I\left(1 - e^{-6\pi i/5}\right) = \frac{6}{5}\pi i e^{-3\pi i/5}$$

или

$$I\left(\frac{e^{3\pi i/5} - e^{-3\pi i/5}}{2i}\right) = \frac{3\pi}{5},$$

откуда находим

$$I = \frac{3\pi}{5\sin\frac{3\pi}{5}}.$$

▲

Пример. Вычислить интеграл

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{(x+1)(x+2)^2} dx. \tag{12}$$

Решение. В комплексной плоскости с разрезом по лучу $[0, +\infty)$ функция $h(z) = \ln|z| + i\varphi$, $0 < \varphi < 2\pi$ является регулярной ветвью многозначной функции $\operatorname{Ln} z$ (§ 17).

Обозначим

$$R(z) = \frac{1}{(z+1)(z+2)^2}, \quad f(z) = R(z)h^2(z)$$

и рассмотрим область D, граница Γ которой показана на (рис. 7.5), где $0 < \rho < 1$, $R > 2$. В этой области функция $f(z)$ регулярна, за исключением точек $z = -1$, $z = -2$,

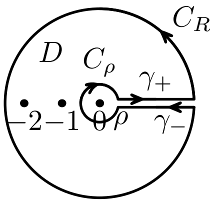

Рис. 7.5

и непрерывна около Γ вплоть до Γ. По основной теореме о вычетах получаем

$$\int\limits_{C_\rho} f(z)\,dz + \int\limits_{C_R} f(z)\,dz + \int\limits_{\gamma_+} f(z)\,dz +$$
$$+ \int\limits_{\gamma_-} f(z)\,dz = 2\pi i\left[\operatorname*{res}_{z=-1} f(z) + \operatorname*{res}_{z=-2} f(z)\right]. \qquad (13)$$

Рассмотрим поочередно члены этого равенства. Так как $|h(z)| \leqslant |\ln|z|| + 2\pi$, то

$$\left|\int\limits_{C_\rho} f(z)\,dz\right| = \left|\int\limits_{C_\rho} \frac{h^2(z)\,dz}{(z+1)(z+2)^2}\right| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{(|\ln\rho| + 2\pi)^2 2\pi\rho}{(1-\rho)(2-\rho)^2} \to 0 \quad \text{при } \rho \to +0,$$
$$\left|\int\limits_{C_R} f(z)\,dz\right| = \left|\int\limits_{C_R} \frac{h^2(z)\,dz}{(z+1)(z+2)^2}\right| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{(\ln R + 2\pi)^2 2\pi R}{(R-1)(R-2)^2} \to 0 \quad \text{при } R \to +\infty.$$

Если $z \in \gamma_+$, то $h(z) = \ln x$, а если $z \in \gamma_-$, то $h(z) = \ln x + 2\pi i$. Так как сумма интегралов по γ_+ и γ_- в левой части (13) равна

$$\int_\rho^R \ln^2 x\cdot R(x)\,dx-\int_\rho^R(\ln x+2\pi i)^2R(x)\,dx=$$

$$=-4\pi i\int_\rho^R \ln x\cdot R(x)\,dx+4\pi^2\int_\rho^R R(x)\,dx,$$

то переходя в левой части равенства (13) к пределу при $\rho\to+0$, $R\to+\infty$, получаем $-4\pi iI+4\pi^2I_1$, где

$$I_1=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(x+1)(x+2)^2}.$$

Найдем значение правой части (13), которая не зависит от ρ и R. Так как $z=-1$ — полюс первого порядка, а $z=-2$ — полюс второго порядка функции $f(z)$, то

$$\operatorname*{res}_{z=-1}f(z)=\left.\frac{h^2(z)}{(z+2)^2}\right|_{z=-1}=(i\pi)^2=-\pi^2,$$

$$\operatorname*{res}_{z=-2}f(z)=\left.\left(\frac{h^2(z)}{z+1}\right)'\right|_{z=-2}=\left.\left[\frac{2h(z)}{z(z+1)}-\frac{h^2(z)}{(z+1)^2}\right]\right|_{z=-2}=$$

$$=\ln 2+i\pi-(\ln 2+i\pi)^2=\pi^2+\ln 2-\ln^2 2+i\pi(1-2\ln 2).$$

Из равенства (13) следует, что

$$-4\pi iI+4\pi^2I_1=2\pi i\left(\ln 2-\ln^2 2+i\pi(1-2\ln 2)\right),$$

откуда находим, приравняв действительные и мнимые части и учитывая, что $I_1\in\mathbb{R}$,

$$I=\frac{1}{2}(\ln^2 2-\ln 2).\qquad\blacktriangle$$

§ 8. Конформные отображения элементарными функциями

Справочные сведения

1. Степенная функция.

Пусть $t \in \mathbb{R}$. Рассмотрим на области $G = \mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$ функцию

$$w = |z|^t e^{it \arg z}, \quad \text{где} \quad \arg z \in (0, 2\pi). \tag{1}$$

Эта функция регулярна на G. Причем при $t \neq 0$ функция (1) однолистна на области $D \subset G$, если D не содержит двух различных точек z_1, z_2, таких, что $z_2 = z_1 \cdot e^{2\pi ik/t}$, $k \in \mathbb{Z}$.

В частности, при $t > 0$ функция (1) осуществляет конформное отображение угловой области $G_{0,\varphi_0} = \{z\colon |z| > 0,\ 0 < \arg z < \varphi_0\}$, где $\varphi_0 \leqslant 2\pi$, $|t|\varphi_0 \leqslant 2\pi$, на угловую область $G_{0,t\varphi_0}$ (рис. 8.1).

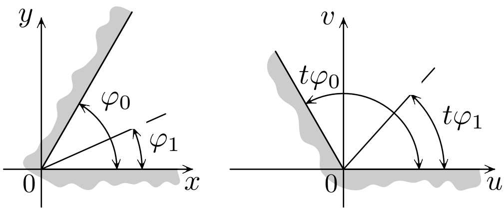

Рис. 8.1

Например, функция $w = z^2$ конформно отображает

1) верхнюю полуплоскость $\{z\colon \operatorname{Im} z > 0\}$ на плоскость с разрезом $\mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$ (рис. 8.2);
2) полукруг $\{z\colon |z| < 1,\ \operatorname{Im} z > 0\}$ на круг с разрезом $\{w\colon |w| < 1\} \setminus [0, 1)$ (рис. 8.3);
3) полуплоскость $\{z\colon \operatorname{Im} z > a > 0\}$ на внешность параболы $\{w = u + iv\colon v^2 > 4a^2(u + a^2)\}$ (рис. 8.4).

2. Экспоненциальная функция.

Функция $w = e^z$ осуществляет конформное отображение в области $D \subset \mathbb{C}$ тогда и только тогда, когда D не содержит

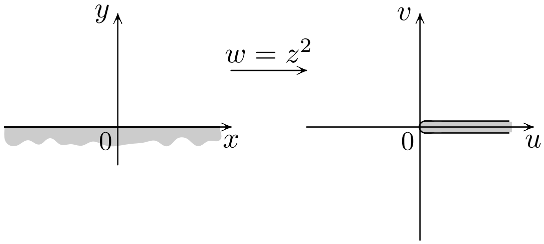

Рис. 8.2

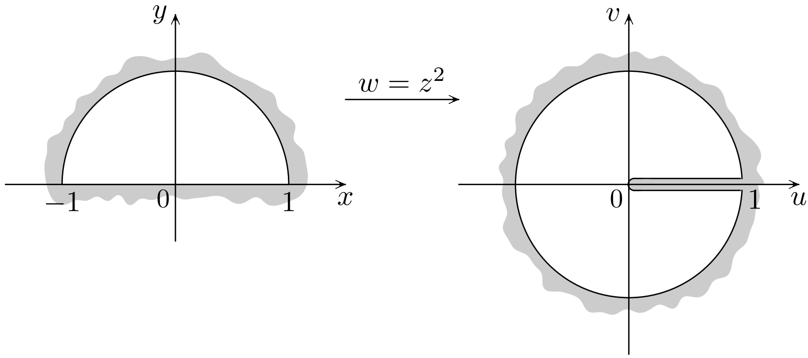

Рис. 8.3

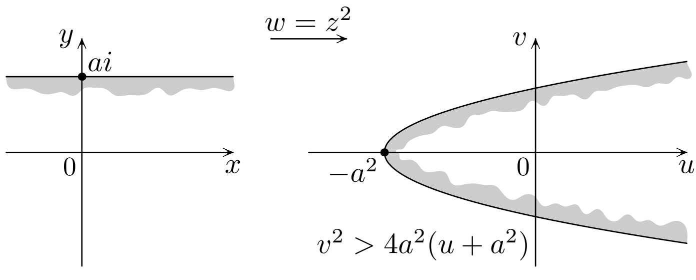

Рис. 8.4

двух различных точек z_1, z_2, таких, что $z_2 = z_1 + 2\pi k i$, где $k \in$ $\in \mathbb{Z}$.

Например, функция $w = e^z$ конформно отображает

1) полосу $\{z\colon 0 < \operatorname{Im} z < \pi\}$ на верхнюю полуплоскость $\{w\colon \operatorname{Im} w > 0\}$ (рис. 8.5);

2) полуполосу $\{z\colon \operatorname{Re} z < 0,\ 0 < \operatorname{Im} z < \pi\}$ на полукруг $\{w\colon |w| < 1,\ \operatorname{Im} w > 0\}$ (рис. 8.6);

3) полуполосу $\{z\colon \operatorname{Re} z > 0,\ 0 < \operatorname{Im} z < \pi\}$ на область $\{w\colon |w| > 1,\ \operatorname{Im} w > 0\}$ (рис. 8.7).

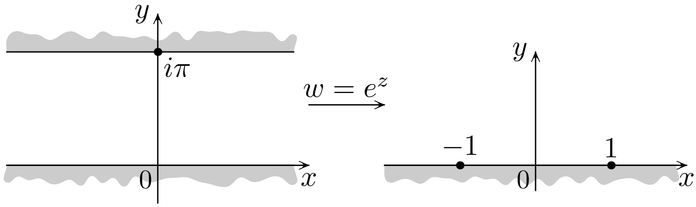

Рис. 8.5

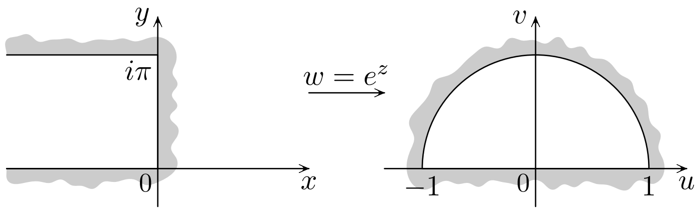

Рис. 8.6

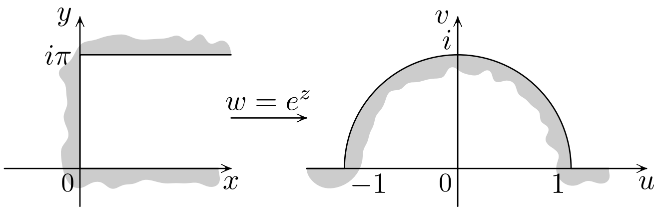

Рис. 8.7

3. Логарифмическая функция. Многозначная функция $w = \operatorname{Ln} z$ распадается на регулярные ветви во всякой односвязной области $G \subset \overline{\mathbb{C}}$, не содержащей точек 0 и ∞. Каждая регулярная ветвь $f(z) \in \operatorname{Ln} z$ в такой области G является однолистной функцией (так как обратная к ней функция e^z является однозначной), поэтому эта ветвь $f(z)$ осуществляет конформное отображение области G на область $f(G)$, которое является обратным к отображению области $f(G)$ на область G функцией $w = e^z$. Например, регулярная ветвь $f(z)$ функции $\operatorname{Ln} z$ кон-

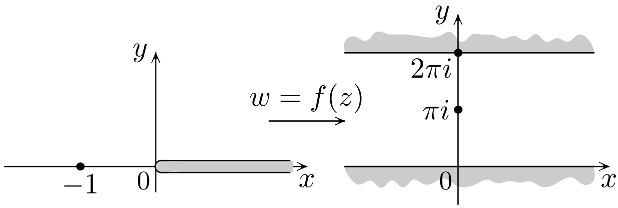

Рис. 8.8

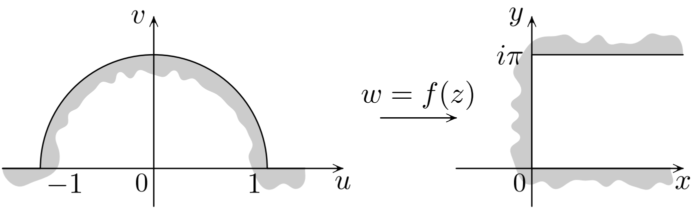

Рис. 8.9

формно отображает

1) плоскость $\mathbb{C}$ с разрезом по лучу $[0, +\infty)$ на полосу $0 < \operatorname{Im} w < 2\pi$ (если $f(-1) = \pi i$) (рис. 8.8);
2) область $\{z\colon \operatorname{Im} z > 0,\ |z| > 1\}$ на полуполосу $\{w\colon 0 < \operatorname{Im} w < \pi,\ \operatorname{Re} w > 0\}$ (если $f(2 + i0) = \ln 2$) (рис. 8.9).

4. Функция Жуковского $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ осуществляет конформное отображение области $D \subset \overline{\mathbb{C}}$ тогда и только тогда, когда точки ± 1 не принадлежат области D и для любой точки $z \in D$ точка $\frac{1}{z} \notin D$.

Например, функция Жуковского конформно отображает

1) верхнюю полуплоскость $\{z\colon \operatorname{Im} z > 0\}$ на плоскость $\mathbb{C}$ с разрезами по лучам $(-\infty, -1]$ и $[1, +\infty)$, т. е. на $\mathbb{C} \setminus ((-\infty, -1] \cup [1, +\infty))$ (рис. 8.10);
2) нижнюю полуплоскость $\{z\colon \operatorname{Im} z < 0\}$ на $\mathbb{C} \setminus ((-\infty, -1] \cup [1, +\infty))$;

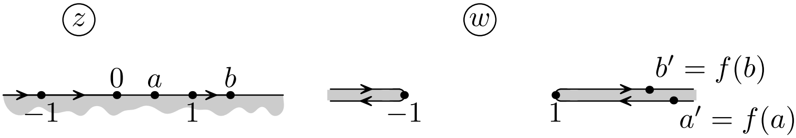

Рис. 8.10

3) единичный круг $\{z\colon |z| < 1\}$ на плоскость $\mathbb{C}$ с разрезом по отрезку $[-1, 1]$, т. е. на $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ (рис. 8.11);

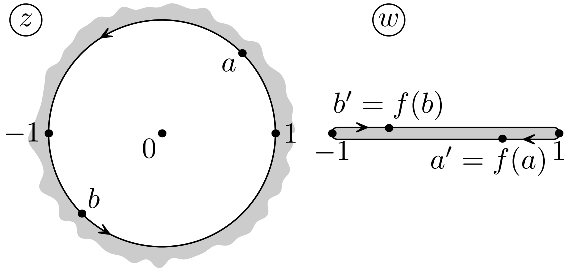

Рис. 8.11

4) внешность единичного круга (т. е. $\{z\colon |z| > 1\}$) на $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ (рис. 8.12);

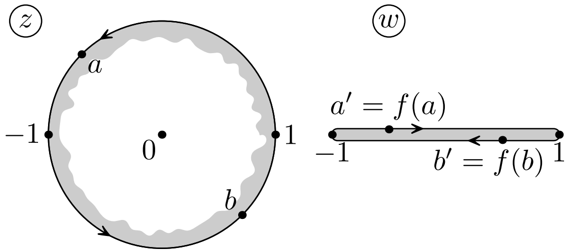

Рис. 8.12

5) область $\{z\colon \operatorname{Im} z > 0,\ |z| > 1\}$ на верхнюю полуплоскость $\{w\colon \operatorname{Im} w > 0\}$ (рис. 8.13);

6) полукруг $\{z\colon |z| < 1,\ \operatorname{Im} z < 0\}$ на верхнюю полуплоскость $\{w\colon \operatorname{Im} w > 0\}$ (рис. 8.14);

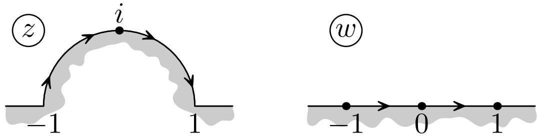

Рис. 8.13

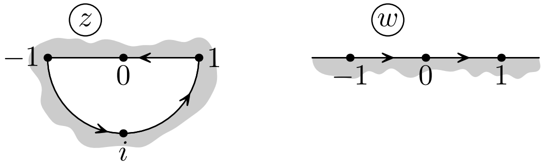

Рис. 8.14

7) область $\{z\colon |z| > \rho > 1\}$ (и круг $\{z\colon |z| < 1/\rho\}$) на внешность эллипса

$$\left\{w = u + iv\colon \frac{u^2}{a_\rho^2} + \frac{v^2}{b_\rho^2} > 1\right\},$$

где $a_\rho = \frac{1}{2}\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)$, $b_\rho = \frac{1}{2}\left|\rho - \frac{1}{\rho}\right|$ (рис. 8.15);

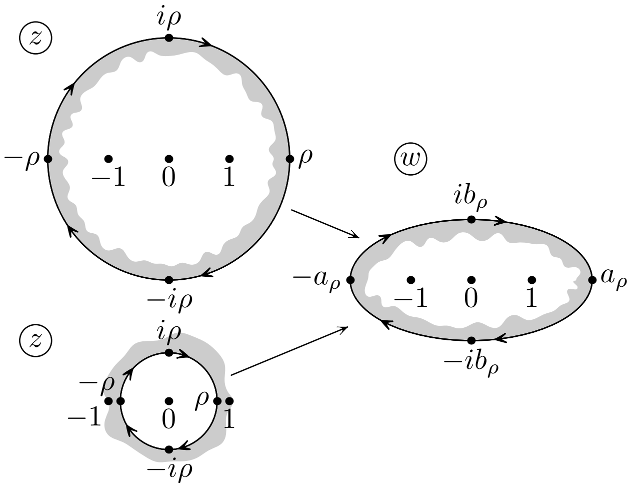

Рис. 8.15

8) угловую область $\{z\colon \alpha < \arg z < \pi - \alpha\}$, где $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, на внешность гиперболы $\frac{u^2}{\cos^2\alpha} - \frac{v^2}{\sin^2\alpha} = 1$ (рис. 8.16);

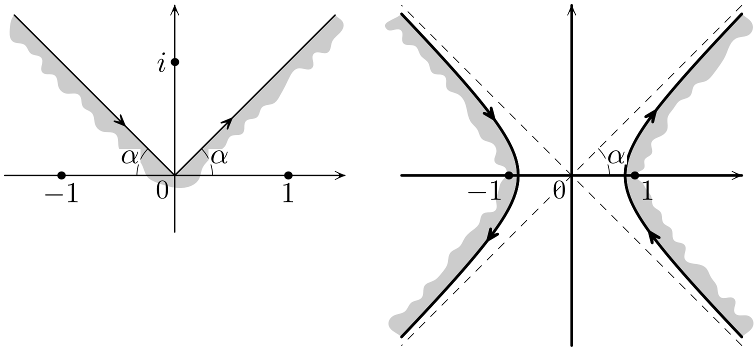

Рис. 8.16

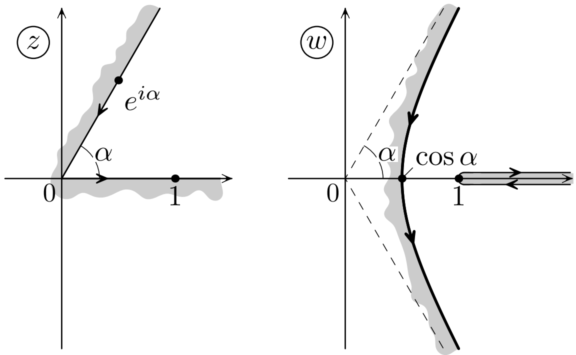

Рис. 8.17

9) угловую область $\{z\colon 0 < \arg z < \alpha\}$, где $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, на внутренность правой ветви гиперболы $\frac{u^2}{\cos^2\alpha} - \frac{v^2}{\sin^2\alpha} = 1$ с разрезом по лучу $[1, +\infty)$ (рис. 8.17);

10) угловую область $\{z\colon 0 < \arg z < \pi - \alpha,\ |z| > 1\}$, (рис. 8.18) где $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, на область

$$\left\{w = u + iv\colon \frac{u^2}{\cos^2\alpha} - \frac{v^2}{\sin^2\alpha} > 1,\ u > 0,\ v > 0\right\}.$$

5. Функция, обратная к функции Жуковского.

Многозначная функция $w = z + \sqrt{z^2 - 1}$, являющаяся обратной к функции Жуковского, в любой односвязной области $G \subset \overline{\mathbb{C}}$, не содержащей хотя бы одной кривой, соединяющей

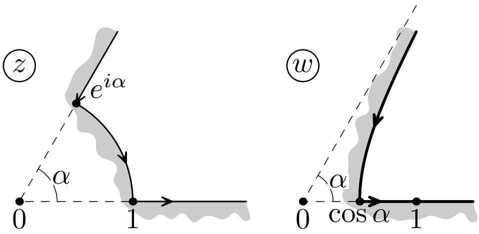

Рис. 8.18

точки $z = \pm 1$, распадается на две регулярные ветви. Всякая регулярная в области G ветвь функции $w = z + \sqrt{z^2 - 1}$ является однолистной (так как обратная к ней функция Жуковского является однозначной).

Например, регулярные ветви $f_1(z)$ и $f_2(z)$ обратной функции к функции Жуковского конформно отображают

1) плоскость с разрезом по отрезку $[-1, 1]$ на внешность единичного круга (если брать $f_1(z)$ такую, что $f_1(\infty) = \infty$) или на внутренность единичного круга (если брать $f_2(z)$ такую, что $f_2(\infty) = 0$) (рис. 8.19);

2) плоскость с разрезами по лучам $(-\infty, -1]$ и $[1, +\infty)$ на верхнюю полуплоскость (если брать $f_1(z)$ такую, что $f_1(0) = i$) или на нижнюю полуплоскость (если брать $f_2(z)$ такую, что $f_2(0) = -i$) (рис. 8.20);

3) верхнюю полуплоскость $\{z\colon \operatorname{Im} z > 0\}$ на область $\{w\colon \operatorname{Im} w > 0,\ |w| > 1\}$ (если брать $f_1(z)$ такую, что $f_1(0 + i0) = i$) или на область $\{w\colon |w| < 1,\ \operatorname{Im} w < 0\}$ (если брать $f_2(z)$ такую, что $f_2(0 + i0) = -i$) (рис. 8.21).

6. Тригонометрические и гиперболические функции.

Основные тригонометрические и гиперболические функции можно разложить в суперпозицию уже ранее рассмотренных элементарных функций.

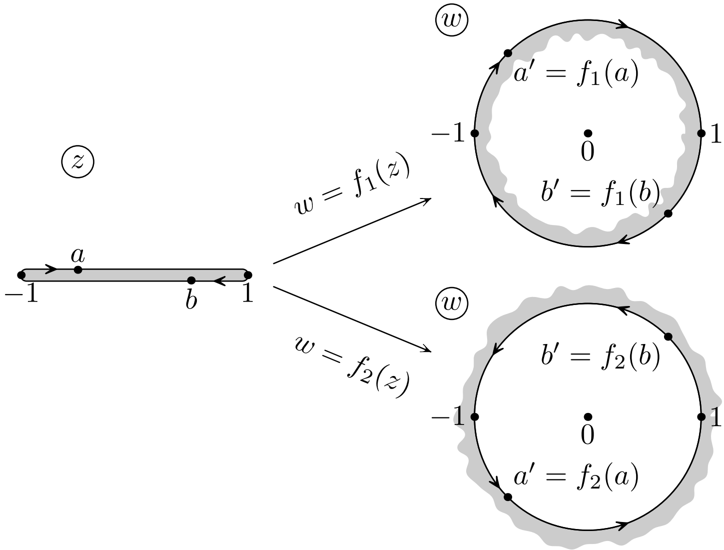

Рис. 8.19

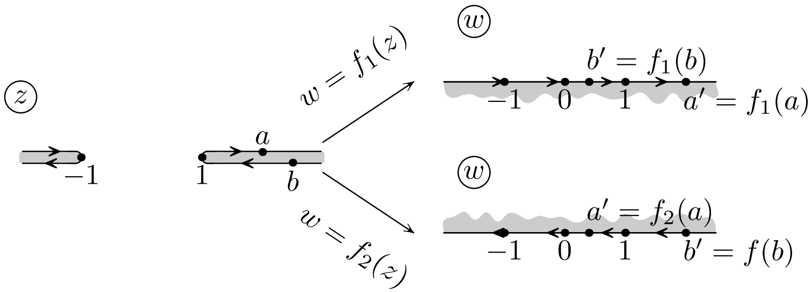

Рис. 8.20

Например, функция $w(z) = \operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$ является суперпозицией двух функций:

$$\zeta(z) = e^z, \quad w(\zeta) = \frac{1}{2}\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right).$$

Функция

$$w(z) = \operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{1}{i} \cdot \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}} = (-i)\frac{e^{2iz} - 1}{e^{2iz} + 1}$$

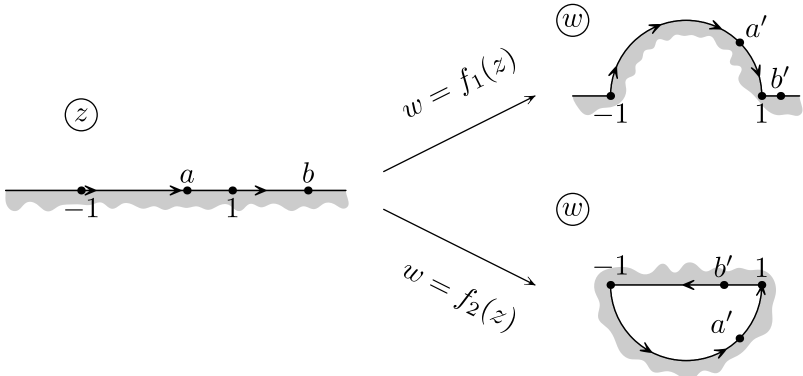

Рис. 8.21

является суперпозицией трех функций:

$$\zeta(z) = 2iz, \quad \eta(\zeta) = e^{\zeta}, \quad w(\eta) = (-i)\frac{\eta - 1}{\eta + 1}.$$

Примеры с решениями

Пример. Найти конформное отображение области D, являющейся верхней полуплоскостью $\{z\colon \operatorname{Im} z > 0\}$ с разрезом по отрезку $[0, ih]$, где $h > 0$ (рис. 8.22), на верхнюю полуплоскость $\{w\colon \operatorname{Im} w > 0\}$.

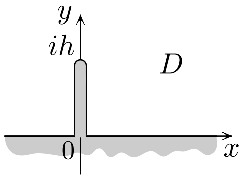

Рис. 8.22

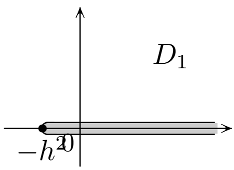

Рис. 8.23

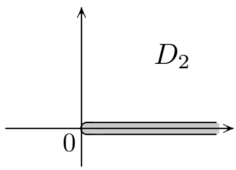

Рис. 8.24

Решение.

Функция $\xi = f_1(z) = z^2$ однолистна на области D и конформно отображает область D на область D_1, являющуюся плоскостью с разрезом по лучу $[-h^2, +\infty)$ (рис. 8.23).

Функция $\eta = f_2(\xi) = \xi + h^2$ конформно отображает область D_1 на область D_2, являющуюся плоскостью с разрезом по лучу $[0, +\infty)$ (рис. 8.24).

Функция $w = f_3(\eta) = \sqrt{|\eta|}e^{i\arg\eta/2}$, где $\arg\eta \in (0, 2\pi)$, конформно отображает область D_2 на верхнюю полуплоскость $\{\operatorname{Im} w > 0\}$.

Итак, функция $w = f_3\big(f_2\big(f_1(z)\big)\big)$ конформно отображает область D на область $\{w\colon \operatorname{Im} w > 0\}$.

Пример. Найти конформное отображение области D, являющейся верхней полуплоскостью $\{z\colon \operatorname{Im} z > 0\}$ с разрезом по дуге окружности $\{z\colon |z| = 1,\ 0 \leqslant \arg z \leqslant \alpha\}$, где $0 < \alpha < \pi$ (рис. 8.25), на верхнюю полуплоскость.

Решение.

Функция Жуковского $\xi = f_1(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ отображает область D на плоскость с разрезами по лучам $(-\infty, -1]$ и $[\cos\alpha, +\infty)$ (область D_1) (рис. 8.26).

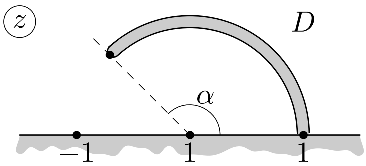

Рис. 8.25

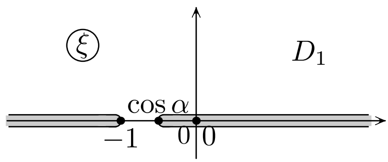

Рис. 8.26

Дробно-линейная функция $\eta = f_2(\xi) = \frac{\xi - \cos\alpha}{\xi + 1}$ отображает область D_1 на область D_2, являющуюся плоскостью с разрезом по лучу $[0, +\infty)$ (рис. 8.24).

Функция $w = f_3(\eta) = \sqrt{|\eta|}e^{i\arg\eta/2}$, где $\arg\eta \in (0, 2\pi)$, конформно отображает область D_2 на верхнюю полуплоскость $\{w\colon \operatorname{Im} w > 0\}$.

Итак, функция $w = f_3\big(f_2\big(f_1(z)\big)\big)$ является искомой.

Пример. Область $D = \{z\colon \operatorname{Re} z > 0,\ |z - 1| > 1\} \setminus [2, 3]$ (рис. 8.27) конформно отобразить на верхнюю полуплоскость.

Решение.

Функция $\xi = f_1(z) = \frac{1}{z}$ отображает область D на область

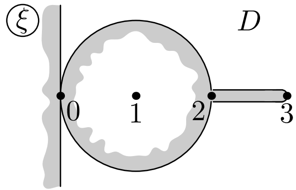

Рис. 8.27

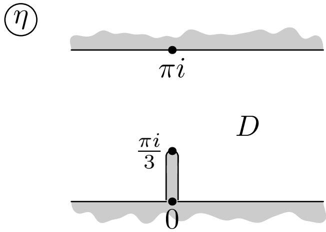

Рис. 8.28

D_1, являющуюся полосой с разрезом, т. е.

$$D_1 = \left\{\xi\colon 0 < \operatorname{Re}\xi < \frac{1}{2}\right\} \setminus \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right].$$

Линейная функция $\eta = f_2(\xi) = \pi i(1 - 2\xi)$ отображает область D_1 на область

$$D_2 = \{\eta\colon 0 < \operatorname{Im}\eta < \pi\} \setminus \left[0, \frac{\pi}{3}i\right]$$

(рис. 8.28). Функция $w = f_3(\eta) = e^{\eta}$ отображает область D_2 на область (рис. 8.25) при $\alpha = \frac{\pi}{3}$. Далее см. пример 2.

Пример. Найти конформное отображение области D (рис. 8.29), являющейся полуполосой $\{z\colon 0 < \operatorname{Im} z < \pi,\ \operatorname{Re} z > 0\}$ с разрезом по отрезку $\left[\frac{\pi i}{2}; \frac{\pi i}{2} + 1\right]$ на верхнюю полуплоскость.

Решение.

Функция $\xi = f_1(z) = e^{z}$ отображает область D на область D_1 (рис. 8.30), являющуюся верхней полуплоскостью с выброшенным единичным полукругом и разрезом $[i,\, ei]$. Функция $\eta = f_2(\xi) = \frac{1}{2}\left(\xi + \frac{1}{\xi}\right)$ отображает область D_1 на верхнюю полуплоскость с разрезом $[0,\, i \operatorname{sh} 1]$ ((рис. 8.22) при $h = \operatorname{sh} 1$). Далее воспользоваться решением примера 1.

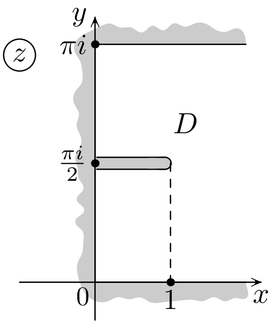

Рис. 8.29

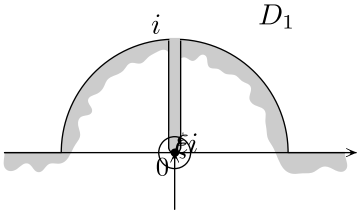

Рис. 8.30

§ 9. Задачи

Задачи семестровой к/р по ТФКП (2001–2002 г.)

1. Разложить в ряд Лорана по степеням $(z-i)$ функцию

$$f(z) = \frac{2i+1}{(z-i-1)(z+i)}$$

в кольце, которому принадлежит точка $z = \frac{i}{2}$. Указать границы кольца сходимости.

2. Исследовать все особые точки функции

$$f(z) = \frac{1}{e^z - 1} - \frac{1}{z}.$$

3. Вычислить $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(2-3x)}{x^2+4}\,dx$.

4. Вычислить $\oint\limits_{|z+i|=2} \frac{z-1}{z\left(\cos\frac{1}{z}-1\right)}\,dz$.

5. Вычислить $\int\limits_{-2}^{1} \sqrt[10]{(x+2)^5(1-x)^5}\,dx$.

6. Пусть $f(z)$ — регулярная ветвь функции $\mathrm{Ln}(z^2-4z)$ в плоскости с разрезом $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$, $\gamma_1 = \{|z-2| = 2,\ \mathrm{Im}\,z \leqslant 0\}$, $\gamma_2 = \{-\mathrm{Re}\,z = \mathrm{Im}\,z,\ \mathrm{Im}\,z \geqslant 0\}$, причем $\mathrm{Im}\,f(-5) = 0$. Вычис-

лить
$$\oint\limits_{|z-2-2i|=1} \frac{dz}{f(z)-\ln 8-3\pi i}.$$

Задачи семестровой к/р по ТФКП (2001–2002 г.)

1. Разложить в ряд Лорана по степеням $z+1$ функцию
$$f(z)=\frac{z+i}{iz^2-2z+8i}$$
в кольце, которому принадлежит точка $z=2$. Указать границы кольца сходимости.

2. Найти особые точки однозначного характера функции
$$f(z)=\frac{2z+\pi}{2z-\pi}\exp\left(\frac{\operatorname{tg} z}{z^2-\pi^2}\right)$$
и определить их тип. Ответ обосновать.

Применяя теорию вычетов, вычислить интегралы **3, 4, 5**:

3. $\oint\limits_{|z-2|=4} \frac{z(z^2+1)}{\exp\frac{2}{z^2}-2}\,dz.$ **4.** $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x+3)\sin^3 x}{x^2+4x+8}\,dx.$ **5.** $\int\limits_{-3}^{7} \sqrt[5]{\left(\frac{x-7}{x+3}\right)^3}\frac{x\,dx}{x+4}.$

6. Пусть $g(z)$ — регулярная ветвь функции $\sqrt[3]{(z+1)(i-z)^2}$ в плоскости с разрезом по отрезку $[-1;i]$ такая, что $g(0)=-1$. Вычислить интеграл
$$\oint\limits_{|z|=2} \frac{g(z)}{z-1}\,dz.$$

Задачи семестровой к/р по ТФКП (2002–2003 г.)

1. Разложить в ряд Лорана по степеням $(z-1)$ в окрестности точки $z_0=-1$ функцию
$$f(z)=\frac{z+8}{(z-1)(z+2)^2}$$
и указать область сходимости.

2. Найти все особые точки функции
$$f(z)=\frac{\cos\frac{\pi i}{2(z-1)}}{e^{\pi z}+e^{\pi}},$$
определить их тип. Ответ обосновать.

Применяя теорию вычетов, вычислить интегралы **3, 4, 5**:

3. $\oint\limits_{|z-\pi|=4} \frac{\cos\frac{1}{z}}{1-\cos z}\,dz$. **4.** $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^3\sin(1-\sqrt{2}x)}{(2x^2+1)^2}\,dx$. **5.** $\int\limits_{1}^{2} \frac{dx}{x\sqrt[3]{(2-x)^2(x-1)}}$.

6. Пусть $h(z)$ — регулярная ветвь многозначной функции $\operatorname{Ln}\frac{z+1}{2+iz}$ в плоскости с разрезом по кривой

$$\gamma = \left\{ z \mid |z| = 2,\ -\pi \leqslant \arg z \leqslant \frac{\pi}{2} \right\} \cup [-2,-1]$$

такая, что $\operatorname{Im} h(\infty) = -\frac{\pi}{2}$. Найти $h(0)$ и вычислить интеграл

$$J = \oint\limits_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{h(z)}{\sin^3 z}\,dz.$$

Задачи семестровой к/р по ТФКП (2003–2004 г.)

1. Найти все особые точки функции

$$f(z) = \frac{z^2\sin^2 z \cdot \sin\frac{1}{z-\pi/2}}{(\cos z - 1)^2}\, e^{\frac{\sin z}{z}},$$

определить их тип. Ответ обосновать.

2. Разложить в ряд Лорана по степеням $(z-2-i)$ функцию

$$f(z) = \frac{z^2 - 2iz + 6}{z^2(z+3i)}$$

в кольце, которому принадлежит точка $z = 5 + i$. Указать границы кольца сходимости.

Применяя теорию вычетов, вычислить интегралы **3, 4, 5**:

3. $\oint\limits_{|z+1+i|=2} \frac{z-1}{(z+1)\sin\frac{1}{z}}\,dz$. **4.** $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\cos(2-x)}{4x^2+1}\,dx$. **5.** $\int\limits_{1}^{2} \sqrt[5]{\frac{(2-x)^3}{(x-1)^3}} \cdot \frac{1}{x}\,dx$.

6. Пусть $g(z)$ — регулярная ветвь многозначной функции $\{\sqrt{1+4z^2}\}$ в плоскости с разрезом по кривой

$$\gamma = \left\{ z \mid |z| = \frac{1}{2},\quad \frac{\pi}{2} \leqslant \arg z \leqslant 2\pi \right\}$$

такая, что $g(0) = 1$. Пусть $f(z) = \frac{z}{(g(z)+3)^2}$. Найти $\operatorname*{res}\limits_{\infty} f$ и вычислить интеграл

$$J = \oint\limits_{|z|=\frac{1}{\sqrt{2}}} f(z)\,dz.$$

Задачи семестровой к/р по ТФКП (2005–2006 г.)

1. Разложить в ряд Лорана по степеням $(z-3)$ функцию

$$f(z) = \frac{2z+i}{(z+2i)^2} + \frac{z+8+6i}{z^2+2z(i-2)-8i}$$

в кольце, которому принадлежит точка $z=0$. Найти радиусы кольца сходимости.

2. Найти все особые точки функции

$$f(z) = \frac{\mathrm{Cos}^2\left(\frac{\pi}{iz-z^2}\right)}{\left(e^{\frac{2\pi}{z}}-1\right)^3},$$

определить их тип. Ответ обосновать.

Применяя теорию вычетов, вычислить интегралы **3, 4, 5**:

3. $\oint\limits_{|z-i|=1} \frac{e^{iz}}{\mathrm{ch}^2 z}\,dz.$ **4.** $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(6x-1)\,\mathrm{Sin}(1-2x)}{4x^2+4x+5}\,dx.$ **5.** $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{\ln(x-1)\cdot\sqrt{x-1}}{x^2}\,dx.$

6. Пусть $f(z)$ — регулярная ветвь многозначной функции $\mathrm{Ln}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)$ в области $G = \{z \mid |z| > 1\}$ такая, что $f(\infty) = 0$. Доказать, что многозначная функция $\sqrt{f(z)+4i}$ распадается в G на регулярные ветви.

Пусть $g(z)$ — регулярная ветвь функции $\sqrt{f(z)+4i}$ в G такая, что $g(\infty) = -\sqrt{2}(i+1)$. Вычислить интеграл

$$J = \oint\limits_{|z|=2} \frac{dz}{g(z)}.$$

§ 10. Ответы

Ответы к семестровой к/р по ТФКП (2001–2002 г.)

1. $f(z) = \frac{1}{z-i-1} - \frac{1}{z+i} = -\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(z-i)^n - \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2i)^{n+1}}(z-i)^n$,
$\forall\, z : |z-i| < 1$.
2. $z_k = 2\pi k i$, $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$ — полюса 1-го порядка; $z = 0$ — устр. о. т.; $z = \infty$ — неизол. о. т.
3. $I = \frac{\pi}{2}\, e^{-6} \cdot \sin 2$.
4. $I = \frac{\pi i}{3}$.
5. $I = \frac{9\pi}{8}$.
6. $I = -4\pi$.

Ответы к семестровой к/р по ТФКП (2001–2002 г.)

1. $f(z) = -\frac{i}{2(z+4i)} - \frac{i}{2(z-2i)}$; $t = z+1$: $\widetilde{f}(t) = -\frac{i}{2(t-1+4i)} - \frac{i}{2(t-1-2i)} = \frac{i/2}{(1-4i)\left(1-\frac{t}{1-4i}\right)} + \frac{i/2}{t\left(1-\frac{1+2i}{t}\right)} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{i/2}{(1-4i)^{n+1}}t^n - \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{i(1+2i)^{n-1}}{2t^n}$,

$f(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{i/2}{(1-4i)^{n+1}}(z+1)^n - \sum\limits_{n=-\infty}^{-1}\frac{i(z+1)^n}{2(1+2i)^{n+1}}$, $\sqrt{5} < |z+1| < \sqrt{17}$.

2. $f(z) = \frac{2z+\pi}{2z-\pi}\exp\left(\frac{\operatorname{tg} z}{z^2-\pi^2}\right)$.
$z = \pm\pi$ — у.о.т.; $z = \pi/2 + \pi k$ — с.о.т; ∞ — пред.с.о.т.
3. $-16\pi i$.

4. $$I = \frac{3}{4}\underbrace{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{(x+3)\sin x}{x^2+4x+8}\,dx}_{I_1} - \frac{1}{4}\underbrace{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{(x+3)\sin 3x}{x^2+4x+8}\,dx}_{I_2}.$$

$-2-2i$ — полюс 1 порядка;
$f_1(z) = \frac{(z+3)e^{iz}}{(z+2+2i)(z+2-2i)}$; $a = \operatorname{res}_{-2+2i} f_1 = \frac{(1+2i)e^{i(-2+2i)}}{4i} = \frac{e^{-2}}{4i}(1+2i)(\cos 2 - i\sin 2)$,
$I_1 = \operatorname{Im}(2\pi i a) = \operatorname{Im}\left(\frac{\pi e^{-2}}{2}(1+2i)(\cos 2 - i\sin 2)\right) = \frac{\pi e^{-2}}{2}(2\cos 2 - \sin 2)$.

$f_2 = \frac{(z+3)e^{3iz}}{(z+2+2i)(z+2-2i)}$;
$b = \mathrm{res}_{-2+2i}\, f_2 = \frac{(1+2i)e^{3i(-2+2i)}}{4i} = \frac{e^{-6}}{4i}(1+2i)(\cos 6 - i\sin 6)$,
$I_2 = \mathrm{Im}(2\pi i b) = \mathrm{Im}\Big(\frac{\pi e^{-6}}{2}(1+2i)(\cos 6 - i\sin 6)\Big) =$
$= \frac{\pi e^{-6}}{2}(2\cos 6 - \sin 6)$.
$I = \frac{\pi}{8}\big(3e^{-2}(2\cos 2 - \sin 2) - e^{-6}(2\cos 6 - \sin 6)\big)$.

5. $\dfrac{\pi}{\sin\frac{3\pi}{5}}(10 - 4\cdot 11^{3/5})$.

6. $\boldsymbol{J = -2\pi i(-C_{-1}) = 2\pi i e^{\frac{4\pi i}{3}}\left[1 + \frac{1}{3} - \frac{2i}{3}\right] = \frac{4}{3}\pi(1 + 2i)e^{\frac{4\pi i}{3}}}$. $J = -2\pi i\,\mathrm{res}_\infty f$, $f = \frac{g(z)}{z-1}$;
$x > 2$: $g(x) = (-1)\sqrt[3]{(x+1)(x^2+1)}e^{\frac{i}{3}(0+2\,\mathrm{arctg}\, x)}$,
$\frac{g(x)}{x} = \sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}e^{i\pi + \frac{2i}{3}\mathrm{arctg}\, x} \underset{x\to+\infty}{\overset{\Gamma}{\to}} e^{\frac{4\pi i}{3}}$, т.е. $g(z) \sim e^{\frac{4\pi i}{3}} z$.
С другой стороны, $\frac{g(z)}{z} \in \sqrt[3]{1}\left(1+\frac{1}{z}\right)^{1/3}\left(1-\frac{i}{z}\right)^{2/3}$. $\exists\, g_0(z) \in \left(1+\frac{1}{z}\right)^{1/3}$, $g_0(\infty) = 1$, $\exists\, g_1(z) \in \left(1-\frac{i}{z}\right)^{2/3}$, $g_1(\infty) = 1$, т.е. $\sqrt[3]{1}|_0 = e^{\frac{4\pi i}{3}}$. $g_0(z) = 1 + \frac{1}{3z} - \frac{1}{9z^2} + \ldots$; $g_1(z) = 1 - \frac{2i}{3z} + \ldots$; $\frac{g(z)}{z} = e^{\frac{4\pi i}{3}}\left(1 + \frac{1}{3z} + o(\frac{1}{z})\right)\left(1 - \frac{2i}{3z} + o(\frac{1}{z})\right)$, $|z| > 1$. $f(z) = \frac{g(z)/z}{1-1/z} = e^{\frac{4\pi i}{3}}\left(1 + \left(\frac{1}{3} - \frac{2i}{3}\right)\frac{1}{z} + o(\frac{1}{z})\right)\left(1 + \frac{1}{z} + \ldots\right)$,

Ответы к семестровой к/р по ТФКП (2002–2003 г.)

1. $f(z) = \frac{1}{z-1} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{3^{n+2}}(2n+5)(z-1)^n$, $0 < |z-1| < 3$.

2. $z_k = 1 + (1+2k)i$ — полюс 1-го пор., $k \neq 0, -1$;
$z = 1 \pm i$ — у.о.т.,
$z = 1$ — с.о.т.; $z = \infty$ — пред. т. полюсов .

3. $\mathop{\mathrm{res}}\limits_{0} f = 0$, $\mathop{\mathrm{res}}\limits_{2\pi} f = \frac{1}{2\pi^2}\sin\frac{1}{2\pi}$; $I = \frac{i}{\pi}\sin\frac{1}{2\pi}$.

4. $-\frac{\pi\cos 1}{8e}$.

5. $\frac{2\pi}{\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt{3}}$.

6. $J = 2\pi^2 - \pi i\left(\frac{5}{4} + \ln 2\right)$, $h(0) = -\ln 2 - 2\pi i$.

Ответы к семестровой к/р по ТФКП (2003–2004 г.)

1. $z=-\frac{\pi}{2}$, $z_k=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$ — полюсы 1-го порядка,
$z_l=\pi l$ — С.О.Т., ∞ — неизол. О.Т.

2. $f(z)=\frac{2}{z-4i}+\frac{1}{z-2i}=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{(z-i)^n}{3^n i^{n+1}}+\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{i^n}{(z-i)^{n+1}}$.

3. $I=4\pi(e-z)$.

4. $I=2\pi\sin 12\frac{e^{-\sqrt{23}}}{\sqrt{23}}$.

5. $I=\frac{3\pi}{4\sqrt{2}}$.

6. $f(z)=2\pi i+\ln z+\sum\limits_{1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\frac{1}{(1+i)^n}+\frac{1}{(1-i)^n}\right)(z-1)^n$, $R=\sqrt{2}$,
$S\left(-\frac{1}{5}\right)=2\pi i+\ln\frac{26}{25}$.

Ответы к семестровой к/р по ТФКП (2005–2006 г.)

1. $f(z)=\frac{3}{z-4}-\frac{3i}{(z+2i)^2}=\sum\limits_{k=-\infty}^{-1}3(z-3)^k+\sum\limits_{k=0}^{+\infty}3i(k+1)(-1)^{k+1}(3+$
$+2i)^{-k-2}(z-3,\ K=\{z\mid 1<|z-3|<\sqrt{13}\})$.

2. $-i$, $\frac{i}{3}$ — полюса 1-го порядка; $\frac{i}{k}$ — полюса 3-го порядка, $K\in\mathbb{Z}\setminus\{-1,\,0,\,1,\,3\}$, i — СОТ; 0 — точка накопления полюсов; ∞ — полюс 3-го порядка.

3. $2\pi e^{-\frac{\pi}{2}}$.

4. $-\frac{\pi e^{-2}}{2}(3\cos 2+2\sin 2)$.

5. π.

6. $\frac{\pi(i-1)}{4\sqrt{2}}$.