

Л. Д. Кудрявцев

РЕКОМЕНДУЕМЫЕ ВОПРОСЫ
по курсу
МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА
(II курс, II семестр)

Составитель: Л.Д.Кудрявцев
УДК 517

Рекомендуемые вопросы по курсу математического анализа (II курс, II семестр) / МФТИ. М., 2003. 26 с.

© Московский физико-технический институт
(государственный университет), 2003.

ЛЕКЦИЯ 1. Тригонометрические ряды Фурье.

1. Что называется рядом Фурье? Для каких функций имеет смысл говорить об их ряде Фурье?
2. Что характеризует ряды Фурье четных (нечетных) функций?
3. В чем состоит свойство ортогональности тригонометрических функций?
4. Найти коэффициенты равномерно сходящегося тригонометрического ряда с помощью его суммы.
5. Являются ли тригонометрические ряды $\sum_1^{\infty} \frac{\sin nx}{n^\alpha}$, $\sum_1^{\infty} \frac{\cos nx}{n^\alpha}$, при $\alpha = 2$, $\alpha = 3$, вообще при $\alpha > 1$ рядами Фурье?
6. Будут ли ряды Фурье функций $f_1(x) = x$ для $\forall x \in [-\pi, \pi]$ и

$$f_2(x) = \begin{cases} x & \text{для } x \in [-\pi, 0) \cup (0, \pi], \\ 1 & \text{для } x = 0, \end{cases}$$

одинаковыми или нет?

7. Какая функция называется финитной?
8. Что называется характеристической функцией множества?
9. Какая функция называется ступенчатой?
10. Будет ли линейная комбинация финитных функций финитной?
11. Будет ли произведение финитных функций финитной функцией?
12. Будет ли линейная комбинация ступенчатых функций ступенчатой функцией?
13. Какая функция называется абсолютно интегрируемой?
14. Будет ли произведение абсолютно интегрируемых функций абсолютно интегрируемой функцией?
15. Доказать абсолютную интегрируемость на отрезке произведения абсолютно интегрируемой функции на функцию, интегрируемую по Риману.
16. Можно ли сколь угодно точно приблизить в среднем абсолютно интегрируемую на интервале функцию ступенчатой функцией?

17. Как ведут себя коэффициенты Фурье абсолютно интегрируемой функции, когда их номер стремится к бесконечности?
18. Чему равны пределы

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \cos \lambda x dx, \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \sin \lambda x dx$$

для абсолютно интегрируемой на интервале (a, b) функции f ?

19. Доказать, что всякая непрерывная на отрезке функция является пределом равномерно сходящейся последовательности ступенчатых функций.

ЛЕКЦИЯ 2.

1. Что называется ядром Дирихле? Каковы его свойства?
2. Доказать, что интеграл от периодической функции по отрезку, длина которого равна периоду, не зависит от выбора этого отрезка.
3. Написать интегральные представления частных сумм ряда Фурье с помощью ядра Дирихле через интегралы по отрезкам $[-\pi, \pi]$ и $[0, \pi]$.
4. Написать асимптотическое интегральное представление частной суммы ряда Фурье в данной точке с помощью интеграла по окрестности этой точки.
5. В чем состоит принцип локализации для рядов Фурье?
6. Сформулировать признак Дини сходимости ряда Фурье.
7. Привести пример ряда Фурье функции, сумма которого в некоторой точке не равна значению функции в этой точке.
8. Каковы достаточные условия сходимости ряда Фурье в данной точке в терминах односторонних производных?
9. К чему и при каких условиях сходится ряд Фурье данной функции в точках ее разрыва первого рода?
10. Сходится ли, а если сходится, то к чему, ряд Фурье абсолютно интегрируемой на отрезке $[-\pi, \pi]$ функции в точках ее дифференцируемости?

11. В случае абсолютной интегрируемости функции f на отрезке $[0, \pi]$ доказать равносходимость интегралов

$$\int_0^\pi \frac{|f(t)|}{t} dt \text{ и } \int_0^\pi \frac{|f(t)|}{\sin(t/2)} dt.$$

12. Доказать сходимость интеграла

$$\int_0^\pi \frac{|f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)|}{t} dt,$$

если f — 2π -периодическая функция, абсолютно интегрируемая на периоде, а x — точка, в которой функция f имеет односторонние производные и непрерывна.

13. Построить график суммы ряда Фурье функции $f(x) = x$, $-\pi \leq x \leq \pi$.
14. Построить график суммы ряда Фурье функции $f(x) = x^2$, $f(x) = x^3$, $f(x) = \operatorname{sh} x$, $-\pi \leq x \leq \pi$. Будет ли этот ряд Фурье сходиться равномерно на отрезке $[-\pi, \pi]$?
15. Сходится ли ряд Фурье кусочно дифференцируемой функции в каждой точке?
16. Чему равна сумма ряда Фурье кусочно дифференцируемой функции?

ЛЕКЦИЯ 3.

1. Что называется суммированием ряда методом средних арифметических?
2. К чему суммируется сходящийся ряд методом средних арифметических?
3. Привести пример расходящегося ряда, суммируемого методом средних арифметических.
4. Что называется ядром Фейера?

5. Каким свойством обладает ядро Фейера? Какие свойства ядра Фейера, отсутствующие у ядра Дирихле, позволяют доказать теорему о суммируемости рядов Фурье непрерывных периодических функций методом средних арифметических?
6. Каково поведение ядра Фейера на отрезке $[-\pi, \pi]$ вне окрестности нуля, когда его номер стремится к бесконечности?
7. Что называется суммой Фейера порядка n для данной функции?
8. Каково интегральное представление суммы Фейера с помощью ядра Фейера?
9. Чему равен предел сумм Фейера непрерывной 2π -периодической функции?
10. Чему равна сумма сходящегося в данной точке ряда Фурье непрерывной 2π -периодической функции?
11. Доказать равномерную непрерывность на всей числовой прямой для периодической непрерывной функции.
12. Доказать, что четное продолжение функции, непрерывной на отрезке $[0, a]$, непрерывно на отрезке $[-a, a]$.
13. Можно ли равномерно на всей числовой прямой с любой точностью приблизить непрерывную 2π -периодическую функцию тригонометрическим многочленом?
14. Можно ли равномерно на отрезке $[-\pi, \pi]$ с любой точностью приблизить непрерывную на этом отрезке функцию тригонометрическим многочленом?
15. В чем состоит теорема Вейерштрасса о приближении непрерывной на отрезке функции тригонометрическими многочленами?
16. В чем состоит теорема Вейерштрасса о приближении непрерывной на отрезке функции алгебраическими многочленами?
17. Является ли тригонометрический многочлен аналитической функцией на числовой прямой?
18. Сформулировать необходимое и достаточное условие непре-

ривности функции на отрезке в терминах ее равномерных приближений алгебраическими многочленами.

19. Сформулировать необходимое и достаточное условие непрерывности функции на отрезке в терминах разложения функции в ряд многочленов. Почему отсюда не следует разложение любой непрерывной функции в степенной ряд?

ЛЕКЦИЯ 4. Функциональные пространства

1. Что такое арифметическое n -мерное евклидово пространство \mathbb{R}^n ?
2. Что такое метрическое пространство? Что такое метрика?
3. Как записывается неравенство четырехугольника в метрическом пространстве?
4. Будет ли метрикой

$$\rho(f, g) = \sup_{x \in E} |f(x) - g(x)|$$

на множестве $B(E)$ функций, ограниченных на некотором множестве E ? Как называется последовательность функций f_n , сходящаяся к функции f , в смысле $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(f_n, f) = 0$?

5. Привести пример интегральной метрики.
6. Что называется ε -окрестностью точки метрического пространства?
7. Что является ε -окрестностью точки на прямой, на плоскости, в трехмерном пространстве?
8. Что такое предел последовательности точек в метрическом пространстве?
9. Какая последовательность называется сходящейся в метрическом пространстве?
10. Какая последовательность называется фундаментальной?
11. Какая связь между понятием сходящейся и фундаментальной последовательности?

12. Что называется полным метрическим пространством?
13. Привести пример полного (неполного) метрического пространства.
14. Будет ли пространство \mathbb{R}^n полным?
15. Будет ли пространство $B(E)$ ограниченных функций полным? (E — произвольное множество.)
16. Будет ли полным подпространство $C(E)$ непрерывных функций пространства $B(E)$, $E \subset \mathbb{R}^n$?
17. В чем состоит критерий Коши сходимости последовательности точек метрического полного пространства?
18. Какое отображение называется изометрическим?
19. Какие метрические пространства называются изометрическими?
20. Какое множество метрического пространства называется открытым?
21. Будет ли ε -окрестность точки открытым множеством?
22. Привести пример открытого (неоткрытого) множества?
23. Что называется окрестностью точки в метрическом пространстве?
24. Будет ли открытым пересечение конечной (бесконечной) совокупности открытых множеств?
25. Будет ли открытым объединение конечной (бесконечной) совокупности открытых множеств?
26. Что называется точкой прикосновения множества в метрическом пространстве?
27. Что называется предельной точкой множества?
28. Какая точка множества называется изолированной?
29. Какое множество называется замкнутым?
30. Привести пример замкнутого (незамкнутого) множества.
31. Будет ли конечное множество замкнуто?
32. Будет ли дополнение замкнутого (открытого) множества открытым (замкнутым)?

33. Будет ли замкнутым пересечение конечной (бесконечной) совокупности замкнутых множеств?
34. Будет ли замкнутым объединение конечной (бесконечной) совокупности замкнутых множеств?
35. Что называется замыканием множества?
36. Какое множество называется плотным в данном метрическом пространстве?
37. Что называется пополнением метрического пространства?
38. Что является пополнением метрического пространства рациональных чисел с естественной метрикой?
39. Если последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ точек метрического пространства \mathbb{R} называются эквивалентными при условии, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, y_n) = 0$, то как можно определить метрику в множестве \mathbb{R}^* эквивалентных фундаментальных последовательностей так, чтобы пространство \mathbb{R} изометрически отображалось в \mathbb{R}^* ?
40. Если \mathbb{R}^* — множество эквивалентных фундаментальных последовательностей метрического пространства R (см. п.39),
 $x^* \in \mathbb{R}^*$, $y^* \in \mathbb{R}^*$, $\{x_n\} \in x^*$, $\{y_n\} \in y^*$

и

$$\rho^*(x^*, y^*) \stackrel{def}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, y_n),$$

то будет ли функция ρ^* метрикой в множество \mathbb{R}^* ?

41. Будет ли метрическое пространство \mathbb{R} изометрически отображаться в пространстве \mathbb{R}^* (см. п.40)?
42. Будет ли метрическое пространство \mathbb{R} , отождествленное со своим изометрическим образом в \mathbb{R}^* , плотным в пространстве \mathbb{R}^* ?
43. Будет ли метрическое пространство \mathbb{R}^* полным?
44. Можно ли пополнить любое метрическое пространство?
45. Если $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}^*$ (см. п.42), $\{x_n\} \in x^* \in \mathbb{R}^*$, то чему равен предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho^*(x_n, x)$?

ЛЕКЦИЯ 5.

1. Что называется линейным пространством?
2. Приведите пример конечномерного и бесконечномерного линейного пространства.
3. Что называется нормой (полунормой) в линейном пространстве?
4. Приведите пример нормированного и полунормированного пространства.
5. Как определяется нормированное (полунормированное) пространство $B(X)$? $C(X)$? $RL_1(a, b)$?
6. Будут ли выражения

$$\sup_{a \leq t \leq b} |f^{(n)}(t)|, \quad \int_a^b |f^{(n)}(t)| dt$$

нормой? Полунормой? Для каких функций? Для каких n ?

7. Доказать: если функция непрерывна и неотрицательна на отрезке, и интеграл от нее по этому отрезку равен нулю, то она равна нулю во всех точках рассматриваемого отрезка.
8. Что называется последовательностью, сходящейся по норме? По полунорме?
9. Будет ли единственным предел последовательности, сходящейся по норме (по полунорме)?
10. Будет ли ограниченной по норме (по полунорме) сходящаяся по этой норме (полунорме) последовательность?
11. Какая функция называется непрерывной по норме (по полунорме)?
12. Будет ли норма (полунорма) непрерывной функцией?
13. Какое множество называется плотным в нормированном (полунормированном) пространстве?
14. Какая система элементов нормированного (полунормированного) пространства называется полной?
15. Какой ряд называется сходящимся в нормированном (полунормированном) пространстве?

16. Будет ли нормированное (полунормированное) пространство метрическим? Если да, то с какой метрикой?
17. Какое пространство называется банаховым?
18. Можно ли всякое линейное нормированное пространство пополнить до банахова пространства? Если можно, то каким образом?
19. Что называется линейной оболочкой данной системы элементов линейного пространства?
20. Какая система называется базисом линейного нормированного пространства?
21. Всякий ли базис линейного нормированного пространства является полной системой? Верно ли обратное в случае счетной системы?
22. Какая последовательность функций называется сходящейся в среднем? В смысле среднего квадратического?
23. В каком функциональном пространстве сходимость по норме равносильна равномерной сходимости?
24. Что называется скалярным произведением в линейном пространстве?
25. Будет ли выражение $(f, g) = \int_a^b f(t)g(t)dt$ скалярным (почти скалярным) произведением? Для каких функций?
26. Напишите неравенство Коши–Буняковского. Справедливо ли оно для почти скалярного произведения или только для скалярного?
27. Будет ли линейное пространство со скалярным (почти скалярным) произведением нормированным (полунормированным)? Если да, то с какой нормой (полунормой)? Будет ли оно метрическим? Если да, то с какой метрикой?
28. Как определяются пространства $RL_2[a, b]$ и $CL_2[a, b]$?
29. Докажите неравенства:

$$\|f\|_{RL_2[a,b]} \leq \sqrt{b-a} \|f\|_{B[a,b]},$$

$$\|f\|_{RL_1[a,b]} \leq (b-a) \|f\|_{B[a,b]},$$

$$\|f\|_{RL_1[a,b]} \leq \sqrt{b-a} \|f\|_{RL_2[a,b]}.$$

30. Будет ли равномерно сходящаяся на отрезке последовательность непрерывных функций сходиться на этом отрезке в среднем (в смысле среднего квадратичного)?
31. Будет ли сходящаяся на отрезке в смысле среднего квадратичного последовательность функций с интегрируемым квадратом на этом отрезке сходиться на нем в среднем?
32. Следует ли из равномерной сходимости на конечном (бесконечном) промежутке последовательности непрерывных функций ее сходимости на этом промежутке в среднем? В смысле среднего квадратичного?
33. Следует ли из равномерной сходимости на конечном (бесконечном) промежутке последовательности абсолютно интегрируемых функций ее сходимости в среднем?
34. Постройте пример последовательности неотрицательных непрерывных на отрезке функций, сходящейся, но неравномерно к функции, тождественно равной нулю на этом отрезке.
35. Постройте пример последовательности неотрицательных непрерывных на отрезке функций, сходящейся на этом отрезке в среднем (в смысле среднего квадратичного), но не сходящейся равномерно.
- 36*. Построить пример последовательности неотрицательных непрерывных на отрезке функций, сходящейся на нем в среднем, но не сходящейся в смысле среднего квадратичного.
- 37*. Построить пример последовательности непрерывных неотрицательных на отрезке функций, сходящейся в среднем, но не сходящейся ни в одной точке.
36. Будет ли почти скалярное (скалярное) произведение непрерывной функцией относительно порожденной им полунормы (нормы)?
37. Можно ли почленно интегрировать на отрезке ряд интегрируемых в квадрате на этом отрезке функций, сходящийся на нем в смысле среднего квадратичного к функции с интегрируемым квадратом?

38. Какое пространство называется гильбертовым? Предгильбертовым?
39. Можно ли любое линейное пространство со скалярным произведением пополнить до гильбертова? Если да, то как?

ЛЕКЦИЯ 6.

1. Какими свойствами обладает понятие эквивалентности элементов?
2. При заданном в множестве соотношении эквивалентности его элементов, что называется фактор-множеством?
3. Что называется фактор-пространством линейного пространства по его подпространству? Как определяются линейные операции над элементами этого фактор-пространства?
4. Будет ли фактор-пространство линейного пространства по его подпространству линейным пространством?
5. Будет ли фактор-пространство полунормированного пространства по его подпространству элементов с нулевой полунормой являться нормированным пространством?
6. Будет ли фактор-пространство пространства с почти скалярным произведением по его подпространству элементов с нулевым почти скалярным квадратом являться пространством со скалярным произведением?
7. Является ли пространство $CL_2[a, b]$ полным?
8. Укажите фундаментальную, но не сходящуюся последовательность в пространстве $CL_2[a, b]$.
9. Будет ли множество ступенчатых функций плотно в пространстве $RL_2(a, b)$, $-\infty \leq a < b \leq +\infty$?
10. Укажите конструкцию ступенчатой функции, приближающей в пространстве $RL_2(a, b)$ заданную функцию этого пространства с точностью до $\varepsilon > 0$.
11. Будет ли множество непрерывных функций плотно в пространстве $RL_2[a, b]$? Будет ли плотно в этом пространстве мно-

жество непрерывных функций, обращающихся в ноль на концах отрезка $[a, b]$? Непрерывных финитных на интервале (a, b) функций?

12. Укажите конструкцию непрерывной функции, обращающейся в ноль на концах отрезка $[a, b]$ и приближающей в пространстве $RL_2[a, b]$ заданную функцию этого пространства с точностью до заданного $\varepsilon > 0$.
13. Что такое пространство $L_2(a, b)$, $-\infty \leq a < b \leq +\infty$?
14. Будет ли плотно в пространстве $L_2[a, b]$ множество непрерывных функций? Множество непрерывных функций, обращающихся в ноль на концах отрезка $[a, b]$?
15. Какие функции называются эквивалентными в пространстве $RL_2(a, b)$?
16. Могут ли существовать в классе эквивалентных функций две разные непрерывные функции?
17. Доказать, что множество непрерывных функций f , таких, что $\text{supp } f \subset (a, b)$, плотно в пространстве $RL_2[a, b]$.
18. Является ли пространство $L_2(a, b)$ пополнением множества непрерывных финитных на интервале (a, b) функций, $-\infty \leq a < b \leq +\infty$?
19. Что называется пространством $L_1(a, b)$, $-\infty \leq a < b \leq +\infty$?
20. Будет ли множество непрерывных финитных на интервале (a, b) функций плотно в пространстве $L_1(a, b)$?

ЛЕКЦИЯ 7.

1. Какие системы элементов линейных пространств называются линейно независимыми?
2. Какие системы элементов предгильбертова пространства называются ортогональными? Ортонормированными?
3. Может ли ортонормированная система быть линейно зависимой?
4. Будет ли система неотрицательных целых степеней линейно независимой на данном промежутке?

5. Будет ли система функций $1, \cos x, \sin x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots$ линейно зависима?
6. Какие многочлены называются многочленами Лежандра?
7. Будет ли система многочленов Лежандра линейно зависимой или линейно независимой?
8. Чему равно скалярное произведение многочлена Лежандра с многочленом меньшей степени?
9. Можно ли любой многочлен представить в виде линейной комбинации многочленов Лежандра?
10. Если некоторый многочлен степени n представлен в виде линейной комбинации многочленов Лежандра, то чему равны коэффициенты разложения при многочленах Лежандра степени $m > n$?
11. Какая имеется связь между многочленами Лежандра и ортонормированной системой многочленов, полученной стандартным процессом ортогонализации из системы неотрицательных целых степеней $1, x, x^2, \dots, x^n, \dots$ на отрезке $[-1, 1]$?
12. Будет ли полной система элементов предгильбертова пространства, получающаяся из полной системы стандартным процессом ортогонализации?
13. Что называется вложением одного полунормированного пространства в другое?
14. Если система элементов некоторого пространства R_1 , вложенного и плотного в пространстве R_2 , полна в R_1 , то будет ли она полна в R_2 ?
15. Если система элементов полна в некотором подмножестве R_1 , плотном в пространстве R_2 , будет ли она полна в R_2 ?
16. Будет ли система $1, x, x^2, \dots, x^n, \dots$ полна в пространстве $C[a, b]$? в $RL_1[a, b]$? в $RL_2[a, b]$? в $L_2[a, b]$?
17. Будет ли система полиномов Лежандра полна в пространстве $C[a, b]$? в $RL_1[a, b]$? в $RL_2[a, b]$? в $L_2[a, b]$?
18. Будет ли тригонометрическая система полна в пространстве $C[-\pi, \pi]$? в $C^*[-\pi, \pi]$? в $L_2[-\pi, \pi]$?

19. В чем состоит задача наилучшего приближения элемента предгильбертова пространства с помощью элементов некоторого его конечномерного подпространства? Всегда ли существует ее решение? Единственно ли оно?
20. Что называется коэффициентами Фурье элемента предгильбертова пространства по заданной ортогональной системе элементов?
21. Что называется рядом Фурье элемента предгильбертова пространства по заданной ортогональной системе элементов?
22. В чем состоит минимальное свойство частичных сумм ряда Фурье?
23. Какой из тригонометрических многочленов степени n наилучшим образом приближает абсолютно интегрируемую в квадрате функцию в смысле среднего квадратичного?
24. Как выражается наилучшее приближение элемента предгильбертова пространства линейными комбинациями ортогональной системы через норму элемента и его коэффициенты Фурье?
25. Как записывается неравенство Бесселя для ортогональной системы предгильбертова пространства?

ЛЕКЦИЯ 8.

1. Сходится ли ряд Фурье (по заданной ортогональной системе элементов) любого элемента гильбертова пространства?
2. Чему равно скалярное произведение разности суммы ряда Фурье (по заданной ортогональной системе гильбертова пространства) некоторого элемента и самого этого элемента с каждым элементом данной ортогональной системы?
3. Что такое равенство Парсеваля в предгильбертовом пространстве?
4. Какая связь имеется между сходимостью ряда Фурье (по некоторой ортогональной системе предгильбертова пространства) некоторого элемента к самому элементу и равенством Парсеваля для этого элемента?

5. Какая существует связь в предгильбертовом пространстве между сходимостью ряда Фурье по заданной ортогональной системе любого элемента пространства и полнотой указанной системы?
6. Какая существует связь в предгильбертовом пространстве между полнотой ортогональной системы и выполнением равенства Парсеваля по этой системе для любого элемента?
7. Будет ли единственным разложение элемента предгильбертова пространства по элементам ортогональной системы ненулевых элементов?
8. Что можно сказать об элементе предгильбертова пространства, у которого все коэффициенты Фурье по некоторой полной ортогональной системе равны нулю?
9. Что можно сказать о двух элементах предгильбертова пространства, у которых все коэффициенты Фурье по некоторой полной ортогональной системе, имеющие одинаковые номера, равны между собой?
10. Является ли в любом гильбертовом пространстве рядом Фурье некоторого элемента этого пространства ряд, членами которого являются элементы ортогональной последовательности с коэффициентами, сумма квадратов которых образует сходящийся ряд? Что можно сказать в случае гильбертова пространства?
11. Какая система элементов предгильбертова пространства называется замкнутой?
12. Какая существует связь в гильбертовом пространстве между замкнутыми и полными ортогональными системами?
13. Будет ли тригонометрический ряд Фурье любой функции с интегрируемым на $[-\pi, \pi]$ квадратом сходиться к самой функции в смысле среднего квадратичного?
14. Что называется равенством Парсеваля по тригонометрической системе? Будет ли оно верно для функции с интегрируемым квадратом? Для непрерывной функции?

15. Что можно сказать о функции с интегрируемым квадратом, все коэффициенты Фурье которой по тригонометрической системе равны нулю? Что можно сказать в этом же случае о непрерывной функции?
16. Будет ли ряд Фурье по многочленам Лежандра любой функции с интегрируемым на отрезке $[-1, 1]$ квадратом сходиться в смысле среднего квадратичного к самой функции?
17. Что можно сказать о функциях с интегрируемым на $[-1, 1]$ квадратом, у которых равны соответствующие коэффициенты Фурье по многочленам Лежандра? Что можно сказать о функциях, если дополнительно предположить их непрерывность на отрезке $[-1, 1]$?
18. Будет ли тригонометрическая система функций полной в пространстве $L_2[-\pi, \pi]$, если из нее исключить $\sin 2x$?

ЛЕКЦИЯ 9. Тригонометрические ряды Фурье (продолжение)

1. Будет ли равномерно сходящийся тригонометрический ряд рядом Фурье своей суммы?
2. Будет ли тригонометрический ряд, сходящийся в смысле среднего квадратичного к функции с интегрируемым квадратом, рядом Фурье своей суммы?
3. Будет ли ряд, полученный почленным дифференцированием ряда Фурье непрерывной кусочно гладкой периодической функции, рядом Фурье производной исходной функции?
4. Как оценивается порядок убывания коэффициентов Фурье периодической функции, которая имеет $k - 1$ непрерывных производных и кусочно непрерывную производную порядка $k (k \geq 1)$?
5. Как оценивается скорость сходимости ряда Фурье периодической функции, которая имеет $k - 1$ непрерывных производных и кусочно непрерывную производную порядка $k (k \geq 1)$?
6. Будет ли ряд Фурье функции $f(x) = |x|$, $|x| \leq \pi$, сходиться равномерно? Будет ли равномерно сходиться ряд, полученный почленным дифференцированием ряда Фурье функции $f(x)$?

7. Будет ли равномерно сходиться ряд Фурье непрерывной 2π -периодической функции с кусочно непрерывной производной?
8. Будет ли для функции $f(x) = |x|$, $|x| \leq \pi$, справедлива равномерная оценка $f(x) - S_n(x; f) = o(n^{-1/2})$?
9. Будет ли равномерно сходиться ряд Фурье функции, график которой представляет собой 2π -периодическую конечнозвенную на периоде ломаную? Чему будет равна сумма ряда?
10. Какой вид имеют формулы для коэффициентов ряда Фурье, заданного в комплексной записи?

ЛЕКЦИЯ 10. Интегралы, зависящие от параметра

1. Как определяется равномерная сходимость семейства функций при стремлении параметра семейства к некоторому значению?
2. Какова связь равномерной сходимости семейства функций при стремлении параметра семейства к некоторому значению с равномерной сходимостью последовательностей функций семейства, соответствующих последовательностям значений параметра, сходящимся к указанному значению?
3. Каковы необходимые и достаточные условия равномерной сходимости семейства функций при стремлении параметра к некоторому значению в терминах существования предела у соответствующей вспомогательной функции одного переменного?
4. В чем состоит критерий Коши равномерной сходимости семейства функций, когда параметр семейства стремится к некоторому значению?
5. Какого вида интегралы называются интегралами, зависящими от параметра?
6. Каким образом можно свести интеграл, зависящий от параметра, с переменными пределами интегрирования к интегралу, зависящему от параметра, с постоянными пределами интегрирования?

7. Каковы достаточные условия непрерывности собственного интеграла, зависящего от параметра, с переменными пределами интегрирования?
8. Каковы условия возможности предельного перехода под знаком собственного интеграла, зависящего от параметра, с постоянными пределами интегрирования в терминах равномерной сходимости семейства подынтегральных функций, зависящих от параметра?
9. Какое имеется правило для интегрирования собственных интегралов, зависящих от параметра, с постоянными пределами интегрирования от непрерывных функций?
10. Как записывается формула Лейбница для производных от интегралов, зависящих от параметра, с постоянными пределами? Каковы достаточные условия в случае собственного интеграла для подынтегральной функции, при которых справедлива формула Лейбница?
11. Какова формула для дифференцирования интеграла, зависящего от параметра, с переменными пределами интегрирования? Укажите достаточные условия, при которых она справедлива.
12. Какой интеграл называется сходящимся на данном множестве? Равномерно сходящимся на этом множестве?
13. Равномерной сходимости по параметру какого семейства функций равносильно понятие равномерной сходимости интеграла?
14. Как сформулировать необходимое и достаточное условие равномерной сходимости интеграла в терминах существования нулевого предела соответствующей вспомогательной функции одного переменного?
15. Как формулируется критерий Коши равномерной сходимости интегралов?
16. Какие существуют связи между понятием равномерной сходимости интегралов и равномерной сходимостью соответствующих рядов?

17. Как формулируется признак Вейерштрасса равномерной сходимости интегралов?
18. Сходится ли равномерно на всей числовой прямой интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + y^2 + 1}?$$

19. Где сходятся и где равномерно сходятся интегралы:

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2 + y^2}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + y^2},$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-y)^2} dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1 + (x - y)^2}?$$

20. Где сходится и где равномерно сходитя интеграл

$$\int_0^{+\infty} ye^{-xy} dx?$$

21. Чему равен предел

$$\lim_{y \rightarrow 0} \int_0^1 \sqrt{\cos xy} dx?$$

22. Чему равен предел

$$\lim_{y \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos xy}{1 + x^2 + y^2} dx?$$

23. Чему равна производная

$$\frac{d}{dt} \int_0^{\pi/2} \ln(t^2 - \cos^2 x) dx, \quad t > 1?$$

ЛЕКЦИЯ 11.

1. Каковы достаточные условия непрерывности по параметру несобственного интеграла?

2. Каково правило интегрирования несобственного интеграла по параметру? Какие Вы знаете достаточные условия, при которых справедливо это правило?
3. Каковы достаточные условия справедливости правила Лейбница для несобственных интегралов, зависящих от параметра?
4. Как определяются гамма-функция $\Gamma(s)$ и бэ́та-функция $B(p, q)$ Эйлера? Для каких значений параметров они определены?
5. Будет ли функция $\Gamma(s)$ непрерывна при $s > 0$?
6. Будет ли функция $B(p, q)$ непрерывна при $p > 0, q > 0$?
7. Будет ли функция $\Gamma(s)$ дифференцируема при $s > 0$?
8. Будет ли функция $B(p, q)$ дифференцируема при $p > 0$ и $q > 0$?

Преобразование Фурье

1. Как определяется интеграл Фурье заданной функции?
2. Что известно о плотности непрерывных финитных на конечном или бесконечном интервале (a, b) функций в пространстве $RL_1(a, b)$?
3. Какие Вы знаете достаточные условия для того, чтобы в интеграле

$$\int_c^d dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x, y)dx$$

можно было изменить порядок интегрирования?

4. Каковы достаточные условия, которым должна удовлетворять функция для того, чтобы она была представима своим интегралом Фурье в данной точке? На всей оси?
5. Как видоизменяется интеграл Фурье для четной функции? Для нечетной функции? Для функции, определенной на положительной полуоси? Чему они равны и при каких условиях на функцию?
6. Как определяется интеграл в смысле главного значения?
7. Чему равен интеграл в смысле главного значения по всей числовой оси от нечетной функции, интегрируемой (в собственном или несобственном смысле) на любом конечном отрезке?

8. Как определяется производная и интеграл от комплекснозначной функции действительного аргумента?
9. Как записывается интеграл Фурье в комплексной форме?
10. Как определяются преобразование Фурье и обратное преобразование Фурье?
11. Определено ли прямое и обратное преобразование Фурье для любой абсолютно интегрируемой функции?
12. На каком классе функций прямое и обратное преобразования Фурье являются взаимно обратными?

ЛЕКЦИЯ 12.

1. Является ли преобразование Фурье (обратное преобразование Фурье) линейным?
2. Будет ли ограниченной функция, являющаяся преобразованием Фурье абсолютно интегрируемой на числовой прямой функции? Как оценивается абсолютная величина значений функции, являющейся преобразованием Фурье абсолютно интегрируемой на числовой прямой функции, посредством этой функции?
3. Как сходится последовательность функций, являющихся преобразованием Фурье последовательности функций, сходящейся в среднем к некоторой абсолютно интегрируемой функции?
4. Будет ли непрерывной функцией образ Фурье абсолютно интегрируемой функции?
5. Чему равен предел преобразования Фурье абсолютно интегрируемой функции при стремлении аргумента к бесконечности?
6. Как получается преобразование Фурье производной из преобразования Фурье самой функции, если эта функция вместе со своей производной абсолютно интегрируема и непрерывна на числовой прямой?
7. Какова оценка сверху порядка стремления к нулю на бесконечности преобразования Фурье функции, абсолютно интегри-

руемой и непрерывной на числовой прямой вместе со своими производными до порядка n включительно?

8. Доказать, что для образа Фурье $\widehat{f}(y)$ функции $f(x) = \frac{1}{1+|x|^3}$ при $y \rightarrow \pm\infty$ справедлива оценка $\widehat{f}(y) = o(y^{-3})$.
9. Каковы достаточные условия существования n производных на всей числовой прямой у преобразования Фурье данной функции?
10. Доказать, что преобразование Фурье функции $f(x) = \frac{1}{1+x^4}$ дважды дифференцируемо на всей числовой прямой.
11. Доказать, что преобразование Фурье функции $f(x) = x^2 e^{-|x|}$ бесконечно дифференцируемо на всей числовой прямой.
12. Найти в явном виде образ Фурье характеристической функции полуинтервала.
13. Как выражается производная образа Фурье функции $f(x)$ через образ Фурье произведения $xf(x)$ в предположении абсолютной интегрируемости и непрерывности этого произведения на числовой оси?

ЛЕКЦИЯ 13. Обобщенные функции

1. Что называется пространством D основных функций?
2. Являются ли сложение и умножение на скаляр непрерывными операциями в D ?
3. Что называется обобщенной функцией над пространством основных функций D ?
4. Как определяется сходимость последовательности в пространстве D' обобщенных функций?
5. Являются ли сложение и умножение на скаляр непрерывными операциями в D' ?
6. Почему локально интегрируемые функции можно рассматривать как обобщенные функции из пространства D' ?
7. Чему равны $\lim_{\eta \rightarrow \infty} \sin \eta t$, $\lim_{\eta \rightarrow \infty} \frac{\sin \eta t}{t}$ в D' ?

8. Какая обобщенная функция не порождается никакой локально интегрируемой функцией?
9. Что такое дельта-функция?
10. Как определяется производная обобщенной функции? Является ли производная обобщенной функции из D' также обобщенной функцией из D' ?
11. Почему обычную производную непрерывно дифференцируемой на всей числовой оси функции f можно рассматривать как производную обобщенной функции, порожденной данной функцией f ?
12. Является ли операция дифференцирования непрерывной в D' ?
13. Как определяются производные высших порядков для обобщенных функций из D' ? Всегда ли они существуют?
14. Что можно сказать о почленном дифференцировании сходящихся последовательностей и рядов обобщенных функций?
15. Что такое функция Хевисайда? Чему равна ее производная?
16. Чему равна производная порядка n от дельта-функции?
17. Из каких функций состоит пространство S' ?
18. Как определяется сходимости в пространстве S' ?
19. Будут ли функции из S абсолютно интегрируемыми?
20. Является ли образ Фурье функции из S бесконечно дифференцируемым?
21. Будет ли образ Фурье функции из пространства S принадлежать этому пространству?
22. Является ли преобразование Фурье непрерывным отображением пространства S в себя?
23. Является ли преобразование Фурье линейной непрерывной биекцией пространства S' ?
24. Что называется обобщенной функцией над пространством основных функций S ?
25. Как определяется сходимости в пространстве обобщенных функций S' ?
26. Почему локально интегрируемые функции, имеющие не более

чем степенной рост на бесконечности, порождают обобщенные функции над пространством S' ?

27. Как определяется операция дифференцирования элементов пространства S' ? Является производная f' , $f \in S'$, элементом S' ?
28. Как определяется преобразование Фурье элементов пространства обобщенных функций S' ? Обратное преобразование Фурье?
29. Будет ли преобразование Фурье элемента пространства S' линейным непрерывным функционалом над пространством S' ?
30. Будет ли в пространстве S' преобразование Фурье линейной непрерывной биекцией?
31. Чему равны прямое и обратное преобразования Фурье δ -функции?
32. Как определяется произведение обобщенной функции из S' на многочлен?
33. Является произведение обобщенной функции из S' на многочлен обобщенной функцией из S' , т.е. линейным непрерывным функционалом над пространством основных функций S ?
34. Чему равно преобразование Фурье производной обобщенной функции из S' ?
35. Чему равна производная преобразования Фурье обобщенной функции из S' ? Чему равно преобразование Фурье функции $f(x) = x^n$, $n = 0, 1, \dots$, рассматриваемой как обобщенная функция из пространства S' ?