МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное агентство по образованию
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
Московский физико-технический институт
(государственный университет)

Кафедра высшей математики

# ПРЕДЕЛ, НЕПРЕРЫВНОСТЬ И ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Учебно-методическое пособие

*Составитель: А.Ю. Петрович*

Москва, 2007

УДК 517.22, 517.24

Рецензент:
Доктор физико-математических наук *Иванов Г.Е.*

**Предел, непрерывность и дифференцируемость функций нескольких переменных:** Учебно-методическое пособие / Сост. А.Ю. Петрович — М.: МФТИ, 2007. 64 с.

УДК 517.22, 517.24

На примере функций двух переменных поясняется качественное отличие понятий предела, непрерывности и дифференцируемости функций многих переменных от одномерного случая. Особое внимание уделено вопросам, которые обычно поверхностно освещаются в курсах математического анализа, что может привести к неверному их пониманию и неверному решению соответствующих задач (связь двойного предела с пределами по направлениям, применение полярных координат при исследовании существования двойных пределов, применение для этой цели одномерной формулы Тейлора, исследование дифференцируемости функций двух переменных). Используется удобная не совсем обычная символика для нахождения частных производных, акцентируется внимание на необходимости получения аккуратных оценок для доказательства существования двойных пределов. Нигде ранее не приводилось решение такого количества разнообразных примеров.

Предназначено для студентов и преподавателей университетов и технических вузов.

# Содержание

# I. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

## § 1. Определение и основные свойства

Определение предела функции нескольких переменных формально не отличается от определения предела функции одной переменной. В курсах математического анализа обычно даются два определения предела — по Коши и по Гейне, доказывается их равносильность.

**Определение 1.1 (по Коши).** Функция $f(\vec{x})$, определённая в некоторой проколотой окрестности точки $\vec{a}$, имеет в этой точке предел, равный $b$, если для любого положительного числа $\varepsilon$ найдётся такое положительное число $\delta$, что для всех $\vec{x}$ из проколотой $\delta$-окрестности $\vec{a}$ выполняется неравенство $|f(\vec{x}) - b| < \varepsilon$.

На языке кванторов: $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{a}} f(\vec{x}) = b$, если

$$\forall\,\varepsilon > 0 \quad \exists\,\delta > 0: \quad \forall\,\vec{x} \in \mathring{U}_\delta(\vec{a}) \to |f(\vec{x}) - b| < \varepsilon.$$

В этом определении $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ и $\vec{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ — точки $n$-мерного евклидова пространства $\mathbb{R}^n$; $f(\vec{x}) = f(x_1, \ldots, x_n)$ (во избежание путаницы, если точка $\mathbb{R}^n$ обозначается малой буквой латинского алфавита, мы будем ставить над этой буквой стрелку; если стрелки нет — это действительное число, т.е. точка числовой прямой $\mathbb{R}^1$). Проколотая окрестность точки $\vec{a}$ — это множество точек $\vec{x}$ таких, что $0 < \rho(\vec{x}, \vec{a}) < \delta$, где

$$\rho(\vec{x}, \vec{a}) = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + \ldots + (x_n - a_n)^2}.$$

**Определение 1.2 (по Гейне).** Функция $f(\vec{x})$, определённая в некоторой проколотой окрестности точки $\vec{a}$, имеет в этой точке предел, равный $b$, если для любой последовательности $\vec{x}_k$ такой, что $\vec{x}_k \neq \vec{a}$ и $\lim\limits_{k\to\infty} \vec{x}_k = \vec{a}$, выполняется равенство $\lim\limits_{k\to\infty} f(\vec{x}_k) = b$.

Сходимость последовательности точек $\vec{x}_k$ к точке $\vec{a}$ означает, что $\lim\limits_{k\to\infty}\rho(\vec{x}_k,\vec{a})=0$, т.е.

$$\forall\,\varepsilon>0\quad\exists\,k_0:\quad\forall\,k\geqslant k_0\to\rho(\vec{x}_k,\vec{a})<\varepsilon.$$

Все основные свойства пределов функций одной переменной сохраняются в многомерном случае: теоремы об арифметических операциях с пределами, свойства пределов, связанные с неравенствами и т.д. Функция $\alpha(\vec{x})$ называется бесконечно малой при $\vec{x}\to\vec{a}$, если $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{a}}\alpha(\vec{x})=0$. Если функция $f(\vec{x})$ ограничена в некоторой проколотой окрестности точки $\vec{a}$, а функция $\alpha(\vec{x})$ бесконечно малая при $\vec{x}\to\vec{a}$, то функция $\alpha(\vec{x})f(\vec{x})$ также является бесконечно малой при $\vec{x}\to\vec{a}$.

Говорят, что $f(\vec{x})=o(g(\vec{x}))$ при $\vec{x}\to\vec{a}$ ($f(\vec{x})$ есть $o$ малое от $g(\vec{x})$), если $f(\vec{x})=\alpha(\vec{x})g(\vec{x})$, где $\alpha(\vec{x})$ — бесконечно малая при $\vec{x}\to\vec{a}$. Если $g(\vec{x})$ не обращается в нуль в некоторой проколотой окрестности $\vec{a}$, то это определение равносильно равенству $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{a}}\dfrac{f(\vec{x})}{g(\vec{x})}=0$.

Несмотря на общность определения, исследование существования предела для функций многих переменных принципиально сложнее, чем в одномерном случае. Например, если функция одной переменной по-разному определяется при $x>a$ и $x<a$, то достаточно исследовать существование односторонних пределов слева и справа. На числовой прямой к точке можно подобраться двумя способами, а вот уже на плоскости $\mathbb{R}^2$ таких способов бесконечно много, что усложняет ситуацию. При этом в случае более высоких размерностей $n\geqslant 3$ картина не усложняется качественно. Принципиальным является именно переход от $n=1$ к $n=2$. В дальнейшем, если не оговорено противное, будем считать, что $n=2$.

Точка $\vec{x}$ плоскости записывается в координатах: $\vec{x}=(x,y)$; $f(\vec{x})=f(x,y)$. Предел функции двух переменных называется двойным пределом и обозначается

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)\quad\text{или}\quad\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y).$$

*Определение по Коши:* $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=b$, если $f(x,y)$ определена в некоторой проколотой окрестности $(x_0,y_0)$ и $\forall\,\varepsilon>0$ $\exists\,\delta>0$: $\forall\,(x,y)$, $0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\to|f(x,y)-b|<$ $<\varepsilon$.

*Определение по Гейне:* $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=b$, если $f(x,y)$ определена в некоторой проколотой окрестности $(x_0,y_0)$ и для любой последовательности $(x_k,y_k)$ такой, что $(x_k,y_k)\neq(x_0,y_0)$ и $\lim\limits_{k\to\infty}(x_k,y_k)=(x_0,y_0)$, выполняется равенство $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k,y_k)=$ $=b$.

Обращаем внимание на то, что условие $(x_k,y_k)\neq(x_0,y_0)$ означает несовпадение точек; при этом возможно, например, что $x_k=x_0$ (но тогда обязательно $y_k\neq y_0$).

## § 2. Попытки сведения к пределам функций одной переменной

Естественно возникает вопрос, нельзя ли двойной предел функции $f(x,y)$ в точке $(x_0,y_0)$ свести к пределам вида $\lim\limits_{x\to x_0}\big(\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)\big)$ и $\lim\limits_{y\to y_0}\big(\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)\big)$?

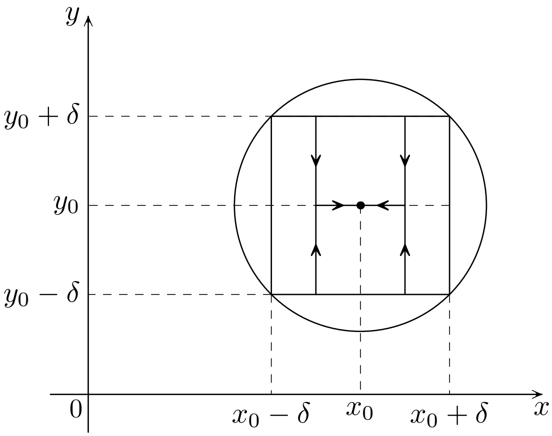


Рис. 1.1

Точнее, если $f(x,y)$ определена в некоторой проколотой окрестности $(x_0, y_0)$, то она определена в квадрате вида $\{x_0 - \delta < x < x_0 + \delta,\ y_0 - \delta < y < y_0 + \delta\}$ с выколотой точкой $(x_0, y_0)$ (см. рис. 1.1). Пусть для любого $x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$, $x \neq x_0$, существует $\varphi(x) = \lim\limits_{y \to y_0} f(x,y)$ (стрелки вниз и вверх на рис. 1.1). Так как функция одной переменной $\varphi(x)$ определена в некоторой проколотой $\delta$-окрестности точки $x_0$, то можно поставить вопрос о существовании $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x)$ (стрелки влево и вправо на рис. 1.1). Если такой предел существует, то его естественно назвать повторным пределом $\lim\limits_{x \to x_0} (\lim\limits_{y \to y_0} f(x,y))$. Аналогично можно определить другой повторный предел $\lim\limits_{y \to y_0} (\lim\limits_{x \to x_0} f(x,y))$.

Нетрудно привести пример, когда оба повторных предела существуют и совпадают, а двойной предел не существует.

**Пример 1.1.** Рассмотрим функцию $f(x,y) = \dfrac{(x+y)^2}{x^2+y^2}$, $x^2 + y^2 > 0$. Она определена в проколотой окрестности точки $(0;0)$, поэтому имеет смысл постановка вопроса о существовании $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} f(x,y)$. Рассмотрим сначала повторные пределы.

Для любого $x \neq 0$ существует $\varphi(x) = \lim\limits_{y \to 0} \dfrac{(x+y)^2}{x^2+y^2} = \dfrac{x^2}{x^2} = 1$, поэтому повторный предел $\lim\limits_{x \to 0}(\lim\limits_{y \to 0} f(x,y)) = 1$. Аналогично, для любого $y \neq 0$ существует $\psi(y) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(x+y)^2}{x^2+y^2} = \dfrac{y^2}{y^2} = 1$, и другой повторный предел также равен 1.

Тем не менее двойной предел не существует. В самом деле, $f(x,x) = 2$; $f(x,-x) = 0$. Если бы двойной предел существовал и равнялся $b$, то для любой последовательности $(x_k, y_k) \neq (0,0)$ такой, что $\lim\limits_{k \to \infty} (x_k, y_k) = (0,0)$, выполнялось бы равенство $\lim\limits_{k \to \infty} f(x_k, y_k) = b$. Но если $x_k \neq 0$ и $\lim\limits_{k \to \infty} x_k = 0$, то $f(x_k, x_k) = 2$, а $f(x_k, -x_k) = 0$, т.е. $b = 2 = 0$. Полученное противоречие доказывает отсутствие двойного предела.

**Упражнение 1.1.** Доказать, что для функции $f(x,y) =$

$= \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$, $x^2+y^2>0$, оба повторных предела при $x \to 0$, $y \to 0$ существуют, но различны.

**Упражнение 1.2.** Доказать, что для функции $f(x,y) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{y}, & y \neq 0; \\ 0, & y = 0, \end{cases}$ двойной предел при $x \to 0$, $y \to 0$ равен 0, а повторный предел $\lim\limits_{x\to 0}(\lim\limits_{y\to 0} f(x,y))$ не существует (не существует даже $\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)$ ни при одном $x \neq 0$).

**Упражнение 1.3.** Пусть существует двойной предел $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = b$, и при любом $x \in (x_0-\delta; x_0+\delta)$, $x \neq x_0$, существует $\varphi(x) = \lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$. Доказать, что существует повторный предел $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = b$.

Ещё одна попытка свести двойной предел к пределам функций одной переменной — это пределы по направлениям.

**Определение 1.3.** Пусть $\vec{l} = (\cos\varphi; \sin\varphi)$ — единичный вектор. Если функция $f(x,y)$ определена в некоторой проколотой окрестности точки $(x_0; y_0)$, то её пределом при $x \to x_0$, $y \to y_0$ по направлению вектора $\vec{l}$ (или по направлению, определяемому углом $\varphi$) называется предел функции одной переменной $\rho$:

$$\lim_{\rho\to +0} f(x_0+\rho\cos\varphi, y_0+\rho\sin\varphi).$$

З а м е ч а н и е. В этом случае фактически вводятся полярные координаты на плоскости с центром в точке $(x_0, y_0)$. Фиксированное значение $\varphi$ говорит о том, что функция рассматривается лишь на луче, выходящем из точки $(x_0, y_0)$ под углом $\varphi$ к положительному лучу прямой, параллельной оси $Ox$.

Стремление $(x,y)$ к $(x_0,y_0)$ происходит лишь по этому лучу. При $\varphi = 0$ получаем правый предел функции одной переменной $f(x, y_0)$ в точке $x_0$:

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x,y_0),$$

а при $\varphi = \frac{\pi}{2}$ получаем $\lim\limits_{y\to y_0+0} f(x_0,y)$.

**Утверждение 1.1.** *Если существует* $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=b$, *то предел по любому направлению при* $x\to x_0$, $y\to y_0$ *равен* $b$.

$\square$ Рассмотрим произвольную последовательность $\rho_k$ положительных чисел такую, что $\lim\limits_{k\to\infty}\rho_k=0$. Тогда последовательность точек $(x_k,y_k)=(x_0+\rho_k\cos\varphi, y_0+\rho_k\sin\varphi)$ стремится к точке $(x_0,y_0)$, причём $(x_k,y_k)\neq(x_0,y_0)$. Тогда $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_0+ +\rho_k\cos\varphi, y_0+\rho_k\sin\varphi)=b$, т.е. $\lim\limits_{\rho\to+0} f(x_0+\rho\cos\varphi, y_0+\rho\sin\varphi)= =b$ (здесь использованы определения предела по Гейне функции двух переменных $x,y$ и функции одной переменной $\rho$). $\blacksquare$

Отсюда следует, что если пределы функции $f(x,y)$ по двум разным направлениям в точке $(x_0,y_0)$ различны, то двойной предел не существует.

Так, в примере 1.1

$$f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)=\frac{(\rho\cos\varphi+\rho\sin\varphi)^2}{\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi}=(\cos\varphi+\sin\varphi)^2$$

(при $\varphi=\frac{\pi}{4}$ имеем 2; при $\varphi=-\frac{\pi}{4}$ имеем 0). По различным направлениям различные пределы, значит, двойной предел при $x\to 0$, $y\to 0$ не существует.

Возникает вопрос: может быть, если по каждому направлению функция $f(x,y)$ имеет при $x\to x_0$, $y\to y_0$ один и тот же предел $b$, то и двойной предел равен $b$? К сожалению, это неверно.

**Пример 1.2.** Рассмотрим функцию

$$f(x,y)=\frac{x^2y}{x^4+y^2}\,,\quad x^2+y^2>0.$$

Пусть $x\to 0$, $y\to 0$. Переходим к полярным координатам.

$$f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)=\frac{\rho^3\cos^2\varphi\sin\varphi}{\rho^4\cos^4\varphi+\rho^2\sin^2\varphi}=\frac{\rho\cos^2\varphi\sin\varphi}{\rho^2\cos^4\varphi+\sin^2\varphi}\,.$$

Если $\sin\varphi=0$, то последнее выражение равно 0 при любом $\rho>0$. Если $\sin\varphi\neq 0$, то всё равно $\lim\limits_{\rho\to+0} f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)=0$. Итак, по любому направлению предел $f(x,y)$ при $x\to 0$, $y\to \to 0$ равен 0. Но легко видеть, что $f(x,x^2)=\frac{1}{2}$. Аналогично рассуждению в примере 1.1: если $x_k \neq 0$ и $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = 0$, то $f(x_k, 0) = 0$, а $f(x_k, x_k^2) = \frac{1}{2}$. Двойной предел $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$ не существует.

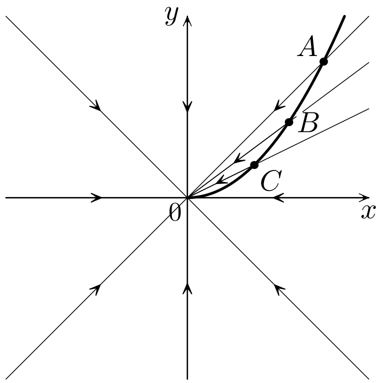


Рис. 1.2

Как же могло пройзойти так, что по каждому направлению предел равен 0 (вроде бы, как ни идти к точке, всё равно 0), а по параболе получаем другое число $\frac{1}{2}$? Возьмём, например, точку $A$ на рис. 1.2. Значение $f(A) = \frac{1}{2}$, но предел $f(\vec{x})$ по направлению $AO$ равен 0. То же можно сказать про точки $B$, $C$, ..., лежащие на параболе. Во всех этих точках функция принимает значение $\frac{1}{2}$. Чем ближе такая точка к началу координат, тем короче отрезок, на котором функция должна «упасть» от значения $\frac{1}{2}$ до значения 0, но такой отрезок имеет положительную длину, и стремление функции к нулю вдоль этого отрезка ничему не противоречит.

Совершенно ясно, что если удастся добиться стремления к нулю по любой параболе, то могут найтись более сложные кривые (например, спирали), по которым стремления к нулю не будет. Может создасться впечатление, что невозможно добиться существования двойного предела. Но и это неверно.

Просто мы наивно считаем, что понятие двойного предела можно свести исключительно к пределам функции одной переменной. Это действительно невозможно, и нужны другие методы исследования.

## § 3. Достаточное условие существования двойного предела

**Утверждение 1.2.** *Пусть функция $f(x,y)$ определена в проколотой окрестности точки $(x_0,y_0)$, и существует положительное число $\rho_0$ такое, что при всех $\varphi$ и при всех $\rho\in(0;\rho_0)$ выполняется неравенство*

$$|f(x_0+\rho\cos\varphi, y_0+\rho\sin\varphi)-b|\leqslant F(\rho),$$

*где $\lim\limits_{\rho\to+0}F(\rho)=0$.*

*Тогда двойной предел $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=b$.*

□ Из условия следует, что

$$\forall\,\varepsilon>0\quad\exists\,\delta>0:\quad\forall\,\rho\in(0;\delta)\to F(\rho)<\varepsilon.$$

Для произвольной точки $(x,y)$ плоскости определим числа $\rho$ и $\varphi$ так, что $x=x_0+\rho\cos\varphi$, $y=y_0+\rho\sin\varphi$ (т.е. введём полярные координаты с центром в точке $(x_0,y_0)$). Тогда $\rho=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$. Поэтому для всех точек $(x;y)$ таких, что $0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$, выполняется неравенство $|f(x,y)-b|=|f(x_0+\rho\cos\varphi,y_0+\rho\sin\varphi)-b|\leqslant F(\rho)<\varepsilon$. Это и означает, что $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=b$. ■

**Пример 1.3.** Рассмотрим функцию

$$f(x,y)=\frac{x^2y}{x^2+y^2}\,,\quad x^2+y^2>0.$$

Введём полярные координаты с центром в точке $(0;0)$: $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$.

Тогда $f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)=\dfrac{\rho^3\cos^2\varphi\sin\varphi}{\rho^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)}=\rho\cos^2\varphi\sin\varphi$. Так как $|f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)|\leqslant\rho\to0$, то $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=b$.

З а м е ч а н и е 1. Грубо ошибочным является рассуждение: $\lim\limits_{\rho\to+0}\rho\cos^2\varphi\sin\varphi=0$, следовательно, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=0$.

На самом деле, мы доказали только то, что предел $f(x,y)$ при $x\to0$, $y\to0$ по каждому направлению равен 0. Как мы видели, этого ещё недостаточно для наличия двойного предела. Нужна оценка модуля разности $f(x,y)-b$ сверху функцией только от $\rho$, не зависящей от $\varphi$ и стремящейся к нулю вместе с $\rho$.

З а м е ч а н и е 2. Не следует думать, что переход к полярным координатам является единственным способом доказательства наличия двойного предела. Приведём ещё одно решение примера 1.3. Для любых чисел $x$, $y$ имеет место неравенство $|xy| \leqslant \frac{x^2+y^2}{2}$. Значит, $f(x,y) = x \cdot \frac{xy}{x^2+y^2}$ — произведение бесконечно малой функции $x$ на ограниченную функцию $\frac{xy}{x^2+y^2}$. Поэтому $f(x,y)$ — бесконечно малая функция при $x \to 0$, $y \to 0$.

Приведённое решение значительно более «искусственно», чем первое. Метод введения полярных координат универсален и, как правило, быстрее позволяет получить нужную оценку, чем применение каких-либо неравенств непосредственно для функций двух переменных, хотя бывает и иначе.

**Пример 1.4.** Рассмотрим функцию

$$f(x,y) = \frac{x^5}{x^4+y^4}\,, \quad x^2+y^2>0.$$

Имеем

$$|f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)| = \left|\frac{\rho^5\cos^5\varphi}{\rho^4(\cos^4\varphi+\sin^4\varphi)}\right| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\rho}{(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)^2 - 2\cos^2\varphi\sin^2\varphi} = \frac{\rho}{1-\frac{\sin^2 2\varphi}{2}} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\rho}{1-\frac{1}{2}} = 2\rho \to 0,$$

поэтому $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = 0$.

**Пример 1.5.** Рассмотрим функцию

$$f(x,y) = \frac{\ln(1+\sqrt[3]{x^2y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}}\,, \quad x^2+y^2>0.$$

Легко видеть, что $f(x,y)>0$ при $x^2+y^2>0$. Имеем

$$f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)=\frac{\ln(1+\sqrt[3]{\rho^4\cos^2\varphi\sin^2\varphi})}{\rho}\leqslant\frac{1}{\rho}\ln(1+\rho^{4/3}).$$

Предел функции одной переменной $F(\rho)=\frac{1}{\rho}\ln(1+\rho^{4/3})$ можно вычислить, применяя формулу Тейлора:

$$\lim_{\rho\to+0}\frac{\ln(1+\rho^{4/3})}{\rho}=\lim_{\rho\to+0}\frac{\rho^{4/3}+o(\rho^{4/3})}{\rho}=0;$$

поэтому $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\to0}}f(x,y)=0.$

Иногда получение нужной оценки сверху требует значительных усилий.

**Пример 1.6.** Рассмотрим функцию

$$f(x,y)=\frac{\sqrt[3]{x^3+y^4}-x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,,\quad x^2+y^2>0.$$

Опять-таки $f(x,y)>0$ при $x^2+y^2>0$. Имеем

$$f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)=\frac{\sqrt[3]{\rho^3\cos^3\varphi+\rho^4\sin^4\varphi}-\rho\cos\varphi}{\rho}=$$
$$=\sqrt[3]{\cos^3\varphi+\rho\sin^4\varphi}-\cos\varphi\leqslant\sqrt[3]{\cos^3\varphi+\rho}-\cos\varphi.$$

Пусть $\cos\varphi=t\in[-1;1]$. Тогда

$$0\leqslant f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\leqslant g(t,\rho)=\sqrt[3]{t^3+\rho}-t.$$

При фиксированном положительном $\rho$ найдём $F(\rho)=$ $=\max\limits_{-1\leqslant t\leqslant1}g(t,\rho)$. Производная функции $g(t,\rho)$ как функции от $t$ при фиксированном $\rho$ равна $\frac{1}{3}\,(t^3+\rho)^{-2/3}\cdot3t^2-1$. Она обращается в нуль, если $t^2=(t^3+\rho)^{2/3}$, т.е. $t^6=t^6+2t^3\rho+\rho^2$, откуда $t=-\sqrt[3]{\frac{\rho}{2}}$. При достаточно малых $\rho$ это значение $t$ принадлежит отрезку $[-1;1]$, и для нахождения $F(\rho)$ нужно выбрать наибольшее из трёх чисел:

$$g\left(-\sqrt[3]{\frac{\rho}{2}}, \rho\right) = \sqrt[3]{-\frac{\rho}{2} + \rho} + \sqrt[3]{\frac{\rho}{2}} = \sqrt[3]{4\rho};$$

$$g(1, \rho) = \sqrt[3]{1+\rho} - 1 \sim \frac{\rho}{3}, \quad \rho \to +0;$$

$$g(-1, \rho) = \sqrt[3]{-1+\rho} + 1 \sim \frac{\rho}{3}, \quad \rho \to +0.$$

При малых $\rho$ наибольшим из этих чисел будет $\sqrt[3]{4\rho}$; значит, найдётся $\rho_0 > 0$ такое, что при всех $\rho \in (0; \rho_0)$ имеют место неравенства

$$0 \leqslant f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi) \leqslant \sqrt[3]{4\rho}.$$

Следовательно, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = 0$.

**Упражнение 1.4.** Доказать, что:

а) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^3 y}{\sqrt{x^6+y^6}} = 0$;  б) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\operatorname{arctg}\sqrt{|x|^5+y^6}}{x^2+y^2} = 0$;

в) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x\sin y + y\sin x}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$;  г) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{1-\cos x}{\sqrt[3]{x^4 - x^2y^2 + y^4}} = 0$.

**Упражнение 1.5.** Доказать, что не существуют:

а) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^3 y}{x^4+x^2y^2+y^4}$;  б) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^3 y}{x^6+y^4}$;

в) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^3 y}{x^6+y^2}$;  г) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\ln(1+xy)}{x^2+y^2}$.

## § 4. О применении одномерной формулы Тейлора к вычислению двойных пределов

Формула Тейлора для функции нескольких переменных опирается на понятие дифференциала $n$-го порядка и возникает в курсах математического анализа значительно позже, чем понятие предела. Но не следует забывать о том, что, приступая к изучению многомерного анализа, студенты уже знакомы с формулой Тейлора для функций одной переменной, и, естественно, пытаются применять её к вычислению двойных пределов. Попытаемся выяснить, насколько это допустимо. Ограничимся формулой Маклорена (разложение в окрестности точки 0).

Как известно, если функция одной переменной $\varphi(u)$ имеет $n$ производных в точке 0, то $\varphi(u) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} u^k + o(u^n)$ при $u \to 0$ (формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано); это означает, что

$$\lim_{u\to 0} \frac{\varphi(u) - \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} u^k}{u^n} = 0. \tag{1.1}$$

Имеет место

**Утверждение 1.3. (Теорема о переходе к пределу под знаком непрерывной функции одной переменной)**. *Пусть функция двух переменных $f(x,y)$ имеет предел $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = b$, а функция одной переменной $g(u)$ непрерывна в точке $b$. Тогда существует предел сложной функции двух переменных $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} g(f(x,y)) = g(b)$, т.е. $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} g(f(x,y)) = g(\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y))$ (знак двойного предела и знак непрерывной функции одной переменной можно менять местами).*

$\square$ Пусть $(x_k, y_k)$ — произвольная последовательность точек плоскости такая, что $\lim\limits_{k\to\infty} (x_k, y_k) = (x_0, y_0)$, причём $(x_k, y_k) \neq (x_0, y_0)$. Тогда $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k, y_k) = b$, т.е. $\lim\limits_{k\to\infty} u_k = b$, где $u_k = f(x_k, y_k)$. Тогда из непрерывности функции $g(u)$ в точке $b$ следует, что $\lim\limits_{k\to\infty} g(u_k) = g(b)$. Так как $(x_k, y_k)$ — произвольная последовательность точек, стремящаяся к $(x_0, y_0)$, и такая, что $(x_k, y_k) \neq (x_0, y_0)$, то $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} g(f(x,y)) = g(b)$. $\blacksquare$

З а м е ч а н и е. Эта теорема является естественным распространением на двумерный случай аналогичной одномерной теоремы ($f$ и $g$ — функции одной переменной), которая должна доказываться (но, к сожалению, не всегда доказывается) в любом курсе математического анализа.

Пусть теперь $u(x,y)$ — функция двух переменных такая, что $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x,y) = 0$, а в качестве непрерывной в точке 0 функции одной переменной $g(u)$ возьмём

$$g(u)=\begin{cases}\dfrac{\varphi(u)-\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{\varphi^{(k)}(0)}{k!}\,u^k}{u^n}, & u\neq 0;\\ 0, & u=0.\end{cases}$$

Применяя только что доказанную теорему, из (1.1) получим

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} g(u(x,y))=0 \quad\Rightarrow$$

$$\varphi(u(x,y))=\sum_{k=0}^{n}\frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!}\,(u(x,y))^k+o((u(x,y))^n)$$

$$\text{при}\quad x\to 0,\ y\to 0. \quad (1.2)$$

Последнее $o$ малое — в смысле предела функции двух переменных. Например,

$$e^{x^2y}=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^{2k}y^k}{k!}+o(x^{2n}y^n)\quad\text{при}\quad x\to 0,\ y\to 0.$$

Пусть $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$. Тогда $|x|\leqslant\rho$, $|y|\leqslant\rho$, и, следовательно, $|x^2y|\leqslant\rho^3$. Так как

$$o(x^{2n}y^n)=\alpha(x,y)\cdot x^{2n}y^n=\alpha(x,y)\cdot\left(\frac{x}{\rho}\right)^{2n}\left(\frac{y}{\rho}\right)^{n}\rho^{3n}=\beta(x,y)\cdot\rho^{3n},$$

где $\beta(x,y)$ — бесконечно малая функция при $x\to 0$, $y\to 0$, как произведение бесконечно малой на ограниченную; поэтому $o(x^{2n}y^n)$ можно записать в виде $o(\rho^{3n})$. Итак,

$$e^{x^2y}=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^{2k}y^k}{k!}+o(\rho^{3n})\quad\text{при}\quad x\to 0,\ y\to 0.$$

На практике часто встречается случай, когда $u(x,y)$ — многочлен от двух переменных без свободного члена (в этом случае $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} u(x,y)=0$). Можно доказать, что при $\rho\leqslant 1$ имеет место неравенство $|u(x,y)|\leqslant C\rho^m$, где $C$ — сумма модулей коэффициентов многочлена, а $m$ — минимальная степень одночленов, входящих в данный многочлен; при этом $o((u(x,y))^n)$ можно записать в виде $o(\rho^{mn})$. В общем виде доказательство этого факта громоздко, поэтому мы будем в каждом конкретном случае приводить похожее рассуждение.

**Пример 1.7.** Разложить функцию $f(x,y) = \operatorname{arctg}(xy + x^2 - y^3)$ по формуле Тейлора при $x \to 0$, $y \to 0$ до $o(\rho^6)$.

Пусть $u(x,y) = xy + x^2 - y^3$ — многочлен; минимальная степень входящих в него одночленов равна 2. Поэтому при $\rho \leqslant 1$ имеем

$$|u(x,y)| \leqslant \rho^2 + \rho^2 + \rho^2 = 3\rho^2,$$

и для разложения $f(x,y)$ до $o(\rho^6)$ нужно взять разложение $\operatorname{arctg} u$ до $o(u^3)$:

$$\operatorname{arctg} u = u - \frac{u^3}{3} + o(u^3).$$

Тогда

$$\operatorname{arctg}(xy + x^2 - y^3) =$$
$$= xy+x^2-y^3-\frac{1}{3}\,(xy+x^2-y^3)^3+o((xy-x^2-y^3)^3),\ x \to 0,\ y \to 0.$$

Легко видеть, что $o((u(x,y))^3) = \alpha(x,y)(u(x,y))^3 = \alpha(x,y) \cdot \left(\frac{u(x,y)}{\rho^2}\right)^3 \cdot \rho^6 = o(\rho^6)$, так как функция $\beta(x,y) = \alpha(x,y) \cdot \left(\frac{u(x,y)}{\rho^2}\right)^3$ — бесконечно малая при $x \to 0$, $y \to 0$, как произведение бесконечно малой на ограниченную.

Кроме того, в многочлене $\frac{1}{3}\,(xy+x^2-y^3)^3$ нужно выбросить все одночлены седьмой степени и выше, так как, например, $\left|\frac{1}{3} \cdot 3(xy + x^2)^2 \cdot y^3\right| \leqslant (\rho^2 + \rho^2)^2 \cdot \rho^3 = 4\rho^7$, и это слагаемое есть $o(\rho^6)$. Окончательно

$$\operatorname{arctg}(xy + x^2 - y^3) =$$
$$= xy + x^2 - y^3 - \frac{1}{3}\,(x^3y^3 + 3x^4y^2 + 3x^5y + x^6) + o(\rho^6) =$$
$$= xy + x^2 - y^3 - \frac{1}{3}\,x^3y^3 - x^4y^2 - x^5y - \frac{1}{3}\,x^6 + o(\rho^6).$$

З а м е ч а н и е. Подчеркнём, ещё раз, что в этих разложениях $\rho$ является не независимой переменной, а функцией двух переменных $\rho(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$; поэтому $o(\rho^6)$ нужно понимать как $o((x^2 + y^2)^3)$ в смысле предела функции двух переменных. Непонимание этого, а также того, что в равенстве (1.2) $u(x,y)$ должна быть бесконечно малой функцией двух переменных, может привести к ошибочным выводам.

Вспомним, например, что функция из примера 1.3 не имеет предела при $x \to 0$, $y \to 0$, и рассмотрим ошибочное доказательство того, что этот предел равен 0.

Ясно, что $f(x,0) = 0$ при $x \neq 0$. Если $y \neq 0$, то $f(x,y) = \dfrac{\frac{x^2}{y}}{1 + \left(\frac{x^2}{y}\right)^2}$. Так как $u(x,y) = \dfrac{x^2}{y} = \dfrac{\rho^2 \cos^2 \varphi}{\rho \sin \varphi} = \rho \dfrac{\cos^2 \varphi}{\sin \varphi}$, то $\lim\limits_{\rho \to +0} u(x,y) = 0$, и $f(x,y) = \dfrac{u}{1+u^2} = u(1 - u^2 + o(u^2)) = u - u^3 + o(\rho^3)$; $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} f(x,y) = 0$.

Ошибка состоит в том, что функция $u(x,y)$ всего лишь имеет предел при $\rho \to +0$ при каждом фиксированном $\varphi$ (т.е. предел по каждому направлению равен 0) и не является бесконечно малой функцией двух переменных. Написанные $o$ малые опять-таки можно рассматривать лишь как $o$ малые при $\rho \to +0$ при каждом фиксированном $\varphi$, и в итоге мы доказали лишь то, что предел $f(x,y)$ равен 0 по каждому направлению.

**Пример 1.8.** Рассмотрим функцию

$$f(x,y) = \frac{x \sin y - y \sin x}{(x^2+y^2)^{3/2}}, \quad x^2 + y^2 > 0.$$

Так как $\sin y = y - \frac{y^3}{6} + o(y^3) = y - \frac{y^3}{6} + o(\rho^3)$; $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) = x - \frac{x^3}{6} + o(\rho^3)$ (здесь использовано то, что $|x| \leqslant \rho$, $|y| \leqslant \rho$, и $o(\rho^3)$ понимается как $o((x^2+y^2)^{3/2})$ в смысле предела функции двух переменных). Тогда $x \sin y - y \sin x = x\left(y - \frac{y^3}{6} + o(\rho^3)\right) - y\left(x - \frac{x^3}{6} + o(\rho^3)\right) = \frac{yx^3 - xy^3}{6} + o(\rho^4)$; здесь использовано то, что $x \cdot o(\rho^3) = x \cdot \alpha(x,y) \cdot \rho^3 = \beta(x,y) \cdot \rho^4$, где $\beta(x,y) = \frac{x}{\rho} \cdot \alpha(x,y)$ — бесконечно малая при $x \to 0$, $y \to 0$; аналогично, $y \cdot o(\rho^3) = o(\rho^4)$. Так как $\left|\frac{yx^3 - xy^3}{6}\right| \leqslant \frac{\rho^4}{3}$, то $x\sin y - y\sin x = o(\rho^3) + o(\rho^4) = o(\rho^3) = o\left((x^2+y^2)^{3/2}\right)$, и $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = 0$.

**Пример 1.9.** Докажем, что $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x\sin y - y\sin x}{(x^2+y^2)^2}$ не существует. В самом деле, $x\sin y - y\sin x = \dfrac{yx^3 - xy^3}{6} + o(\rho^4)$, поэтому

$$\frac{x\sin y - y\sin x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{yx^3 - xy^3}{6(x^2+y^2)^2} + \frac{o((x^2+y^2)^2)}{(x^2+y^2)^2}.$$

Второе слагаемое имеет предел, равный нулю; поэтому достаточно доказать, что первое слагаемое не имеет предела при $x \to 0$, $y \to 0$. Переходя к полярным координатам $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, имеем

$$\frac{\rho^4 \sin\varphi \cdot \cos^3\varphi - \rho^4 \cos\varphi \cdot \sin^3\varphi}{6\rho^4(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)^2} = \frac{\sin\varphi\cos^3\varphi - \cos\varphi\cdot\sin^3\varphi}{6}.$$

По разным направлениям — разные пределы, значит, двойной предел от первого слагаемого при $x \to 0$, $y \to 0$ не существует.

**Упражнение 1.6.** Доказать, что

а) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\ln(1+x^3+y^3)}{x^2+y^2} = 0$;

б) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\operatorname{sh} x \cdot \ln(y+\sqrt{1+y^2}) - \sin y \cdot \arcsin x}{(x^2+y^2)^{5/2}} = 0$.

**Упражнение 1.7.** Доказать, что не существуют:

а) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{1-\cos(x^3+y^3)}{x^6+y^6}$;

б) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\operatorname{sh} x \cdot \ln(y+\sqrt{1+y^2}) - \sin y \cdot \arcsin x}{(x^2+y^2)^3}$.

# II. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

## § 1. Определение и связь с понятием предела

Непрерывность в точке функции нескольких переменных определяется так же, как и в одномерном случае.

**Определение 2.1.** Функция $f(\vec{x})$, определённая в некоторой окрестности точки $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$, называется непрерывной в точке $\vec{a}$, если существует $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{a}} f(\vec{x}) = f(\vec{a})$.

Если в определении предела предполагается, что функция определена в проколотой окрестности $\vec{a}$, а в самой точке может быть не определена вовсе, то теперь она должна быть определена и в самой точке $\vec{a}$, причём предел должен быть равен значению функции в точке. Напомним, что $\delta$-окрестность точки $\vec{a}$ — это множество точек $\vec{x}$ таких, что $\rho(\vec{x},\vec{a}) < \delta$; если из этой $\delta$-окрестности удалить точку $\vec{a}$ — получим проколотую окрестность. Определение непрерывности можно расшифровать как в терминах Коши, так и в терминах Гейне.

*По Коши:* функция $f(\vec{x})$, определённая в некоторой окрестности точки $\vec{a}$, называется непрерывной в точке $\vec{a}$, если для любого положительного числа $\varepsilon$ найдётся такое положительное число $\delta$, что для всех $\vec{x}$ из $\delta$-окрестности $\vec{a}$ выполняется неравенство $|f(\vec{x}) - f(\vec{a})| < \varepsilon$.

На языке кванторов:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 : \quad \forall\, x,\ \rho(\vec{x},\vec{a}) < \delta \quad \to \quad |f(\vec{x}) - f(\vec{a})| < \varepsilon.$$

*По Гейне:* функция $f(\vec{x})$, определённая в некоторой окрестности точки $\vec{a}$, называется непрерывной в точке $\vec{a}$, если для любой последовательности $\vec{x}_k$ такой, что $\lim\limits_{k\to\infty} \vec{x}_k = \vec{a}$, выполняется равенство $\lim\limits_{k\to\infty} f(\vec{x}_k) = f(\vec{a})$.

Оговорка $\vec{x}_k \neq \vec{a}$ в этом определении не нужна.

Как и при определении предела, все принципиальные отличия многомерного случая от одномерного проявляются уже при $n = 2$, поэтому в дальнейшем мы будем рассматривать функции двух переменных $f(x, y)$.

Объём настоящего пособия не позволяет нам несколько усложнить определение 2.1 и рассмотреть понятие непрерывности функции в точке по множеству (так же, как и понятие предела функции в точке по множеству); мы будем рассматривать только функции, определённые в некоторой $\delta$-окрестности соответствующей точки $\vec{a}$ (в двумерном случае — точки $(x_0, y_0)$).

Аналогично определению 1.3, введём понятие непрерывности функции по данному направлению.

**Определение 2.2.** Пусть $\vec{l} = (\cos\varphi, \sin\varphi)$ — единичный вектор. Функция $f(x, y)$, определённая в некоторой окрестности точки $(x_0, y_0)$, называется непрерывной в этой точке по направлению вектора $\vec{l}$, если функция одной переменной $\rho$

$$f(x_0 + \rho\cos\varphi, y_0 + \rho\sin\varphi)$$

непрерывна справа в точке 0, т.е.

$$\lim_{\rho\to+0} f(x_0 + \rho\cos\varphi, y_0 + \rho\sin\varphi) = f(x_0, y_0).$$

Непрерывность по направлению вектора $(1, 0)$ означает, что $\lim\limits_{\rho\to+0} f(x_0 + \rho, y_0) = f(x_0, y_0)$, т.е. $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x, y_0) = f(x_0, y_0)$. Вообще, если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x, y_0) = f(x_0, y_0)$, то говорят о непрерывности функции $f(x, y)$ по $x$ в точке $(x_0, y_0)$ (непрерывность по направлению вектора $(1; 0)$ — это непрерывность по $x$ справа). Аналогично, непрерывность по направлению вектора $(0, 1)$ — это непрерывность по $y$ справа.

Функция $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{(x+y)^2}{x^2+y^2}, & x^2 + y^2 > 0; \\ 1, & x = y = 0 \end{cases}$ непрерывна как по $x$, так и по $y$ в точке $(0, 0)$ (см. пример 1.1). Это значит, что она непрерывна в точке $(0, 0)$ по направлениям векторов $(1, 0)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(0, -1)$. По всем остальным направлениям она не будет непрерывной, так как $f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi) = (\cos\varphi + {}$ ${} + \sin\varphi)^2$, а это выражение равно 1 только при $\varphi = \frac{\pi}{2}k$ ,$k \in \mathbb{Z}$, что соответствует направлениям четырёх указанных векторов.

Функция $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, & x^2+y^2>0; \\ 0, & x=y=0 \end{cases}$ непрерывна по любому направлению в точке $(0,0)$, но не является непрерывной в этой точке (см. пример 1.2).

А вот функция $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, & x^2+y^2>0; \\ 0, & x=y=0 \end{cases}$ является непрерывной в точке $(0,0)$ (см. пример 1.3).

Если функции $f(x,y)$ и $g(x,y)$ непрерывны в точке $(x_0,y_0)$, то их сумма, произведение и частное также непрерывны в этой точке (в последнем случае надо требовать, чтобы $g(x_0,y_0) \neq 0$). Поэтому функции из примеров 1.1–1.3 непрерывны в каждой точке, отличной от $(0,0)$; последняя после доопределения $f(0,0)=0$ станет непрерывной во всех точках плоскости; первые две, как их ни определить в точке $(0,0)$, всё равно будут иметь в этой точке разрыв.

**Определение 2.3.** Точка $(x_0,y_0)$ называется точкой разрыва функции $f(x,y)$, если $f(x,y)$ определена в некоторой проколотой окрестности точки $(x_0,y_0)$, но не является непрерывной в этой точке.

Из курса математического анализа известна теорема о непрерывности сложной функции.

*Пусть функция* $f(x_1,\ldots,x_n)$ *непрерывна в точке* $(x_1^0,\ldots,x_n^0)$, *а функции* $x_1(t_1,\ldots,t_k), \ldots, x_n(t_1,\ldots,t_k)$ *непрерывны в точке* $(t_1^0,\ldots,t_k^0)$. *Тогда, если* $x_1^0 = x_1(t_1^0,\ldots,t_k^0), \ldots, x_n^0 = x_n(t_1^0,\ldots,t_k^0)$, *то сложная функция* $f(x_1(t_1,\ldots,t_k),\ldots,x_n(t_1,\ldots,t_k))$ *непрерывна в точке* $(t_1^0,\ldots,t_k^0)$.

Отметим, что внутренние функции $x_1, \ldots, x_n$ могут быть функциями от разного числа переменных; например, $x_1 = x_1(t_1,t_2)$, $x_2 = x_2(t_1,t_2,t_3)$, $x_3 = x_3(t_1,t_2,\ldots,t_{10})$. Тогда в качестве $k$ можно взять наибольшее из этих чисел; в нашем случае $k=10$.

Отсюда и из непрерывности элементарных функций одной переменной следует, что любая суперпозиция элементарных функций от нескольких переменных является непрерывной в любой точке, в некоторой окрестности которой она выражается формулой через элементарные функции. Например, $f(x,y) = \ln(1+\sin^2(e^{xy}-3) - x^5 - y^4)$ непрерывна в любой точке плоскости, в которой выражение под знаком логарифма положительно.

## § 2. Исследование непрерывности функций

Все примеры этого параграфа формулируются одинаково: найти все точки непрерывности данной функции. Это значит, что для любой точки $(x_0, y_0)$ такой, что $f(x,y)$ определена в некоторой окрестности точки, нужно определить, является ли $f(x,y)$ непрерывной в этой точке (т.е. описать все точки непрерывности и точки разрыва).

**Пример 2.1.** $f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)^{xy}, & x^2+y^2>0; \\ 1, & x=y=0. \end{cases}$

Так как при $x^2+y^2>0$ $f(x,y) = e^{xy\ln(x^2+y^2)}$, то в каждой такой точке функция $f(x,y)$ непрерывна как суперпозиция элементарных функций. Остаётся исследовать предел функции в точке $(0,0)$.

Пусть $g(x,y) = xy\ln(x^2+y^2)$. Перейдём к полярным координатам.

$$|g(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)| = |\rho^2\cos\varphi\cdot\sin\varphi\cdot\ln\rho^2| \leqslant 2\rho^2|\ln\rho|$$

(здесь мы учли, что $\ln\rho<0$ при $0<\rho<1$).

Как известно, $\lim\limits_{\rho\to+0}\rho^2\ln\rho = 0$, поэтому $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}} g(x,y) = 0$. По теореме о переходе к пределу под знаком непрерывной функции одной переменной (утверждение 1.3), $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}} f(x,y) =$ $= \exp(\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}} g(x,y)) = e^0 = 1$. Значит, $f(x,y)$ непрерывна в точке $(0,0)$. Итак, $f(x,y)$ непрерывна в любой точке плоскости.

**Пример 2.2.** $f(x,y) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{y}, & y\neq0; \\ 0, & y=0 \end{cases}$ (см. упражнение 1.2).

а) Функция $f(x,y)$ непрерывна в любой точке $(x_0, y_0)$, где $y_0 \neq 0$ (как произведение элементарных функций одной переменной).

б) Далее, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} x \sin\frac{1}{y} = 0$ (произведение бесконечно малой функции $x$ на ограниченную функцию $\varphi(y) = \begin{cases} \sin\frac{1}{y}, & y \neq 0; \\ 0, & y = 0 \end{cases}$). Значит, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = f(0,0)$, и функция $f(x,y)$ непрерывна в точке $(0,0)$.

в) Рассмотрим, наконец, точку $(x_0, 0)$, где $x_0 \neq 0$. Докажем, что не существует $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to 0}} f(x,y)$. Если бы этот предел существовал и равнялся $b$, то для любой последовательности точек $(x_k, y_k)$ такой, что $\lim\limits_{k\to\infty} (x_k, y_k) = (x_0, 0)$ и $(x_k, y_k) \neq (x_0, 0)$, выполнялось бы равенство $\lim\limits_{k\to\infty} (x_k, y_k) = b$. Но последовательности $(x'_k, y'_k)$ и $(x''_k, y''_k)$, где $x'_k = x_0$, $y'_k = \dfrac{1}{2\pi k + \frac{\pi}{2}}$; $x''_k = x_0$, $y''_k = \dfrac{1}{2\pi k - \frac{\pi}{2}}$, $k = 1, 2, \ldots$, удовлетворяют нужным условиям, а $f(x'_k, y'_k) = x_0$, $f(x''_k, y''_k) = -x_0$, т.е. $b = x_0 = -x_0$. Так как $x_0 \neq 0$, то мы получили противоречие, которое показывает, что $f(x,y)$ разрывна в точке $(x_0, 0)$.

**Пример 2.3.** $f(x,y) = \begin{cases} x\,\dfrac{\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y}{x - y}, & x \neq y; \\ 0, & x = y. \end{cases}$

а) Функция $f(x,y)$ непрерывна в любой точке $(x_0, y_0)$, где $y_0 \neq x_0$ (как результат применения арифметических операций к элементарным функциям одной переменной).

б) По теореме Лагранжа для любых $x$, $y$ выполняется равенство $\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y = \dfrac{1}{1+\xi^2}\,(x - y)$, где точка $\xi$ лежит между $x$ и $y$. Так как $0 < \dfrac{1}{1+\xi^2} \leqslant 1$, то $|\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y| \leqslant |x - y|$ для любых $x$ и $y$. Тогда $f(x,y) = x \cdot \varphi(x,y)$, где $\varphi(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y}{x - y}, & x \neq y; \\ 0, & x = y. \end{cases}$ Значит, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = 0$ (произведение бесконечно малой функции $x$ на ограниченную функцию

$\varphi(x,y)$; из приведённой выше оценки следует, что $|\varphi(x,y)| \leqslant 1$ при всех $x$, $y$).

Итак, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = f(0,0)$, и функция $f(x,y)$ непрерывна в точке $(0,0)$.

в) Рассмотрим, наконец, точку $(x_0,x_0)$, где $x_0 \neq 0$. Докажем, что не существует $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to x_0}} f(x,y)$. Если бы этот предел существовал и равнялся $b$, то для любой последовательности точек $(x_k,y_k)$ такой, что $\lim\limits_{k\to\infty}(x_k,y_k) = (x_0,x_0)$ и $(x_k,y_k) \neq$ $\neq (x_0,x_0)$ выполнялось бы равенство $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k,y_k) = b$.

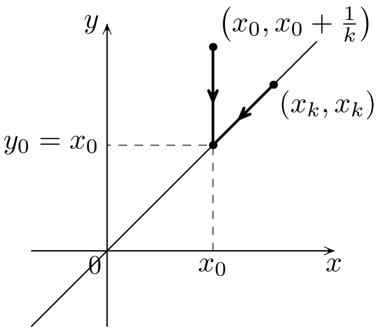


Рис. 2.3

Но (см. рис. 2.3), если взять последовательности $(x_k,x_k)$, $x_k = x_0 + \frac{1}{k}$, и $\left(x_0, x_0+\frac{1}{k}\right)$, $k = 1,\ 2,\ \ldots$, то они удовлетворяют нужным условиям. Отметим, что $f(x_k,x_k) = 0$, а

$$\lim_{k\to\infty} f\left(x_0, x_0+\frac{1}{k}\right) = x_0 \lim_{k\to\infty} \frac{\operatorname{arctg}\left(x_0+\frac{1}{k}\right) - \operatorname{arctg} x_0}{\frac{1}{k}}.$$

Последний предел равен производной функции $\operatorname{arctg} x$ в точке $x_0$, т.е. $\dfrac{1}{1+x_0^2}$. Поэтому $b = 0 = \dfrac{x_0}{1+x_0^2}$. Так как $x_0 \neq 0$, то мы получили противоречие, которое показывает, что $f(x,y)$ разрывна в точке $(x_0,x_0)$.

**Пример 2.4.** $f(x,y) = \begin{cases} xy, & x\in\mathbb{Q},\ y\in\mathbb{Q};\\ 0, & x\notin\mathbb{Q} \text{ или } y\notin\mathbb{Q}.\end{cases}$

В математическом анализе функций одной переменной в различных контрпримерах встречается функция Дирихле: $D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$ Рассматриваемая функция двух переменных выражается через функцию Дирихле: $f(x, y) = xyD(x)D(y)$.

а) Рассмотрим точку, лежащую на координатных осях, т.е. точку $(x_0, y_0)$ такую, что $x_0 y_0 = 0$, т.е. хотя бы одно из значений $x_0$ или $y_0$ обращается в нуль. Пусть, для определённости, $x_0 = 0$. Тогда, если взять окрестность точки $(0, y_0)$ радиуса 1, то в ней $|y| < |y_0| + 1$, и $|yD(x)D(y)| < |y_0| + 1$. Поэтому функция $f(x, y)$ есть произведение бесконечно малой функции $x$ на ограниченную функцию $yD(x)D(y)$. Значит, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = 0 = f(0, y_0)$. Функция $f(x, y)$ непрерывна в рассматриваемой точке.

б) Рассмотрим точку, не лежащую на координатных осях, т.е. точку $(x_0, y_0)$ такую, что $x_0 y_0 \neq 0$. Докажем, что не существует $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y)$. Если бы этот предел существовал и равнялся $b$, то для любой последовательности точек $(x_k, y_k)$ такой, что $\lim\limits_{k \to \infty} (x_k, y_k) = (x_0, y_0)$ и $(x_k, y_k) \neq (x_0, y_0)$, выполнялось бы равенство $\lim\limits_{k \to \infty} f(x_k, y_k) = b$. Но для любых действительных чисел $x_0$, $y_0$ найдутся последовательности рациональных чисел $x'_k$, $y'_k$, иррациональных чисел $x''_k$, $y''_k$ такие, что $\lim\limits_{k \to \infty} x'_k = x_0$, $\lim\limits_{k \to \infty} x''_k = x_0$, $x'_k \neq x_0$, $x''_k \neq x_0$; $\lim\limits_{k \to \infty} y'_k = y_0$, $\lim\limits_{k \to \infty} y''_k = y_0$, $y'_k \neq y_0$, $y''_k \neq y_0$. Тогда последовательности точек $(x'_k, y'_k)$ и $(x''_k, y''_k)$ удовлетворяют нужным условиям; $f(x'_k, y'_k) = x'_k y'_k$; $\lim\limits_{k \to \infty} f(x'_k, y'_k) = x_0 y_0$, $f(x''_k, y''_k) = 0$. Поэтому $b = x_0 y_0 = 0$.

Так как $x_0 y_0 \neq 0$, то мы получили противоречие, которое показывает, что $f(x, y)$ разрывна в точке $(x_0; y_0)$.

**Упражнение 2.1.** Найти все точки непрерывности данной функции:

$$\text{а) } f(x, y) = \begin{cases} \left(\sqrt[3]{x^2 + y^2}\right)^{x+y}, & x^2 + y^2 > 0, \\ 0, & x = y = 0; \end{cases}$$

б) $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\cos\dfrac{1}{x^2}\,, & x\neq 0,\\ 0, & x=0;\end{cases}$

в) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3y-x^2y^2}{x^3-y^3}\,, & x\neq y,\\ 0, & x=y;\end{cases}$

г) $f(x,y)=\begin{cases}x^2+y^2, & x\in\mathbb{Q},\ y\in\mathbb{Q},\\ 0, & x\notin\mathbb{Q}\ \text{или}\ y\notin\mathbb{Q}.\end{cases}$

# III. ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

## § 1. Частные производные

**Определение 3.1.** Частной производной по $x$ функции двух переменных $f(x, y)$ в точке $(x_0, y_0)$ называется производная функции одной переменной $f(x, y_0)$ в точке $x_0$. Частной производной по $y$ функции двух переменных $f(x, y)$ в точке $(x_0, y_0)$ называется производная функции одной переменной $f(x_0, y)$ в точке $y_0$ (предполагается, что эти производные существуют и конечны).

Символически эти определения могут быть записаны так

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) &= \frac{d}{dx} f(x, y_0)\Big|_{x=x_0}; \\
\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) &= \frac{d}{dy} f(x_0, y)\Big|_{y=y_0}.
\end{aligned} \tag{3.1}
$$

Для частной производной по $x$ в точке $(x_0, y_0)$ применяется символ $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \equiv f'_x(x_0, y_0)$. Для частной производной по $y$ в точке $(x_0, y_0)$ применяется символ $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \equiv$ $\equiv f'_y(x_0, y_0)$. Первое из равенств (3.1) означает, что для вычисления $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ нужно зафиксировать переменную $y =$ $= y_0$, и полученную функцию одной переменной $f(x, y_0)$ продифференцировать по этой переменной $x$ в точке $x_0$. Операция дифференцирования функции одной переменной $x$ обозначается символом $\frac{d}{dx}$. Аналогично объясняется второе из равенств (3.1).

Если вспомнить определение производной функции одной переменной, то равенства (3.1) можно записать так

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}; \\
\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) &= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}
\end{aligned}
$$

(этими равенствами будем пользоваться только тогда, когда значения производной соответствующей функции одной переменной нельзя вычислить по известным формулам дифференцирования).

В общем случае функции нескольких переменных частную производную функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ по переменной $x_i$ в точке $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ можно определить как

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}\,(x_1^0, \ldots, x_n^0) = \frac{d}{dx_i}\, f(x_1^0, \ldots, x_{i-1}^0, x_i, x_{i+1}^0, \ldots, x_n^0)\Big|_{x_i = x_i^0}.$$

В настоящем пособии мы в основном будем рассматривать функции двух переменных.

Если в некоторой окрестности точки $(x_0, y_0)$, функция $f(x, y)$ является суперпозицией элементарных функций, то частные производные можно вычислять по обычным формулам дифференцирования, считая одну из переменных параметром. Например,

$$\frac{\partial}{\partial x}\,(3x^2y^3 + e^x + \ln(x - \sin y)) = 6xy^3 + e^x + \frac{1}{x - \sin y}\,;$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\,(3x^2y^3 + e^x + \ln(x - \sin y)) = 9x^2y^2 - \frac{\cos y}{x - \sin y}\,;$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\right) = \frac{(x^2 + y^2)\cdot 2x - (x^2 - y^2)\cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2}\,;$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\right) = \frac{-2y(x^2 + y^2) - (x^2 - y^2)\cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2}\,.$$

Последние два равенства выполняются во всех точках, кроме $(0, 0)$. Если же доопределить функцию

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\,, & x^2 + y^2 > 0; \\ 1, & x = y = 0, \end{cases}$$

то частные производные в точке $(0, 0)$ можно вычислить опять-таки по определению. Имеем

$$\frac{\partial f}{\partial x}\,(0, 0) = \frac{d}{dx}\, f(x, 0)\Big|_{x=0}.$$

Но $f(x,0) = \begin{cases} 1, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0, \end{cases}$ т.е. $f(x,0) = 1$ при всех $x$. Производная такой функции одной переменной $x$ равна 0 в любой точке, в частности, при $x = 0$. Значит, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$. С другой стороны, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \frac{d}{dy} f(0,y)\Big|_{y=0}$. Так как $f(0,y) = \begin{cases} -1, & y \neq 0; \\ 1, & y = 0, \end{cases}$ то эта функция одной переменной $y$ не имеет производной в точке $y = 0$. Значит, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ не существует.

Иногда для вычисления частных производных в точке приходится вычислять предел функции одной переменной.

**Пример 3.1.** Вычислить $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ во всех точках плоскости для функции

$$f(x,y) = \begin{cases} \exp\left(-\dfrac{1}{x^2+y^2}\right), & x^2+y^2 > 0; \\ 0, & x = y = 0. \end{cases}$$

Всюду, кроме точки $(0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \exp\left(-\frac{1}{x^2+y^2}\right) \cdot \frac{2x}{(x^2+y^2)^2};$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \exp\left(-\frac{1}{x^2+y^2}\right) \cdot \frac{2y}{(x^2+y^2)^2}.$$

Далее, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{d}{dx} f(x,0)\Big|_{x=0}$.

Но $f(x,0) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right), & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

Производную такой функции одной переменной в точке $x = 0$ можно вычислить только по определению

$$\frac{d}{dx} f(x,0)\Big|_{x=0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x) - f(0)}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{t \to 0} \frac{\exp\left(-\frac{1}{t^2}\right)}{t} = \lim_{u \to \infty} \frac{e^{-u^2}}{\frac{1}{u}} = \lim_{u \to \infty} \frac{u}{e^{u^2}}.$$

Полученную неопределённость вида $\frac{\infty}{\infty}$ раскрываем по правилу Лопиталя: $\lim\limits_{u\to\infty} \frac{1}{e^{u^2}\cdot 2u} = 0$. Значит, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$. Аналогично, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

Если функция одной переменной дифференцируема в точке (что равносильно существованию конечной производной), то она непрерывна в этой точке. Обратное неверно (например, функция $|x|$ непрерывна, но не имеет производной в точке 0). Для функций нескольких переменных дело обстоит сложнее.

**Пример 3.2.** Рассмотрим функцию

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x+y)^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 > 0; \\ 1, & x = y = 0. \end{cases}$$

Эта функция не является непрерывной в точке $(0,0)$ (см. пример 1.1). Вместе с тем,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{d}{dx} f(x,0)\Big|_{x=0} = 0,$$

так как $f(x,0) = \begin{cases} 1, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0, \end{cases}$ т.е. $f(x,0) \equiv 1$, и производная этой функции одной переменной в любой точке равна 0. Аналогично, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

Как же могло произойти так, что функция, имеющая частные производные в точке, не является непрерывной? Казалось бы, это противоречит непрерывности функции, имеющей производную. Но дело в том, что наличие частных производных означает «хорошее» поведение функции двух переменных $f(x,y)$ лишь при фиксированном $x$ и фиксированном $y$. Геометрически это соответствует кресту из двух прямых, параллельных координатным осям, проходящим через точку $(x_0, y_0)$. Во всех остальных точках из окрестности $(x_0, y_0)$ функция может вести себя сколь угодно плохо, даже может стремиться к $\infty$ по направлениям, не совпадающим с направлениями координатных осей. Непрерывность же функции в точке $(x_0, y_0)$ означает «хорошее» поведение функции во всей «толстой» окрестности точки. Таким образом, функция, имеющая обе частные производные в точке, обязана быть непрерывной по каждой из переменных в этой точке, но не обязана быть непрерывной как функция двух переменных.

**Пример 3.3.** Функция $f(x,y) = |x| + |y|$ непрерывна в точке $(0,0)$, но $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \dfrac{d}{dx} f(x,0)\Big|_{x=0} = \dfrac{d}{dx}|x|\Big|_{x=0}$ — не существует. Аналогично, не существует $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

Таким образом, непрерывная функция не обязана иметь частные производные. Это не противоречит нашим сложившимся «одномерным» представлениям.

## § 2. Дифференцируемость функции в точке

Вспомним, что функция одной переменной называется дифференцируемой в точке $x_0$, если её приращение в точке представляется в виде

$$\Delta f(x_0) \equiv f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = A\Delta x + o(\Delta x) \quad \text{при} \quad \Delta x \to 0.$$

В курсах математического анализа доказывается, что дифференцируемость в точке равносильна наличию конечной производной в точке, причём $A = f'(x_0)$.

Аналогичное определение имеет место для функций нескольких переменных.

**Определение 3.2.** Функция $n$ переменных $f(x_1,\, \ldots,\, x_n)$ называется дифференцируемой в точке $(x_1^0,\, \ldots,\, x_n^0)$, если её приращение в этой точке представляется в виде

$$\Delta f(x_1,\, \ldots,\, x_n) \equiv f(x_1^0 + \Delta x_1,\, \ldots,\, x_n^0 + \Delta x_n) - f(x_1^0,\, \ldots,\, x_n^0) = \\ = A_1\Delta x_1 + \ldots + A_n\Delta x_n + o(\rho) \\ \text{при} \quad (\Delta x_1,\, \ldots,\, \Delta x_n) \to (0,\, \ldots,\, 0).$$

Здесь $\rho = \sqrt{(\Delta x_1)^2 + \ldots + (\Delta x_n)^2}$ — функция $n$ переменных $\Delta x_1,\; \ldots,\, \Delta x_n$.

Из курса анализа известны

**Необходимые условия дифференцируемости.** Если функция $f(x_1,\, \ldots,\, x_n)$ дифференцируема в точке $(x_1^0,\, \ldots,\, x_n^0)$, то она непрерывна в этой точке и имеет в этой точке частные производные по всем переменным $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x_1^0, \ldots, x_n^0) = A_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Эти необходимые условия не являются достаточными.

**Пример 3.4.** Функция $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$ непрерывна в точке $(0,0)$ и имеет в этой точке частные производные по обеим переменным, но не является дифференцируемой в этой точке.

$\square$ Функция непрерывна в точке $(0,0)$ как суперпозиция непрерывных функций. Далее,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{d}{dx} f(x,0)\Big|_{x=0} = 0,$$

так как $f(x,0) \equiv 0$ — тождественно нулевая функция одной переменной. Аналогично $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

Докажем, наконец, что функция не является дифференцируемой в точке $(0,0)$. Приращение функции в этой точке

$$\Delta f(0,0) \equiv f(\Delta x, \Delta y) - f(0,0) = \sqrt{|\Delta x \Delta y|}.$$

Если $f(x,y)$ дифференцируема в точке $(0,0)$, то $A_1 = A_2 = 0$, и $\Delta f(0,0) = o(\rho)$ при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$, т.е.

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\sqrt{|\Delta x \Delta y|}}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = 0.$$

Но если перейти к полярным координатам $\Delta x = \rho\cos\varphi$, $\Delta y = \rho\sin\varphi$, то $\dfrac{\sqrt{|\rho\cos\varphi\cdot\rho\sin\varphi|}}{\sqrt{\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi}} = \sqrt{|\cos\varphi\sin\varphi|}$. По разным направлениям разные пределы, значит, двойной предел не существует, и $f(x,y)$ не дифференцируема в точке $(0,0)$. $\blacksquare$

**Достаточное условие дифференцируемости.** Если функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ имеет частные производные по всем переменным $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \ \ldots, \ \dfrac{\partial f}{\partial x_n}$, непрерывные в точке $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ как функции $n$ переменных, то она дифференцируема в этой точке.

Это достаточное условие не является необходимым.

**Пример 3.5.** Функция $f(x,y) = \sqrt[3]{x^2y^2}$ дифференцируема в точке $(0,0)$, но не существует ни одной окрестности точки

$(0,0)$, во всех точках которой определены $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial f}{\partial y}$. Значит, не может быть и речи о непрерывности $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ в точке $(0,0)$.

$\square$ Приращение функции в точке $(0,0)$

$$\Delta f(0,0) \equiv f(\Delta x, \Delta y) - f(0,0) = \sqrt[3]{(\Delta x)^2(\Delta y)^2}.$$

Переходя к полярным координатам $\Delta x = \rho\cos\varphi$, $\Delta y = \rho\sin\varphi$, имеем: $|\Delta f(0,0)| = \sqrt[3]{\rho^4\cos^2\varphi\sin^2\varphi} \leqslant \rho^{4/3}$. Значит, $\dfrac{|\Delta f(0,0)|}{\rho} \leqslant \rho^{1/3}$. По утверждению 1.2 $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \dfrac{\Delta f(0,0)}{\rho} = 0$, т.е. $\Delta f(0,0) = o(\rho)$ при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$. Значит, $f(x,y)$ дифференцируема в точке $(0,0)$ с коэффициентами $A_1 = A_2 = 0$ (отсюда следует, что существуют $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$).

Покажем теперь, что в каждой точке оси $y$, кроме точки $(0,0)$, не существует $\dfrac{\partial f}{\partial x}$. В самом деле, при $y_0 \neq 0$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,y_0) = \frac{d}{dx}\, f(x,y_0)\Big|_{x=0} = \frac{d}{dx}\left(\sqrt[3]{x^2y_0^2}\right)\Big|_{x=0} = \\ = \sqrt[3]{y_0^2}\,\frac{d}{dx}\,(\sqrt[3]{x^2})\Big|_{x=0} = \sqrt[3]{y_0^2}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt[3]{(\Delta x)^2}}{\Delta x},$$

а последний предел не существует. Аналогично, в каждой точке оси $x$, кроме точки $(0,0)$, не существует $\dfrac{\partial f}{\partial y}$. $\blacksquare$

Для запоминания необходимых условий и достаточных условий дифференцируемости, а также соответствующих контрпримеров, полезна следующая схема (см. рис. 3.4)

**Определение 3.3.** Функция $n$ переменных $f(x_1, \ldots, x_n)$ называется непрерывно дифференцируемой в точке $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$, если все её частные производные $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial f}{\partial x_n}$ непрерывны в этой точке как функции $n$ переменных.

Достаточное условие дифференцируемости теперь может быть сформулировано так: *если функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ непрерывно дифференцируема в некоторой точке, то она дифференцируема в этой точке.*

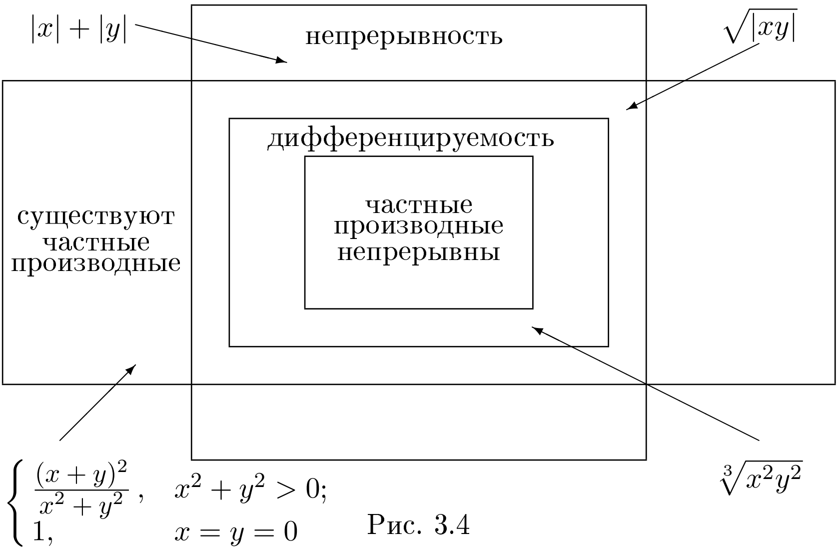


Рис. 3.4

## § 3. Дифференциал. Инвариантность формы дифференциала

Так же, как и в случае функции одной переменной, линейная часть приращения дифференцируемой функции называется дифференциалом функции в соответствующей точке. Напомним, что приращение дифференцируемой функции представляется в виде

$$\Delta f(x_1^0, \ldots, x_n^0) = A_1\Delta x_1 + \ldots + A_n\Delta x_n + o(\rho).$$

Линейная часть приращения $A_1\Delta x_1 + \ldots + A_n\Delta x_n$ — это и есть дифференциал. Обозначается это выражение $df(x_1^0, \ldots, x_n^0)$. Приращения независимых переменных $\Delta x_1, \ \ldots, \Delta x_n$ принято называть их дифференциалами и обозначать $dx_1, \ \ldots, dx_n$. Так как для дифференцируемой функции $A_i = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x_1^0, \ldots, x_n^0)$, то

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1}\,dx_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\,dx_n \tag{3.2}$$

($df$ и значения частных производных рассматриваются в точке $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$).

Имеет место теорема о дифференцируемости сложной функции.

*Пусть функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ дифференцируема в точке $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$, а функции $x_1(t_1, \ldots, t_k)$, $\ldots$, $x_n(t_1, \ldots, t_k)$ дифференцируемы в точке $(t_1^0, \ldots, t_k^0)$. Тогда, если $x_1^0 = x_1(t_1^0, \ldots, t_k^0)$, $\ldots$, $x_n^0 = x_n(t_1^0, \ldots, t_k^0)$, то сложная функция $f(x_1(t_1^0, \ldots, t_k^0), \ldots, x_n(t_1^0, \ldots, t_k^0))$ дифференцируема в точке $(t_1^0, \ldots, t_k^0)$, причём для частных производных этой функции по переменным $t_1$, $\ldots$, $t_k$ имеют место формулы:*

$$\frac{\partial f}{\partial t_i} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t_i} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial x_n}{\partial t_i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial t_i}, \; i = 1, 2, \ldots, k.$$

Частные производные по переменным $t_i$ берутся в точке $(t_1^0, \ldots, t_k^0)$, а частные производные по переменным $x_j$ — в точке $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$.

Отметим, что если все рассматриваемые функции не дифференцируемы, а всего лишь имеют частные производные в соответствующих точках, то сложная функция может и не иметь частных производных. Рассмотрим, например, случай $n = 2$, $k = 1$. Если функция $f(x, y)$ дифференцируема в точке $(x_0, y_0)$, а функции одной переменной $x = x(t)$, $y = y(t)$ дифференцируемы в точке $t_0$, причём $x_0 = x(t_0)$, $y_0 = y(t_0)$, то сложная функция $f(x(t), y(t))$ дифференцируема в точке $t_0$, причём $\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt}$.

Функция $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$ не дифференцируема в точке $(0, 0)$, но имеет частные производные (пример 3.4). Если взять $x = t$, $y = t$ (дифференцируемые функции одной переменной), то сложная функция $f(x(t), y(t)) = |t|$ не имеет производной в точке $t = 0$. Этот факт является косвенным доказательством того, что функция $\sqrt{|xy|}$ не дифференцируема в точке $(0, 0)$.

Дифференциал функции $n$ независимых переменных $f(x_1, \ldots, x_n)$ выражается равенством (3.2), где $dx_1$, $\ldots$, $dx_n$ — дифференциалы независимых переменных. Если считать теперь, что $df$ — дифференциал сложной функции $k$ независимых переменных $t_1, \ \ldots, t_k$, то

$$df = \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial f}{\partial t_i}\, dt_i = \sum_{i=1}^{k} \left( \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}\ \frac{\partial x_j}{\partial t_i} \right) dt_i =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} \left( \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial x_j}{\partial t_i}\, dt_i \right) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}\, dx_j.$$

Получилось равенство, аналогичное (3.2), только здесь $dx_j$ — дифференциалы функций $x_j(t_1, \ldots, t_k)$. Совпадение по форме полученного равенства и (3.2) называется инвариантностью формы дифференциала относительно замены переменных. Этот факт может быть использован при вычислении дифференциалов.

**Пример 3.6.** Доказать, что для двух дифференцируемых функций произвольного числа переменных

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}$$

в точках, где знаменатель не обращается в нуль.

□ Для функций двух независимых переменных $f(x,y) = \frac{x}{y}$ частные производные $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{1}{y}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = -\dfrac{x}{y^2}$. Так как эти частные производные непрерывны в точках, где $y \neq 0$, то функция дифференцируема, и

$$df = \frac{1}{y}\, dx - \frac{x}{y^2}\, dy.$$

В силу инвариантности формы дифференциала, для сложной функции $f(u,v) = \frac{u}{v}$ дифференциал будет

$$df = \frac{1}{v}\, du - \frac{u}{v^2}\, dv = \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}\,. \qquad \blacksquare$$

З а м е ч а н и е. Если $u, v$ — дифференцируемые функции одной переменной, то равенство из примера 3.6 вытекает из формулы производной частного. В общем случае требуется применение инвариантности формы дифференциала. Аналогично доказывается, что для двух дифференцируемых функций произвольного числа переменных

$$d(uv) = u\,dv + v\,du.$$

**Пример 3.7.** Упростить выражение $d\left(\operatorname{arctg}\frac{u}{v}\right)$, где $\frac{u}{v}$ — дифференцируемые функции произвольного числа переменных, причём знаменатель не обращается в нуль.

Для функции одной переменной $f(x) = \operatorname{arctg} x$

$$df = f'(x)\,dx = \frac{dx}{1+x^2}\,.$$

В силу инвариантности формы дифференциала,

$$d\left(\operatorname{arctg}\frac{u}{v}\right) = \frac{d\left(\frac{u}{v}\right)}{1+\frac{u^2}{v^2}} = \frac{v^2}{v^2+u^2}\cdot\frac{v\,du - u\,dv}{v^2} = \frac{v\,du - u\,dv}{u^2+v^2}\,.$$

## § 4. Формальное дифференцирование

Под формальным дифференцированием понимается вычисление частных производных и дифференциалов в тех случаях, когда в некоторой окрестности рассматриваемой точки функция представляется в виде суперпозиции элементарных функций и заведомо непрерывно дифференцируема. Вычисление частных производных и дифференциалов сводится только к применению известных формул дифференцирования функций одной переменной и к арифметическим операциям.

**Пример 3.8.** Вычислить дифференциал функции $f(x, y) = e^{xy-\pi\sin y}$: а) в произвольной точке $(x, y)$; б) в точке $(1, \pi)$.

**Первый способ.** Найдём частные производные данной функции:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y\cdot e^{xy-\pi\sin y}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = (x - \pi\cos y)\cdot e^{xy-\pi\sin y},$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,\pi) = \pi e^{\pi}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(1,\pi) = (1+\pi)e^{\pi}.$$

Поэтому:

а) $df(x,y) = ye^{xy-\pi\sin y}dx + (x-\pi\cos y)e^{xy-\pi\sin y}dy$;

б) $df(1,\pi) = \pi e^{\pi}dx + (1+\pi)e^{\pi}dy$.

**Второй способ.** Для функции одной переменной $f(u) = e^u$ дифференциал $df = e^u\,du$. В силу инвариантности формы дифференциала:

а) $df(x,y) = e^{xy-\pi\sin y}\,d(xy-\pi\sin y) = e^{xy-\pi\sin y}(y\,dx+x\,dy-\pi\cos y\,dy) = ye^{xy-\pi\sin y}dx + (x-\pi\cos y)e^{xy-\pi\sin y}dy$.

Этот способ позволяет вычислять дифференциал сложной функции без непосредственного нахождения её частных производных. Вместо двух дифференцирований проводится одно, вообще говоря, несколько более громоздкое. Этот способ тем выгоднее, чем большее число независимых переменных являются аргументами функции. Например, для функции пяти переменных вместо пяти дифференцирований нужно проводить всего одно — это уже существенное облегчение. А сами частные производные, если они нужны, могут быть собраны как коэффициенты при дифференциалах независимых переменных. В нашем примере

$$\frac{\partial f}{\partial x} = ye^{xy-\pi\sin y}; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = (x-\pi\cos y)e^{xy-\pi\sin y}.$$

б) $df(1,\pi) = \pi e^{\pi}dx + (1+\pi)e^{\pi}dy$.

**Пример 3.9.** Вычислить дифференциал функции $f(x,y,z) = \left(\frac{x}{y}\right)^{1/z}$ в точке $(1,1,1)$.

**Первый способ.** Представим функцию в виде суперпозиции элементарных:

$$f(x,y,z) = \exp\left(\frac{1}{z}\,\ln\frac{x}{y}\right).$$

Найдём частные производные:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \exp\left(\frac{1}{z}\,\ln\frac{x}{y}\right)\frac{1}{z}\,\frac{y}{x}\,\frac{1}{y} = \frac{1}{xz}\left(\frac{x}{y}\right)^{1/z};$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \exp\left(\frac{1}{z}\,\ln\frac{x}{y}\right)\frac{1}{z}\,\frac{y}{x}\left(-\frac{x}{y^2}\right) = -\frac{1}{yz}\left(\frac{x}{y}\right)^{1/z};$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \exp\left(\frac{1}{z}\,\ln\frac{x}{y}\right)\ln\frac{x}{y}\left(-\frac{1}{z^2}\right) = -\frac{1}{z^2}\ln\frac{x}{y}\left(\frac{x}{y}\right)^{1/z};$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1,1) = 1; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1,1,1) = -1;$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(1,1,1) = 0; \quad df(1,1,1) = dx - dy.$$

**Второй способ.** $d(e^u) = e^u\,du$, поэтому в силу инвариантности формы дифференциала

$$df(x,y,z) = \exp\left(\frac{1}{z}\,\ln\frac{x}{y}\right)d\left(\frac{1}{z}\,\ln\frac{x}{y}\right) =$$

$$= \left(\frac{x}{y}\right)^{1/z}\cdot\left[\frac{1}{z}\,d\left(\ln\frac{x}{y}\right) + \ln\frac{x}{y}\cdot d\left(\frac{1}{z}\right)\right].$$

Так как $d(\ln u) = \frac{1}{u}\,du$, то в силу инвариантности формы дифференциала

$$d\left(\ln\frac{x}{y}\right) = \frac{y}{x}\,d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{y}{x}\cdot\frac{y\,dx - x\,dy}{y^2} = \frac{y\,dx - x\,dy}{xy}.$$

Поэтому

$$df(x,y,z) = \left(\frac{x}{y}\right)^{1/z}\left(\frac{y\,dx - x\,dy}{xyz} - \frac{1}{z^2}\ln\frac{x}{y}\right);$$

$$df(1,1,1) = dx - dy.$$

Формальное дифференцирование применяется при выполнении замены переменных в дифференциальных уравнениях с частными производными.

**Пример 3.10.** Преобразовать уравнение, принимая $\xi$, $\eta$ за новые независимые переменные:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y}, \quad \xi = x + y, \quad \eta = x - y.$$

Для этого нужно выразить частные производные от функции $z$ по «старым» независимым переменным $x$, $y$ через её частные производные по «новым» независимым переменным $\xi$, $\eta$. По формуле частных производных сложной функции имеем

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial \xi}\,\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial \eta}\,\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial \xi} + \frac{\partial z}{\partial \eta};$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial \xi}\,\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \eta}\,\frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial \xi} - \frac{\partial z}{\partial \eta}.$$

Подставляя в уравнение, получим

$$\frac{\partial z}{\partial \xi} + \frac{\partial z}{\partial \eta} = \frac{\partial z}{\partial \xi} - \frac{\partial z}{\partial \eta}.$$

В новых независимых переменных уравнение имеет вид $\frac{\partial z}{\partial \eta} = 0$.

Решениями этого уравнения являются все дифференцируемые функции одной переменной $\xi$, поэтому общее решение уравнения принято записывать в виде $z = f(x + y)$, где $f$ — произвольная дифференцируемая функция одной переменной.

Задача несколько усложняется, если явно задано выражение «старых» независимых переменных через новые, а обратное выражение в явном виде написать сложно или не удаётся вообще.

**Пример 3.11.** Решить уравнение $x\,\frac{\partial u}{\partial y} - y\,\frac{\partial u}{\partial x} = 0$, преобразовав его к полярным координатам $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$.

Обратное выражение $r$, $\varphi$ через $x$, $y$ громоздко и неоднозначно, поэтому выразим сначала $\frac{\partial u}{\partial r}$ и $\frac{\partial u}{\partial \varphi}$ через $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$, а потом получим обратное выражение (здесь придётся решать уже линейную систему уравнений). Имеем

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{\partial u}{\partial x}\,\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial u}{\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial r}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\varphi+\frac{\partial u}{\partial y}\sin\varphi;\\ &\frac{\partial u}{\partial \varphi}=\frac{\partial u}{\partial x}\,\frac{\partial x}{\partial \varphi}+\frac{\partial u}{\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial \varphi}=-\frac{\partial u}{\partial x}\cdot r\sin\varphi+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot r\cos\varphi. \end{aligned}\tag{3.3}$$

Умножим первое из равенств (3.3) на $r\sin\varphi$, а второе на $\cos\varphi$, а затем сложим полученные равенства. Получим:

$$r\,\frac{\partial u}{\partial y}=r\sin\varphi\cdot\frac{\partial u}{\partial r}+\cos\varphi\cdot\frac{\partial u}{\partial \varphi}\,,$$

т.е.

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\sin\varphi\cdot\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\cos\varphi}{r}\,\frac{\partial u}{\partial \varphi}\,.$$

Если теперь умножить первое из равенств (3.3) на $r\cos\varphi$, второе на $\sin\varphi$, а затем вычесть из первого второе, то получим

$$r\,\frac{\partial u}{\partial x}=r\cos\varphi\cdot\frac{\partial u}{\partial r}-\sin\varphi\cdot\frac{\partial u}{\partial \varphi}\,,\quad \text{т.е.}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\cos\varphi\cdot\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{\sin\varphi}{r}\,\frac{\partial u}{\partial \varphi}\,.$$

Подставляя в исходное уравнение, имеем

$$x\sin\varphi\,\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{x\cos\varphi}{r}\,\frac{\partial u}{\partial \varphi}-y\cos\varphi\,\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{y\sin\varphi}{r}\,\frac{\partial u}{\partial \varphi}=0.$$

Так как $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, то члены, содержащие $\frac{\partial u}{\partial r}$, уничтожатся, и уравнение примет вид

$$\frac{\partial u}{\partial \varphi}=0.$$

Решением этого уравнения являются все дифференцируемые функции одной переменной $r$, поэтому общее решение уравнения записывается в виде $u=f(\sqrt{x^2+y^2})$, или, что проще, $u=$ $=f(x^2+y^2)$, где $f$ — произвольная дифференцируемая функция одной переменной.

Иногда в уравнениях совершаются более сложные замены, касающиеся не только независимых переменных, но и неизвестных функций.

**Пример 3.12.** Преобразовать уравнение

$$x\,\frac{\partial z}{\partial x}+y\,\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{z}\,,$$

принимая $\xi$, $\eta$ за новые независимые переменные: $\xi=2x-z^2$, $\eta=-\frac{y}{z}$.

Здесь новые переменные $u$, $v$ выражаются не только через старые переменные $x$, $y$, но и через неизвестную функцию $z$.

Имеем

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x}\,.$$

Но нужно учесть, что $\xi$ и $\eta$ выражаются не только через $x$, $y$, но и через $z$, которая в свою очередь является функцией от $x$, $y$. Поэтому

$$\frac{\partial \xi}{\partial x}=2-2z\,\frac{\partial z}{\partial x}\,;\qquad \frac{\partial \eta}{\partial x}=\frac{y}{z^2}\,\frac{\partial z}{\partial x}\,.$$

Значит,

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial \xi}\left(2-2z\cdot\frac{\partial z}{\partial x}\right)+\frac{\partial z}{\partial \eta}\cdot\frac{y}{z^2}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}\,.$$

Полученное уравнение решим относительно $\frac{\partial z}{\partial x}$:

$$\frac{\partial z}{\partial x}\left(1+2z\cdot\frac{\partial z}{\partial \xi}-\frac{y}{z^2}\cdot\frac{\partial z}{\partial \eta}\right)=2\,\frac{\partial z}{\partial \xi}\,,\quad \text{откуда}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2\,\frac{\frac{\partial z}{\partial \xi}}{1+2z\cdot\frac{\partial z}{\partial \xi}-\frac{y}{z^2}\cdot\frac{\partial z}{\partial \eta}}\,.$$

Аналогично,

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial \xi}\left(-2z\cdot\frac{\partial z}{\partial y}\right)+\frac{\partial z}{\partial \eta}\cdot\frac{y\,\frac{\partial z}{\partial y}-z}{z^2}\,.$$

Полученное уравнение решим относительно $\frac{\partial z}{\partial y}$:

$$\frac{\partial z}{\partial y}\left(1+2z\cdot\frac{\partial z}{\partial \xi}-\frac{y}{z^2}\cdot\frac{\partial z}{\partial \eta}\right)=-\,\frac{1}{z}\,\frac{\partial z}{\partial \eta}\,,\quad \text{откуда}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\,\frac{1}{z}\cdot\frac{\frac{\partial z}{\partial \eta}}{1+2z\cdot\frac{\partial z}{\partial \xi}-\frac{y}{z^2}\cdot\frac{\partial z}{\partial \eta}}\,.$$

Подставляя в исходное уравнение, имеем

$$2x\,\frac{\partial z}{\partial \xi}-\frac{y}{z}\,\frac{\partial z}{\partial \eta}=\frac{x}{z}\left(1+2z\,\frac{\partial z}{\partial \xi}-\frac{y}{z^2}\,\frac{\partial z}{\partial \eta}\right),$$

т.е.

$$\frac{\partial z}{\partial \eta}\left(\frac{xy}{z^3}-\frac{y}{z}\right)=\frac{x}{z}\,.$$

Так как $y=-\eta z$, $x=\dfrac{\xi+z^2}{2}$, то после подстановки уравнение приведётся к виду

$$\eta(z^2-\xi)\,\frac{\partial z}{\partial \eta}=z(z^2+\xi).$$

Написать общее решение этого уравнения не представляется возможным, поэтому такие примеры имеют чисто технический характер.

**Упражнение 3.1.** Доказать, что для двух дифференцируемых функций произвольного числа переменных:

а) $d(uv)=u\,dv+v\,du$;

б) $d(u^v)=u^v\ln u\,du+vu^{v-1}\,dv$ в точках, где $u>0$.

**Упражнение 3.2.** Упростить выражение:

а) $d(\arcsin e^{-u})$, если $u>0$;

б) $d(\sin^3(u^2v)+\ln(1+\operatorname{arctg}^2 v))$.

**Упражнение 3.3.** Вычислить дифференциал функции $f(x,y)$ в точке $(x_0,y_0)$:

а) $f(x,y)=\operatorname{arctg}(x^2-y^2)$, $(x_0,y_0)=(1,1)$;

б) $f(x,y)=x\cos\frac{x}{y}$, $(x_0,y_0)=(\pi,2)$;

в) $f(x,y)=\arcsin(xy)$, $(x_0,y_0)=\left(\sqrt{3},\frac{1}{2}\right)$.

**Упражнение 3.4.** Преобразовать уравнение, переходя к новым независимым переменным. Если удастся, найти общее решение уравнения

а) $y\,\dfrac{\partial z}{\partial x}-x\,\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$, $\xi=x$ , $\eta=x^2+y^2$;

б) $x\,\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\,\dfrac{\partial z}{\partial y}=z$, $\xi=x$ , $\eta=\frac{y}{x}$;

в) $x\,\dfrac{\partial z}{\partial x}+\sqrt{1+y^2}\,\dfrac{\partial z}{\partial y}=xy$, $\xi=\ln x$ , $\eta=\ln(y+\sqrt{1+y^2})$;

г) $(x+y)\,\dfrac{\partial z}{\partial x}-(x-y)\,\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$, $x=e^{\xi}\cos\eta$ , $y=e^{\xi}\sin\eta$;

д) $(x+z)\,\dfrac{\partial z}{\partial x} + (y+z)\,\dfrac{\partial z}{\partial y} = x+y+z$, $\xi = x+z$ , $\eta = y+z$.

## § 5. Исследование дифференцируемости функции в точке

Если формула, которой задаётся функция двух переменных, содержит модули, корни различных степеней, фигурные скобки (т.е. одна формула при одних значениях аргументов, другая — при других), то формальное дифференцирование, как правило, невозможно. В первую очередь нужно выяснить, является ли такая функция дифференцируемой в точках, где обращаются в нуль подкоренные выражения или выражения под знаком модуля, где происходит «склейка», т.е. переход от одной формулы к другой. При этом исследовании удобно придерживаться следующей схемы действий.

1) Выясним сначала, существуют ли в исследуемой точке $(x_0, y_0)$ частные производные

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}\,(x_0, y_0), \quad B = \frac{\partial f}{\partial y}\,(x_0, y_0). \tag{3.4}$$

Если хоть одна из них не существует — не может быть речи о дифференцируемости в точке.

2) Если обе частные производные $A$ и $B$ существуют, то дифференцируемость сводится к равенству

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) - A \cdot \Delta x - B \cdot \Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}\,. \tag{3.5}$$

Если функция не дифференцируема в точке $(x_0, y_0)$, то равенство (3.5) не выполняется ни при каких $A$, $B$. Если дифференцируема — выполняется при $A$, $B$, определённых из (3.4). Поэтому, если $A$ и $B$ найдены из (3.4), то нужно проверить выполнение равенства (3.5).

В дальнейшем, если не оговорено противное, мы будем исследовать дифференцируемость функции $f(x, y)$ в точке $(0, 0)$.

**Пример 3.13.** $f(x,y) = \sqrt{x^2+xy+y^2}$. Так как $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \dfrac{d}{dx} f(x,0)\Big|_{x=0} = \dfrac{d}{dx}|x|\Big|_{x=0}$ — не существует, то $f(x,y)$ не является дифференцируемой в точке $(0,0)$.

**Пример 3.14.** $f(x,y) = |x|^\alpha |y|^\beta$, где $\alpha > 0$, $\beta > 0$.

Имеем $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \dfrac{d}{dx} f(x,0)\Big|_{x=0} = 0$, так как $f(x,0) = 0$ при всех $x$. Аналогично, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

Остаётся проверить выполнение равенства (3.5) при $x_0 = = y_0 = 0$, $f(0,0) = 0$, $A = B = 0$, т.е. проверить, равен ли нулю

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \frac{f(\Delta x,\Delta y)}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}} = \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \frac{|\Delta x|^\alpha |\Delta y|^\beta}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\,.$$

Если ввести полярные координаты $\Delta x = \rho\cos\varphi$, $\Delta y = \rho\sin\varphi$, то последнее выражение примет вид

$$\frac{\rho^\alpha |\cos\varphi|^\alpha \rho^\beta |\sin\varphi|^\beta}{\sqrt{\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi}} = \rho^{\alpha+\beta-1}|\cos\varphi|^\alpha |\sin\varphi|^\beta.$$

Если $\alpha+\beta > 1$, то последнее выражение, будучи неотрицательным, не превосходит $\rho^{\alpha+\beta-1}$. Последняя функция от $\rho$ стремится к нулю при $\rho \to +0$. Соответствующий двойной предел равен 0, и функция $f(x,y)$ дифференцируема в точке $(0,0)$.

Если $\alpha+\beta = 1$, то соответствующее выражение равно $|\cos\varphi|^\alpha |\sin\varphi|^\beta$, т.е. не зависит от $\rho$. Пределы по разным направлениям различны, двойной предел не существует, функция $f(x,y)$ не дифференцируема в точке $(0,0)$.

Наконец, если $\alpha+\beta < 1$, то при $\varphi \neq \frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, соответствующее выражение имеет бесконечный предел при $\rho \to +0$. Тем более не существует двойной предел, и функция $f(x,y)$ не дифференцируема в точке $(0,0)$.

Частные случаи примера 3.14 были рассмотрены выше. Если $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$, то $f(x,y)$ не дифференцируема в точке $(0,0)$ (пример 3.4), если $\alpha = \beta = \frac{2}{3}$ — дифференцируема (пример 3.5). Если в примере 3.14 $\alpha$ и $\beta$ являются рациональными числами, выраженными дробями с нечётным знаменателем, то модули в условии можно опустить. Например, $f(x,y)=\sqrt[3]{x^2y}$ не дифференцируема в точке $(0,0)$ ($\alpha=\frac{2}{3}$, $\beta=\frac{1}{3}$), а $f(x,y)=$ $=\sqrt[5]{x^3y^4}$ — дифференцируема ($\alpha=\frac{3}{5}$, $\beta=\frac{4}{5}$).

**Пример 3.15.** $f(x,y)=\sqrt[3]{x^3+y^3}$. Имеем: $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=$ $=\frac{d}{dx}f(x,0)=1$, так как $f(x,0)=x$ при всех $x$. Аналогично, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=1$.

Нужно проверить, равен ли нулю предел

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)-\Delta x-\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=$$

$$=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\sqrt[3]{(\Delta x)^3+(\Delta y)^3}-\Delta x-\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}.$$

После введения полярных координат $\Delta x=\rho\cos\varphi$, $\Delta y=$ $=\rho\sin\varphi$, последнее выражение запишется в виде

$$\frac{\sqrt[3]{\rho^3\cos^3\varphi+\rho^3\sin^3\varphi}-\rho\cos\varphi-\rho\sin\varphi}{\sqrt{\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi}}=$$

$$=\sqrt[3]{\cos^3\varphi+\sin^3\varphi}-\cos\varphi-\sin\varphi.$$

Конечное выражение не зависит от $\rho$, пределы по разным направлениям различны, двойной предел не существует, функция $f(x,y)$ не дифференцируема в точке $(0,0)$.

**Пример 3.16.** $f(x)=\sqrt[3]{x^3+y^4}$.

Имеем: $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\frac{d}{dx}f(x,0)=1$, так как $f(x,0)=x$ при всех $x$. Далее, $f(0,y)=\sqrt[3]{y^4}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\frac{d}{dy}f(0,y)\Big|_{y=0}=$ $=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{\sqrt[3]{(\Delta y)^4}}{\Delta y}=0$.

Нужно проверить, равен ли нулю предел

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)-\Delta x}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\sqrt[3]{(\Delta x)^3+(\Delta y)^4}-\Delta x}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}.$$

Вспомним, что этот предел равен 0 (см. пример 1.6; доказательство этого утверждения достаточно сложно). Значит, $f(x,y)$ дифференцируема в точке $(0,0)$.

Иногда при исследовании дифференцируемости полезно применять теорему о дифференцируемости сложной функции.

**Пример 3.17.** $f(x,y) = \ln(3 + \cos(xy) + \sqrt[4]{x^2|y|^3})$.

Вспомним, что функция $\sqrt[4]{x^2|y|^3}$ дифференцируема в точке $(0,0)$ (пример 3.14 при $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = \frac{3}{4}$). Так как функция $3 + \cos(xy)$ заведомо непрерывно дифференцируема в любой точке, то функция $u(x,y) = 3 + \cos(xy) + \sqrt[4]{x^2|y|^3}$ дифференцируема в точке $(0,0)$, причём $u(0,0) = 4$. Так как внешняя функция одной переменной $\ln u$ дифференцируема в точке $u = 4$, то сложная функция $f(x,y) = \ln u(x,y)$ дифференцируема в точке $(0,0)$.

**Пример 3.18.** $f(x,y) = \sin(e^{x+y} + \sqrt[3]{x^3 + y^3})$.

Функция $\sqrt[3]{x^3 + y^3}$ не дифференцируема в точке $(0,0)$ (пример 3.15). Для доказательства недифференцируемости $f(x,y)$ будем рассуждать от противного. Пусть $f(x,y)$ дифференцируема в точке $(0,0)$, $f(0,0) = \sin 1$. Тогда функция $g(x,y) = e^{x+y} + \sqrt[3]{x^3 + y^3} = \arcsin f(x,y)$ также дифференцируема в точке $(0,0)$. В самом деле, внешняя функция одной переменной $\arcsin u$ дифференцируема в точке $u = \sin 1$, поэтому сложная функция $g(x,y) = \arcsin f(x,y)$ дифференцируема в точке $(0,0)$. Но тогда $\sqrt[3]{x^3 + y^3} = g(x,y) - e^{x+y}$ — дифференцируемая функция в точке $(0,0)$, а это не так. Полученное противоречие показывает, что функция $f(x,y)$ не дифференцируема в точке $(0,0)$.

З а м е ч а н и е. Функции из примеров 3.17 и 3.18 можно исследовать на дифференцируемость и по общей схеме, но такие рассуждения достаточно громоздки и требуют некоторой изворотливости. Приведённые же выше решения этих примеров просты и стандартны.

**Пример 3.19.** $f(x,y) = \cos(\sqrt[3]{xy})$.

Функция $\sqrt[3]{xy}$ не дифференцируема в точке $(0,0)$ (пример 3.14 при $\alpha = \beta = \frac{1}{3}$). Казалось бы, аналогично примеру 3.18, можно доказать недифференцируемость сложной функции $f(x,y)$. Но здесь похожее рассуждение не пройдёт, потому что $f(0,0) = 1$, а функция $\arccos u$ не дифференцируема в точке $u = 1$ (эта функция определена лишь на отрезке $[-1,1]$, а в концах его имеет бесконечные производные). Придётся применить общую схему.

Легко видеть, что $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{d}{dx} f(x,0)\Big|_{x=0} = 0$, так как $f(x,0) = 1$ при всех $x$. Аналогично, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$. Так как $f(0,0) = 1$, то нужно проверить, равен ли нулю предел

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \frac{f(\Delta x,\Delta y) - f(0,0)}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \frac{\cos\left(\sqrt[3]{\Delta x\cdot\Delta y}\right) - 1}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}\,. \qquad (3.6)$$

Функция $\sqrt[3]{xy}$ не дифференцируема в точке $(0,0)$ потому, что выражение $\sqrt[3]{\Delta x\Delta y}$ после перехода к полярным координатам $\Delta x = \rho\cos\varphi$, $\Delta y = \rho\sin\varphi$ имеет порядок $\frac{2}{3}$ по переменной $\rho$, и после деления на $\rho$ не может иметь нулевой предел. Но разность в числителе в правой части (3.6) уже имеет порядок $\frac{4}{3}$ по $\rho$ (так как для бесконечно малой величины $\alpha$ выражение $\cos\alpha - 1$ имеет порядок $\alpha^2$). После деления на $\rho$ стремление к нулю сохранится, и, похоже, дифференцируемость будет иметь место. Теперь докажем это аккуратно.

После перехода к полярным координатам оценим модуль правой части (3.6):

$$\left|\frac{\cos\left(\sqrt[3]{\rho^2\cos\varphi\sin\varphi}\right) - 1}{\sqrt{\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi}}\right| = \frac{2}{\rho}\sin^2\left(\frac{\sqrt[3]{\rho^2\cos\varphi\sin\varphi}}{2}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{\rho}\left(\frac{\sqrt[3]{\rho^2\cos\varphi\sin\varphi}}{2}\right)^2 \leqslant \frac{2}{\rho}\cdot\frac{\rho^{4/3}}{4} = \frac{1}{2}\,\rho^{1/3}.$$

Последнее выражение стремится к нулю при $\rho \to +0$ (здесь использованы формула тригонометрии $1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$ и неравенство $|\sin\alpha| \leqslant |\alpha|$, справедливые при всех значениях $\alpha$). Значит, двойной предел в левой части (3.6) равен 0, и функция $f(x,y)$ дифференцируема в точке $(0,0)$.

Попробуем теперь разобраться в том, можно ли при нахождении этого двойного предела применять разложение косинуса по формуле Тейлора. Из равенства (1.2) имеем

$$\cos(\sqrt[3]{xy}) = 1 - \frac{1}{2}(\sqrt[3]{xy})^2 + o\big((\sqrt[3]{xy})^2\big) \quad \text{при} \quad x \to 0,\ y \to 0,$$

где $o$ малое — в смысле предела функции двух переменных. Но $|x| \leqslant \rho$, $|y| \leqslant \rho$, где $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$. Поэтому $|(\sqrt[3]{xy})^2| \leqslant \rho^{4/3}$, и $o((\sqrt[3]{xy})^2) = \alpha(x,y)(\sqrt[3]{xy})^2 = \alpha(x,y)\,\dfrac{(\sqrt[3]{xy})^2}{\rho^{4/3}}\,\rho^{4/3} = o(\rho^{4/3})$, так как функция $\beta(x,y) = \alpha(x,y)\,\dfrac{(\sqrt[3]{xy})^2}{\rho^{4/3}}$ — бесконечно малая при $x \to 0$, $y \to 0$, как произведение бесконечно малой на ограниченную.

Значит, $\cos(\sqrt[3]{xy}) - 1 = -\frac{1}{2}(\sqrt[3]{xy})^2 + o(\rho^{4/3})$, и

$$\frac{\cos(\sqrt[3]{\Delta x \Delta y}) - 1}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = -\frac{1}{2}\,\frac{\sqrt[3]{(\Delta x)^2(\Delta y)^2}}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}} + o(\rho^{1/3}), \tag{3.7}$$

(в последнем равенстве заменили $x$ на $\Delta x$, $y$ на $\Delta y$, $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$). Первое слагаемое в правой части (3.7) имеет двойной предел 0 при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$ (это соответствует дифференцируемости функции $\sqrt[3]{x^2y^2}$ в точке $(0,0)$ — см. примеры 3.5 и 3.14). Второе также имеет двойной предел, равный нулю, так как $\rho^{1/3}$ — бесконечно малая при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$. Этим доказана дифференцируемость функции $f(x,y)$ в точке $(0,0)$.

Такое доказательство не проще предыдущего. Поэтому, если есть возможность обойтись без разложения по формуле Тейлора, то лучше этой возможностью воспользоваться. Тем не менее бывают случаи, когда применение формулы Тейлора является единственным разумным способом вычисления двойного предела.

**Пример 3.20.** $f(x,y) = \sqrt[5]{xy} - \sin(\sqrt[5]{xy})$.

Легко видеть, что $f(x,0) = 0$ при всех $x$, поэтому $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \dfrac{d}{dx}\,f(x,0)\Big|_{x=0} = 0$. Аналогично, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

Нужно проверить, равен ли нулю предел

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \frac{f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}} = \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \frac{\sqrt[5]{\Delta x\cdot\Delta y}-\sin(\sqrt[5]{\Delta x\cdot\Delta y})}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\,.$$

Из равенства (1.2) имеем

$$\sqrt[5]{xy}-\sin(\sqrt[5]{xy}) = \frac{1}{6}\,(\sqrt[5]{xy})^3+o((\sqrt[5]{xy})^3) \quad \text{при} \quad x\to 0,\ y\to 0.$$

Но $|x|\leqslant\rho$, $|y|\leqslant\rho$, где $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$, поэтому, аналогично рассуждениям в предыдущем примере, можно показать, что $o((\sqrt[5]{xy})^3)=o(\rho^{6/5})$. Тогда, заменив $x$ на $\Delta x$, $y$ на $\Delta y$, получим

$$\frac{\sqrt[5]{\Delta x\cdot\Delta y}-\sin(\sqrt[5]{\Delta x\cdot\Delta y})}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}} = \frac{1}{6}\,\frac{\sqrt[5]{(\Delta x)^3(\Delta y)^3}}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}+o(\rho^{1/5}), \tag{3.8}$$

где $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$. Первое слагаемое в правой части (3.8) имеет двойной предел 0 при $\Delta x\to 0$, $\Delta y\to 0$, так как при переходе к полярным координатам $\Delta x=\rho\cos\varphi$, $\Delta y=\rho\sin\varphi$, имеем

$$\left|\frac{\sqrt[5]{\rho^3\cos^3\varphi\cdot\rho^3\sin^3\varphi}}{\sqrt{\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi}}\right|\leqslant\rho^{1/5},$$

а $\rho^{1/5}$ — бесконечно малая при $\Delta x\to 0$, $\Delta y\to 0$. Второе слагаемое и подавно имеет нулевой предел. Поэтому двойной предел выражения в левой части (3.8) равен нулю, и функция $f(x,y)$ дифференцируема в точке $(0,0)$.

Из примеров 1.8 и 1.9, решённых при помощи разложения по формуле Тейлора, легко усмотреть, что функция

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x\sin y-y\sin x}{x^2+y^2}\,, & x^2+y^2>0,\\ 0, & x=y=0\end{cases}$$

дифференцируема в точке $(0,0)$, а функция

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x\sin y-y\sin x}{(x^2+y^2)^{3/2}}\,, & x^2+y^2>0,\\ 0, & x=y=0\end{cases}$$

недифференцируема в точке $(0,0)$.

Приведём примеры задач, предлагавшихся студентам 1 курса МФТИ на экзаменационных контрольных работах по математическому анализу в весеннем семестре.

**Пример 3.21.** $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x^2y^3)^{3/5}}{x^2 - xy + y^2}, & x^2 + y^2 > 0, \\ 0, & x = y = 0. \end{cases}$

Так как в числителе и знаменателе стоят однородные выражения относительно $x$, $y$ (в числителе степени 3, в знаменателе — степени 2), то функция $f(x,y)$ имеет степень 1 относительно $\rho$, и после деления на $\rho$ стремление к нулю уже не имеет места. Такие интуитивные соображения приводят нас к мысли о том, что $f(x,y)$ не дифференцируема в точке $(0,0)$. А теперь приведём аккуратное доказательство.

Так как $f(x,0) = 0$ при всех $x$ (при $x \neq 0$ это следует из общей формулы, а $f(0,0)$ также равна 0), то $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = $ $= \dfrac{d}{dx} f(x,0)\Big|_{x=0} = 0$.

Аналогично, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

Остаётся проверить, равен ли нулю предел

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{f(\Delta x, \Delta y) - f(0,0)}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} =$$

$$= \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{((\Delta x)^2 (\Delta y)^3)^{3/5}}{((\Delta x)^2 - \Delta x \Delta y + (\Delta y)^2)\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}.$$

После перехода к полярным координатам последнее выражение запишется в виде

$$\frac{((\rho\cos\varphi)^2(\rho\sin\varphi)^3)^{3/5}}{(\rho^2\cos^2\varphi - \rho^2\cos\varphi\sin\varphi + \rho^2\sin^2\varphi)\sqrt{\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi}} =$$

$$= \frac{(\cos\varphi)^{6/5}(\sin\varphi)^{9/5}}{1 - \cos\varphi\sin\varphi},$$

т.е. оно не зависит от $\rho$.

Пределы по разным направлениям различны, двойной предел не существует, функция $f(x,y)$ не дифференцируема в точке $(0,0)$.

**Пример 3.22.** $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{(x^2y^3)^{3/5}}{\sqrt{x^2-xy+y^2}}, & x^2+y^2>0,\\ 0, & x=y=0.\end{cases}$

Интуитивные соображения, аналогичные приведённым в начале решения предыдущего примера, показывают, что функция $f(x,y)$ имеет порядок $\frac{3}{2}$ относительно $\rho$, и после деления на $\rho$ продолжает стремиться к нулю. Значит, она дифференцируема в точке $(0,0)$. Теперь приведём аккуратное доказательство.

Аналогично предыдущему примеру, нужно проверить, равен ли нулю предел

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{((\Delta x)^2(\Delta y)^3)^{3/5}}{\sqrt{(\Delta x)^2-\Delta x\Delta y+(\Delta y)^2}\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\,. \tag{3.9}$$

После перехода к полярным координатам, получим выражение

$$\frac{((\rho\cos\varphi)^2(\rho\sin\varphi)^3)^{3/5}}{\sqrt{\rho^2\cos^2\varphi-\rho^2\cos\varphi\sin\varphi+\rho^2\sin^2\varphi}\sqrt{\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi}}=$$
$$=\frac{\rho(\cos\varphi)^{6/5}(\sin\varphi)^{9/5}}{\sqrt{1-\cos\varphi\sin\varphi}}\,.$$

Так как всегда $1-\cos\varphi\sin\varphi=1-\frac{1}{2}\sin 2\varphi\geqslant\frac{1}{2}$, то наше выражение по модулю не превосходит $\rho\sqrt{2}$. Двойной предел (3.9) равен 0, функция $f(x,y)$ дифференцируема в точке $(0,0)$.

**Пример 3.23.** $f(x,y)=x\sqrt{1+y^{2/3}}$.

Имеем: $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\dfrac{d}{dx}f(x,0)\Big|_{x=0}=1$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)=$ $=\dfrac{d}{dy}f(0,y)\Big|_{y=0}=0$, так как $f(x,0)=x$ при всех $x$, $f(0,y)=0$ при всех $y$. Проверим, равен ли нулю предел

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)-\Delta x}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\Delta x(\sqrt{1+(\Delta y)^{2/3}}-1)}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\,.$$

После перехода к полярным координатам последнее выражение примет вид

$$\frac{\rho\cos\varphi(\sqrt{1+(\rho\sin\varphi)^{2/3}}-1)}{\sqrt{\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi}}=\cos\varphi(\sqrt{1+(\rho\sin\varphi)^{2/3}}-1).$$

Оно не превосходит по модулю $\sqrt{1+\rho^{2/3}}-1$. Эта функция от $\rho$ стремится к нулю при $\rho \to +0$. Двойной предел равен 0, функция $f(x,y)$ дифференцируема в точке $(0,0)$.

**Пример 3.24.** $f(x,y)=\sqrt[3]{\sin^4 x+\cos^4 y}$.

Отметим, что $f(0,0)=1$. Далее,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\frac{d}{dx}\,f(x,0)\Big|_{x=0}=\frac{d}{dx}\,(\sin x)^{4/3}\Big|_{x=0}= \\ =\frac{4}{3}\,(\sin x)^{1/3}\cos x\Big|_{x=0}=0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\frac{d}{dy}\,f(0,y)\Big|_{y=0}=\frac{d}{dy}\,(\cos y)^{4/3}\Big|_{y=0}= \\ =\frac{4}{3}\,(\cos y)^{1/3}(-\sin y)\Big|_{y=0}=0.$$

Отметим, что вычисление таким способом второй из этих производных вполне законно, а вот вычисление первой из них, строго говоря, нужно было бы проводить по определению. Тем не менее можно считать известным, что $\frac{d}{dx}\,(x^{4/3})=\frac{4}{3}\,x^{1/3}$ при всех действительных $x$, где $x^{1/3}=\sqrt[3]{x}$, и вычисление первой из частных производных тоже считать обоснованным.

Нужно проверить, равен ли нулю предел

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\sqrt[3]{\sin^4\Delta x+\cos^4\Delta y}-1}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\,.$$

После перехода к полярным координатам последнее выражение оценится по модулю сверху следующим образом:

$$\left|\frac{\sqrt[3]{\sin^4(\rho\cos\varphi)+\cos^4(\rho\sin\varphi)}-1}{\sqrt{\rho^2\cos^2\varphi+\rho^2\sin^2\varphi}}\right|=\frac{|A-1|}{\rho}=\frac{|A^3-1|}{\rho(1+A+A^2)}= \\ =\frac{|\sin^4(\rho\cos\varphi)+\cos^4(\rho\sin\varphi)-1|}{\rho(1+A+A^2)}\leqslant \\ \leqslant\frac{|\sin^4(\rho\cos\varphi)|+|1-\cos^4(\rho\sin\varphi)|}{\rho}\leqslant\frac{\rho^4+2\sin^2(\rho\sin\varphi)}{\rho}\leqslant \\ \leqslant\frac{\rho^4+2\rho^2}{\rho}=2\rho+\rho^3.$$

Последнее выражение стремится к нулю при $\rho \to +0$, соответствующий двойной предел равен 0, $f(x,y)$ дифференцируема в точке $(0,0)$. Здесь использована очевидная цепочка тригонометрических соотношений $1-\cos^4\alpha = (1+\cos^2\alpha)(1-\cos^2\alpha) \leqslant 2\sin^2\alpha$.

**Пример 3.25.** $f(x,y) = \begin{cases} y\left(1-\cos\dfrac{x}{\sqrt{|y|}}\right), & y \neq 0, \\ 0, & y = 0. \end{cases}$

Так как $f(x,0)=0$ при всех $x$, а $f(0,y)=0$ при всех $y$, то $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \dfrac{d}{dx} f(x,0)\Big|_{x=0} = 0$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \dfrac{d}{dy} f(0,y)\Big|_{y=0} = 0$.

Нужно проверить, равен ли нулю предел

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \frac{f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}} = \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \frac{\Delta y\left(1-\cos\dfrac{\Delta x}{\sqrt{|\Delta y|}}\right)}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}} =$$

$$= \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \frac{\Delta y\cdot 2\sin^2\left(\dfrac{\Delta x}{2\sqrt{|\Delta y|}}\right)}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}.$$

Последнее выражение не превосходит по модулю

$$\frac{2|\Delta y|\left(\dfrac{\Delta x}{2\sqrt{|\Delta y|}}\right)^2}{\rho} = \frac{(\Delta x)^2}{2\rho} \leqslant \frac{\rho^2}{2\rho} = \frac{\rho}{2}.$$

В приведённой цепочке преобразований считалось, что $\Delta y \neq 0$, но окончательная оценка

$$\left|\frac{f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\right| \leqslant \frac{\rho}{2},$$

где $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$, справедлива, очевидно, и при $\Delta y = 0$. При этом даже не пришлось формально переходить к полярным координатам. Нужный нам двойной предел равен 0, $f(x,y)$ дифференцируема в точке $(0,0)$.

**Пример 3.26.** $f(x,y) = \begin{cases} (x+y)\operatorname{arctg}\left(\dfrac{x}{y}\right)^2, & y \neq 0, \\ \frac{\pi}{2}\,x, & y = 0. \end{cases}$

Так как $f(x,0) = \frac{\pi}{2}\,x$ при всех $x$, а $f(0,y) = 0$ при всех $y$, то $\frac{\partial f}{\partial x}\,(0,0) = \frac{d}{dx}\,f(x,0)\Big|_{x=0} = \frac{\pi}{2}$, $\frac{\partial f}{\partial y}\,(0,0) = \frac{d}{dy}\,f(0,y)\Big|_{y=0} = 0$. Так как $f(0,0) = 0$, то нужно проверить, равен ли нулю предел

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \frac{f(\Delta x,\Delta y) - f(0,0) - \frac{\pi}{2}\,\Delta x}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} =$$

$$= \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \frac{(\Delta x + \Delta y)\operatorname{arctg}\left(\frac{\Delta x}{\Delta y}\right)^2 - \frac{\pi}{2}\,\Delta x}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}\,.$$

После перехода к полярным координатам последнее выражение принимает вид

$$\frac{(\rho\cos\varphi + \rho\sin\varphi)\operatorname{arctg}\left(\frac{\rho\cos\varphi}{\rho\sin\varphi}\right)^2 - \frac{\pi}{2}\,\rho\cos\varphi}{\sqrt{\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi}} =$$

$$= (\cos\varphi + \sin\varphi)\operatorname{arctg}(\operatorname{ctg}^2\varphi) - \frac{\pi}{2}\cos\varphi,$$

т.е. не зависит от $\rho$. Пределы по разным направлениям различны, двойной предел не существует, функция $f(x,y)$ не дифференцируема в точке $(0,0)$.

**Пример 3.27.** $f(x,y) = \begin{cases} \sqrt[3]{\dfrac{x^6+y^6}{|x|+y^2}}, & x^2+y^2>0,\\ 0, & x=y=0.\end{cases}$

Так как $f(x,0) = |x|^{5/3}$ при всех $x$, а $f(0,y) = y^{4/3}$ при всех $y$, то $\frac{\partial f}{\partial x}\,(0,0) = \frac{d}{dx}\,f(x,0)\Big|_{x=0} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}\,(0,0) = \frac{d}{dy}\,f(0,y)\Big|_{y=0} = 0$. Нужно проверить, равен ли нулю предел

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \frac{f(\Delta x,\Delta y) - f(0,0)}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} =$$

$$= \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \frac{\sqrt[3]{(\Delta x)^6 + (\Delta y)^6}}{\sqrt[3]{|\Delta x| + (\Delta y)^2}\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}\,.$$

Так как нас интересует поведение функции в некоторой окрестности точки $(0,0)$, то можно считать, что $|\Delta x| \leqslant 1$. Тогда $|\Delta x| \geqslant (\Delta x)^2$, и последнее выражение оценится сверху через

$$\frac{\sqrt[3]{(\Delta x)^6+(\Delta y)^6}}{\sqrt[3]{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}} \leqslant \frac{\sqrt[3]{2\rho^6}}{\rho^{2/3}\cdot\rho} = \sqrt[3]{2}\rho^{1/3}.$$

Итак, $\left|\dfrac{f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\right| \leqslant \sqrt[3]{2}\rho^{1/3}$, где $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$, и интересующий нас двойной предел равен 0. Функция $f(x,y)$ дифференцируема в точке $(0,0)$.

**Пример 3.28.** Найти все значения $\alpha$ и $A$, при которых функция $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+2y^2)^\alpha\sin\left(\frac{\pi}{3}-x+y\right), & x^2+y^2>0,\\ A, & x=y=0,\end{cases}$ дифференцируема в точке $(0,0)$, и при этих $\alpha$ и $A$ найти дифференциал $df(0,0)$.

Понятие бесконечно большой функции может быть введено для функций нескольких переменных аналогично одномерному случаю: $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{a}} f(\vec{x})=\infty$, если

$$\forall\, E>0 \quad \exists\,\delta>0: \quad \forall\,\vec{x}\in \mathring{U}_\delta(\vec{a}) \to |f(\vec{x})|>E.$$

Если функция $g(\vec{x})$ бесконечно малая при $\vec{x}\to\vec{a}$ и не обращается в нуль в некоторой проколотой окрестности $\vec{a}$, то $f(\vec{x})= =\dfrac{1}{g(\vec{x})}$ — бесконечно большая при $\vec{x}\to\vec{a}$.

Так как при $\alpha<0$ функция $(x^2+2y^2)^{-\alpha}$ является бесконечно малой при $x\to 0$, $y\to 0$, то $(x^2+2y^2)^\alpha$ — бесконечно большая. Так как $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\sin\left(\frac{\pi}{3}-x+y\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$, то $f(x,y)$ также является бесконечно большой при $x\to 0$, $y\to 0$ (аналогично одномерному случаю можно доказать, что если $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{a}} f_1(\vec{x})=\infty$, $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{a}} f_2(\vec{x})=C\neq 0$, то $\lim\limits_{\vec{x}\to\vec{a}} f_1(\vec{x})f_2(\vec{x})=\infty$). Значит, при $\alpha< <0$ функция $f(x,y)$ не является непрерывной и тем более не является дифференцируемой в точке $(0,0)$.

При $\alpha=0$ функция $f(x,y)=\sin\left(\frac{\pi}{3}-x+y\right)$. Единственным значением $A$, при котором $f(x,y)$ будет как непрерывной, так и дифференцируемой в точке $(0,0)$, является $A=\frac{\sqrt{3}}{2}$. При этом значении $A$ функция $f(x,y)$ будет, очевидно, даже непрерывно дифференцируемой в точке $(0,0)$, и $df(0,0)$ можно вычислить при помощи формального дифференцирования:

$$df(x,y)=\cos\left(\frac{\pi}{3}-x+y\right)(dy-dx);\quad df(0,0)=\frac{1}{2}\,(dy-dx).$$

Наконец, при $\alpha>0$ $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}} f(x,y)=0$. Поэтому $f(x,y)$ будет непрерывной в точке $(0,0)$ при $A=0$.

Для исследования дифференцируемости рассмотрим сначала функцию $g(x,y)=(x^2+2y^2)^\alpha$. Так как $g(x,0)=|x|^{2\alpha}$, то $\dfrac{\partial g}{\partial x}(0,0)=\dfrac{d}{dx}\,g(x,0)\Big|_{x=0}=\dfrac{d}{dx}\left(|x|^{2\alpha}\right)\Big|_{x=0}=\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{|\Delta x|^{2\alpha}}{\Delta x}$ — не существует при $0<\alpha\leqslant\frac12$. Значит, $g(x,y)$ не является дифференцируемой в точке $(0,0)$. Но если бы $f(x,y)$ была дифференцируемой в точке $(0,0)$, то и $g(x,y)=\dfrac{f(x,y)}{\sin\left(\frac{\pi}{3}-x+y\right)}$ была бы дифференцируемой в этой точке, а это не так. Значит, при $0<\alpha\leqslant\frac12$ функция $f(x,y)$ не дифференцируема в точке $(0,0)$.

При $\alpha>\frac12$ имеем: $\dfrac{\partial g}{\partial x}(0,0)=\dfrac{d}{dx}\,|x|^{2\alpha}\Big|_{x=0}=0$. Аналогично, $\dfrac{\partial g}{\partial y}(0,0)=\dfrac{d}{dy}\,g(0,y)\Big|_{y=0}=\dfrac{d}{dy}\left(2^\alpha|y|^{2\alpha}\right)\Big|_{y=0}=0$. Так как

$$\left|\frac{g(\Delta x,\Delta y)-g(0,0)}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\right|=\frac{((\Delta x)^2+2(\Delta y)^2)^\alpha}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\leqslant\frac{(3\rho^2)^\alpha}{\rho}=3^\alpha\rho^{2\alpha-1},$$

и последнее выражение стремится к нулю при $\rho\to+0$, то функция $g(x,y)$ дифференцируема в точке $(0,0)$, и $dg(0,0)=0$. Значит, при $\alpha>\frac12$ функция $f(x,y)$ дифференцируема в точке $(0,0)$ как произведение двух дифференцируемых функций, и

$$df(x,y)=$$
$$=dg(x,y)\sin\left(\frac{\pi}{3}-x+y\right)+g(x,y)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{3}-x+y\right)(dy-dx),$$
$$df(0,0)=dg(0,0)\cdot\sin\frac{\pi}{3}+g(0,0)\cdot\cos\frac{\pi}{3}\cdot(dy-dx)=0.$$

**Ответ.** $f(x,y)$ дифференцируема в точке $(0,0)$ при $\alpha = 0$, $A = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (в этом случае $df(0,0) = \frac{1}{2}(dy - dx)$) и при $\alpha > \frac{1}{2}$, $A = 0$ (в этом случае $df(0,0) = 0$).

Рассмотрим примеры, когда нужно исследовать дифференцируемость не в точке $(0,0)$, а в других точках плоскости.

**Пример 3.29.** Исследовать на дифференцируемость функцию $f(x,y) = \log_2(5 + |x-1|^{5/7} \cdot |y+2|^{1/3})$ в точке $(1,-2)$.

Рассмотрим сначала функцию $u(x,y) = |x-1|^{5/7}|y+2|^{1/3}$. Так как $u(x,-2) = 0$ при всех $x$, а $u(1,y) = 0$ при всех $y$, то

$$\frac{\partial u}{\partial x}(1,-2) = \frac{d}{dx}\, u(x,-2)\Big|_{x=1} = 0;$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}(1,-2) = \frac{d}{dy}\, u(1,y)\Big|_{y=-2} = 0.$$

Так как $u(1,-2) = 0$, то проверим, равен ли нулю предел

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{u(1+\Delta x, -2+\Delta y) - u(1,-2)}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{|\Delta x|^{5/7}|\Delta y|^{1/3}}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}.$$

После перехода к полярным координатам $\Delta x = \rho\cos\varphi$, $\Delta y = \rho\sin\varphi$, последнее выражение примет вид

$$\frac{\rho^{5/7}|\cos\varphi|^{5/7}\rho^{1/3}|\sin\varphi|^{1/3}}{\sqrt{\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi}} = \frac{\rho^{22/21}|\cos\varphi|^{5/7}|\sin\varphi|^{1/3}}{\rho} \leqslant \rho^{1/21}.$$

Последнее выражение стремится к нулю при $\rho \to +0$, значит, интересующий нас двойной предел равен 0, функция $u(x,y)$ дифференцируема в точке $(1,-2)$.

Внешняя функция одной переменной $g(u) = \log_2(5+u)$ дифференцируема в точке $u = 0$. По теореме о дифференцируемости сложной функции функция $f(x,y) = g(u(x,y))$ дифференцируема в точке $(1,-2)$.

**Пример 3.30.** Исследовать на дифференцируемость функцию $f(x,y) = (2x^2 - y^2 - 1)\sqrt{x^2 + y^2 - xy - x - y + 1}$ в точке $(1,1)$.

Отметим, что $f(1,1) = 0$. Далее,

$$f(1,y) = (1-y^2)\sqrt{y^2 - 2y + 1} = (1-y^2)|y-1| \quad \text{при всех} \quad y,$$

$f(x,1) = (2x^2-2)\sqrt{x^2-2x+1} = 2(x^2-1)|x-1|$ при всех $x$. Найдём частные производные функции $f(x,y)$ в точке $(1,1)$. Имеем: $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,1) = \dfrac{d}{dx} f(x,1)\Big|_{x=1} = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{2((1+\Delta x)^2-1)|\Delta x|}{\Delta x} =$ $= 2\lim\limits_{\Delta x\to 0}(2+\Delta x)|\Delta x| = 0$. Аналогично, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,1) = 0$.

Остаётся выяснить, равен ли нулю предел

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \frac{f(1+\Delta x, 1+\Delta y) - f(1,1)}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}} =$$

$$= \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} (2(1+\Delta x)^2 - (1+\Delta y)^2 - 1)\times$$

$$\times \frac{\sqrt{(1+\Delta x)^2 + (1+\Delta y)^2 - (1+\Delta x)(1+\Delta y) - 1 - \Delta x - \Delta y}}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}} =$$

$$= \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \frac{(4\Delta x - 2\Delta y + 2(\Delta x)^2 - (\Delta y)^2)\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 - \Delta x\Delta y}}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}.$$

После перехода к полярным координатам полученное выражение примет вид

$$\frac{(4\rho\cos\varphi - 2\rho\sin\varphi + 2\rho^2\cos^2\varphi - \rho^2\sin^2\varphi)\sqrt{\rho^2 - \rho^2\cos\varphi\sin\varphi}}{\rho} =$$

$$= \rho(4\cos\varphi - 2\sin\varphi + 2\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)\sqrt{1-\cos\varphi\sin\varphi},$$

и по модулю не превосходит $\rho(4+2+2+1)\sqrt{1+1} = 9\rho\sqrt{2}$. Это выражение стремится к нулю при $\rho \to +0$, значит, интересующий нас двойной предел равен 0. Следовательно, $f(x,y)$ дифференцируема в точке $(1,1)$.

**Пример 3.31.** Найти все точки дифференцируемости функции $f(x,y) = x|y| + y|x|$.

Это значит, что для каждой точки $(x_0, y_0)$ плоскости нужно определить, является ли данная функция дифференцируемой в этой точке.

а) В любой точке $(x_0, y_0)$, где $x_0 y_0 \neq 0$ (т.е. в любой точке, не лежащей на координатных осях) функция $f(x,y)$ является даже непрерывно дифференцируемой, так как в некоторой окрестности этой точки заведомо имеет непрерывные частные производные ($f(x,y)=2xy$ в I четверти, $f(x,y)=-2xy$ в III четверти, $f(x,y)=0$ во II и IV четвертях).

б) В точке $(0,0)$: $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\frac{d}{dx}f(x,0)\Big|_{x=0}=0$, аналогично $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$.

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\Delta x|\Delta y|+\Delta y|\Delta x|}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=0,$$

так как после перехода к полярным координатам последнее выражение принимает вид

$$\frac{\rho\cos\varphi|\rho\sin\varphi|+\rho\sin\varphi|\rho\cos\varphi|}{\rho}=\rho(\cos\varphi|\sin\varphi|+\sin\varphi|\cos\varphi|),$$

и по модулю не превосходит $2\rho$. Значит, $f(x,y)$ дифференцируема в точке $(0,0)$.

в) Докажем, наконец, что в точках, лежащих на координатных осях, кроме точки $(0,0)$, функция $f(x,y)$ не является дифференцируемой. Рассмотрим для определённости точку $(x_0,0)$, где $x_0\neq 0$. Имеем $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,0)=\frac{d}{dy}f(x_0,y)\Big|_{y=0}=$ $=\frac{d}{dy}(x_0|y|+|x_0|y)\Big|_{y=0}=x_0\frac{d}{dy}|y|\Big|_{y=0}+|x_0|$ — не существует, так как не существует $\frac{d}{dy}|y|\Big|_{y=0}$. Значит, $f(x,y)$ не является дифференцируемой в точке $(x_0,0)$.

**Упражнение 3.5.** Доказать, что функция $f(x,y)$ не является дифференцируемой в точке $(0,0)$:

а) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$;
б) $f(x,y)=\sqrt[5]{x^5-y^5}$;
в) $f(x,y)=\sin(2^{xy}+\sqrt[5]{x^3y^2})$;
г) $f(x,y)=\operatorname{arctg}(\sqrt{1-x^2-y^2}+\sqrt{|xy|})$.

**Упражнение 3.6.** Доказать, что функция $f(x,y)$ является дифференцируемой в точке $(0,0)$:

а) $f(x,y)=\sqrt{x^4+y^4}$;
б) $f(x,y)=\sqrt[3]{x^4-y^4}$;
в) $f(x,y)=\arcsin\left(\frac{x^2+y^2}{2}+\sqrt[7]{x^4y^4}\right)$;
г) $f(x,y)=\operatorname{ch}(5e^x-\ln(1+x^2-y^2)-\sqrt[8]{|x|^3y^6})$.

**Упражнение 3.7.** Исследовать на дифференцируемость в точке $(0,0)$ функции:

а) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{(x^3+y^3)^2}{x^4+y^4}, & x^2+y^2>0,\\ 0, & x=y=0;\end{cases}$

б) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^5+y^5}{x^4+x^2y^2+y^4}, & x^2+y^2>0,\\ 0, & x=y=0;\end{cases}$

в) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3y^2}{\sqrt{x^6+y^6}}, & x^2+y^2>0,\\ 0, & x=y=0;\end{cases}$

г) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3y^2}{(x^6+y^6)^{2/3}}, & x^2+y^2>0,\\ 0, & x=y=0;\end{cases}$

д) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3-xy^2}{\left(x^6+y^6-\frac{3}{2}\,x^3y^3\right)^{1/4}}, & x^2+y^2>0,\\ 0, & x=y=0;\end{cases}$

е) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{(y^2-xy)^2}{\left(x^8+y^8-\frac{4}{3}\,x^4y^4\right)^{1/3}}, & x^2+y^2>0,\\ 0, & x=y=0.\end{cases}$

**Упражнение 3.8.** Исследовать на дифференцируемость в точке $(0,0)$ функции:

а) $f(x,y)=e^{\sqrt[3]{xy}}-\sqrt[3]{xy}$;

б) $f(x,y)=\operatorname{sh}\sqrt[7]{xy}-\arcsin\sqrt[7]{xy}$;

в) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xe^y-ye^x+y-x+\frac{xy}{2}\,(x-y)}{(x^2+y^2)^{3/2}}, & x^2+y^2>0,\\ 0, & x=y=0;\end{cases}$

г) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xe^y-ye^x+y-x+\frac{xy}{2}\,(x-y)}{x^2+y^2}, & x^2+y^2>0,\\ 0, & x=y=0;\end{cases}$

д) $f(x,y)=\operatorname{ch}\sqrt[6]{|xy|}+\cos\sqrt[6]{|xy|}$;

е) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x\operatorname{arctg}y-y\operatorname{arctg}x+\frac{xy}{3}\,(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^{5/2}}, & x^2+y^2>0,\\ 0, & x=y=0.\end{cases}$

**Упражнение 3.9.** Исследовать на дифференцируемость в точке $(0,0)$ функции:

а) $f(x,y)=x^{4/5}(\cos(\sqrt[5]{y})-1)$;

б) $f(x,y) = y^{2/3}\operatorname{arctg}\sqrt{|x|}$;
в) $f(x,y) = y + \cos\sqrt[3]{x^2+y^2}$;
г) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{y}\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x^2+y^2}\,, & y \neq 0, \\ x, & y = 0; \end{cases}$
д) $f(x,y) = \sqrt[5]{\sin x(1-\cos xy)}$;
е) $f(x,y) = \begin{cases} y\sin\sqrt{\dfrac{x^2}{|y|}}, & y \neq 0, \\ 0, & y = 0. \end{cases}$

**Упражнение 3.10.** Найти все значения $\alpha$ и $A$, при которых функция

$$f(x,y) = \begin{cases} (3x^2+y^2)^\alpha \ln(2+x-3y). & x^2+y^2 > 0, \\ A, & x = y = 0, \end{cases}$$

дифференцируема в точке $(0,0)$, и при этих $\alpha$ и $A$ найти дифференциал $df(0,0)$.

**Упражнение 3.11.** Исследовать функцию $f(x,y)$ на дифференцируемость в данной точке:
а) $f(x,y) = \operatorname{arctg}(3+|x+3|^{2/5}|y-1|^{3/4})$ в точке $(-3,1)$;
б) $f(x,y) = \cos\left(\frac{\pi}{4} + \left|x-\frac{\pi}{2}\right|^{2/7}|y|^{4/5}\right)$ в точке $\left(\frac{\pi}{2}\,,0\right)$;
в) $f(x,y) = (xy+3)\sqrt{2x^2+y^2+xy-2x+3y+4}$ в точке $(1,-2)$;
г) $f(x,y) = (x^2+xy-4)\sqrt{x^2+y^2+xy-4x-2y+4}$ в точке $(2,0)$.

**Упражнение 3.12.** Найти все точки дифференцируемости функции:
а) $f(x,y) = |x^2-y^2|$;
б) $f(x,y) = \dfrac{1}{1+|xy|}$;
в) $f(x,y) = (y-|x|)^2$.

## Ответы к упражнениям

**2.1.** а) Разрывна в точке $(0,0)$, непрерывна в остальных точках; б) разрывна в точках $(0,y_0)$, где $y_0 \neq 0$, непрерывна в остальных точках; в) разрывна в точках $(x_0,x_0)$, где $x_0 \neq 0$, непрерывна в остальных точках; г) непрерывна в точке $(0,0)$, разрывна в остальных точках.

**3.3.** а) $2\,dx - 2\,dy$; б) $-\frac{\pi}{2}\,dx + \frac{\pi^2}{4}\,dy$; в) $dx + 2\sqrt{3}\,dy$.

**3.4.** а) $z = f(x^2+y^2)$; б) $z = xf\left(\frac{y}{x}\right)$; в) $\frac{\partial z}{\partial \xi} + \frac{\partial z}{\partial \eta} = e^{\xi}\operatorname{sh}\eta$; г) $\frac{\partial z}{\partial \xi} = \frac{\partial z}{\partial \eta}$; д) $(2\xi+\eta-z)\frac{\partial z}{\partial \xi} + (\xi+2\eta-z)\frac{\partial z}{\partial \eta} = \xi+\eta-z$.

В ответах к остальным упражнениям «да» означает, что функция дифференцируема в данной точке, «нет» — не дифференцируема.

**3.7.**

а) да; б) нет; в) да; г) нет;
д) да; е) да.

**3.8.**

а) да; б) да; в) да; г) нет;
д) да; е) нет.

**3.9.**

а) да; б) да; в) да; г) нет;
д) нет; е) да.

**3.10.** При $\alpha = 0$, $A = \ln 2$ (в этом случае $df(0,0) = \frac{dx - 3\,dy}{2}$); при $\alpha > \frac{1}{2}$, $A = 0$ (в этом случае $df(0,0) = 0$).

**3.11.**

а) да; б) да; в) нет; г) да.

**3.12.** а) дифференцируема в точках $(x,y)$ таких, что $y \neq \pm x$, а также в точке $(0,0)$. Не дифференцируема в остальных точках; б) дифференцируема в точках $(x,y)$ таких, что $xy \neq 0$, а также в точке $(0,0)$. Не дифференцируема в остальных точках; в) дифференцируема в любой точке.

## Список литературы

1. *Демидович Б.П.* Сборник задач и упражнений по математическому анализу. – М.: Наука, 1966 – 544 с.
2. *Кудрявцев Л.Д., Кутасов А.Д., Чехлов В.И., Шабунин М.И.* Сборник задач по математическому анализу. Функции нескольких переменных / Под ред. Л.Д. Кудрявцева. – СПб: Наука, 1994 – 496 с.