МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Кафедра высшей математики

О РАВНОМЕРНОЙ НЕПРЕРЫВНОСТИ ФУНКЦИЙ

Учебно-методическое пособие

Составитель *П. А. Кожевников*

МОСКВА
МФТИ
2012

УДК 517

Рецензент
Кандидат физико-математических наук, доцент *А. Ю. Петрович*

О равномерной непрерывности функций: учебно-методическое пособие / сост.: П. А. Кожевников. – М.: МФТИ, 2012. – 20 с.

В пособии изложен теоретический материал по теме «Равномерная непрерывность функций» из курса математического анализа. Приведены задачи для самостоятельного решения с указаниями и решениями.

Предназначено для студентов первого курса физико-математических специальностей.

Учебно-методическое издание

О РАВНОМЕРНОЙ НЕПРЕРЫВНОСТИ ФУНКЦИЙ

Составитель **Кожевников** Павел Александрович

Редактор *О.П. Котова.* Корректор *И.А. Волкова.*
Подписано в печать 12.04.2012. Формат $60 \times 84^1/_{16}$. Усл. печ. л. 1,25.
Уч.-изд. л. 1,0. Тираж 300 экз. Заказ № 85.

федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Московский физико-технический институт (государственный университет)»
141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9
E-mail: rio@mail.mipt.ru

Отдел автоматизированных издательских систем «ФИЗТЕХ-ПОЛИГРАФ»
141700, Московская обл., г. Долгопрудный, Институтский пер., 9

Содержание

Теоретические сведения

Определение и связь с понятием непрерывности

Будем рассматривать понятие равномерной непрерывности для функции $f : E \to \mathbb{R}$, где E — некоторое подмножество множества действительных чисел $\mathbb{R}$. В тексте используются определения (непрерывности, дифференцируемости функции и др.), обозначения и некоторые факты (теоремы Кантора, Лагранжа, свойства непрерывных функций, критерий Коши и др.), которые содержатся в любом из курсов анализа [1] — [7]. Мелким шрифтом набраны замечания, которые относятся к общему случаю отображения из одного метрического пространства в другое.

Определение. Функция $f : E \to \mathbb{R}$ называется *равномерно непрерывной* (на множестве E), если $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0$ такое, что $\forall\, x_1 \in E$, $\forall\, x_2 \in E$, удовлетворяющих условию $|x_1 - x_2| < \delta$, выполнено $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

Понятие *равномерной непрерывности* естественно обобщается на отображения из одного метрического пространства в другое следующим образом. Пусть E и $\widetilde{E}$ — два метрических пространства с функциями расстояния ρ и $\widetilde{\rho}$. Отображение $f : E \to \widetilde{E}$ называется *равномерно непрерывным*, если $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0$ такое, что $\forall\, x_1, x_2 \in E$, удовлетворяющих условию $\rho(x_1, x_2) < \delta$, выполнено $\widetilde{\rho}(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$.

Фиксируя в определении равномерной непрерывности точку x_1, мы получаем определение непрерывности функции $f : E \to \mathbb{R}$ в данной точке $x_1 \in E$. Таким образом, справедливо следующее

Предложение 1. *Если $f : E \to \mathbb{R}$ равномерно непрерывна (на E), то f непрерывна на E.*

Иначе говоря, если функция $f : E \to \mathbb{R}$ имеет разрыв хотя бы в одной точке множества E, то она не может быть равномерно непрерывной.[1]

[1] Отметим, что если x_1 — изолированная точка множества E, то, согласно

Из определения сразу вытекает следующее

Предложение 2. *Пусть функция $f : E \to \mathbb{R}$ равномерно непрерывна и $E' \subset E$. Тогда сужение функции f на E' также является равномерно непрерывной функцией.*

Предложения 1 и 2 верны и в случае отображения из одного метрического пространства в другое.

Пример 1. *Докажите, что функция $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, где $f(x) = \sqrt{x}$, является равномерно непрерывной.*

Решение. Заметим, что если $0 \leqslant x < y$, то $\sqrt{y} - \sqrt{x} \leqslant \sqrt{y - x}$ (действительно, возводя неравенство $\sqrt{y} \leqslant \sqrt{x} + \sqrt{y - x}$ в квадрат, получаем верное неравенство $y \leqslant x + (y - x) + 2\sqrt{x(y - x)}$). Значит, при $|x_1 - x_2| < \delta$ будет выполнено $|f(x_1) - f(x_2)| < \sqrt{\delta}$. Это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ достаточно положить $\delta = \varepsilon^2$, и определение равномерной непрерывности будет выполнено. $\square$

Пример 2. *Докажите, что функция $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, где $f(x) = \sin x^2$, не является равномерно непрерывной.*

Решение. Положим $x_1 = \sqrt{2\pi n}$, $x_2 = \sqrt{2\pi n + \frac{\pi}{2}}$ (где $n \in \mathbb{N}$ выберем позднее), тогда $|f(x_1) - f(x_2)| = 1$. Предположим, что f равномерно непрерывна, и для $\varepsilon = 1$ найдем соответствующее $\delta > 0$ из определения. Подберем $n \in \mathbb{N}$ такое, что $|x_1 - x_2| < \delta$ (это возможно, так как $|x_1 - x_2| = x_2 - x_1 = \dfrac{x_2^2 - x_1^2}{x_1 + x_2} = \dfrac{\pi}{2(\sqrt{2\pi n} + \sqrt{2\pi n + \frac{\pi}{2}})}$). Тогда по определению равномерной непрерывности должно быть $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon = 1$. Противоречие. $\square$

Отметим, что о равномерной непрерывности можно говорить в терминах функции *модуля непрерывности.* Для отображения $f : E \to \widetilde{E}$ (E и $\widetilde{E}$ — метрические пространства) модуль непрерывности $\omega_f(\delta)$ определяется для всех $\delta > 0$ равенством $\omega_f(\delta) = \sup\limits_{\substack{x_1, x_2 \in E, \\ \rho(x_1, x_2) < \delta}} \widetilde{\rho}(f(x_1), f(x_2))$. Модуль непрерывности может принимать действительные неотрицательные значения или быть равным $+\infty$. Нетрудно показать, что $f : E \to \widetilde{E}$ равномерно непрерывна тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{\delta \to 0+0} \omega_f(\delta) = 0$.

определению, любая функция $f : E \to \mathbb{R}$ непрерывна в точке x_1.

Некоторые классы равномерно непрерывных функций

Отметим некоторые факты, на которые (помимо определения) можно опираться при доказательстве того, что функция является равномерно непрерывной.

Случай конечного промежутка

Предложение 3 (теорема Кантора). *Пусть $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, и $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция на отрезке $[a, b]$. Тогда f равномерно непрерывна.*

Учитывая предложение 1, получаем, что если E — отрезок, то понятия непрерывности и равномерной непрерывности совпадают.

Теорема Кантора верна для любого непрерывного отображения $f : E \to \widetilde{E}$, где E и $\widetilde{E}$ — метрические пространства, причем E компактно.[2]

Если E — конечный промежуток числовой прямой, то вопрос о равномерной непрерывности функции $f : E \to \mathbb{R}$ сводится к возможности доопределить f в концах E так, чтобы получилась непрерывная функция на отрезке. Иначе говоря, верное следующее

Предложение 4. *Пусть $E = (a, b)$, либо $E = (a, b]$, либо $E = [a, b)$, где $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, и $f : E \to \mathbb{R}$ — непрерывная на E функция. Функция f равномерно непрерывна $\Leftrightarrow$ существуют конечные односторонние пределы $\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to b-0} f(x)$.*

Доказательство. Пусть для определенности $E = (a, b)$ и f равномерно непрерывна на (a, b). Докажем, например, что существует конечный предел $\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$. По определению равномерной непрерывности имеем: $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ такое, что $\forall x_1, x_2 \in (a, \min\{b, a+\delta\})$ выполнено $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ (поскольку из $x_1, x_2 \in (a, \min\{b, a+\delta\})$ вытекает, что $|x_1 - x_2| < \delta$). Последнее условие совпадает с условием Коши существования правого предела функции f в точке a. По критерию Коши получаем, что существует конечный предел $\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$.

[2] Напомним, что подмножество $E \subset \mathbb{R}^n$ компактно тогда и только тогда, когда оно ограничено и замкнуто.

Обратное утверждение почти очевидно: если f имеет конечные пределы в концах промежутка E, то f продолжается до непрерывной функции на отрезке $[a, b]$. Остается лишь воспользоваться теоремой Кантора и предложением 2 для подмножества $E \subset [a, b]$. $\square$

Пример 3. *Докажите, что функция* $f : E \to \mathbb{R}$, *где* $E = (0, 1)$, *а* $f(x) = x \sin \dfrac{1}{x^2}$, *является равномерно непрерывной.*

Решение. Покажем, что f удовлетворяет условиям предложения 4.

Если $x_0 \neq 0$, то непрерывность f в точке x_0 следует из теорем об арифметических операциях и композиции непрерывных функций. В частности, $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \sin 1$.

А так как $|f(x)| = |x| \cdot \left|\sin \dfrac{1}{x^2}\right| \leqslant |x|$, то $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$.[3] $\square$

Предложение 4 обобщается на случай отображения $f : E \to \widetilde{E}$, где E — метрическое пространство, а $\widetilde{E}$ — полное метрическое пространство, следующим образом. Пусть $\overline{E}$ — пополнение E (в случае, когда E является метрическим подпространством некоторого полного метрического пространства E_1, множество $\overline{E}$ является замыканием E в пространстве E_1). Отображение f является равномерно непрерывным тогда и только тогда, когда f можно продолжить до равномерно непрерывного отображения $\overline{f} : \overline{E} \to \widetilde{E}$ (в случае компактного $\overline{E}$, согласно теореме Кантора, достаточно непрерывности $\overline{f}$).

Поведение производной и близкие свойства

Говорят, что функция $f : E \to \mathbb{R}$ удовлетворяет (на множестве E) условию Гельдера с показателем $\alpha > 0$, если найдется такое $c > 0$, что $\forall\, x_1, x_2 \in E$ выполнено $|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant c|x_1 - x_2|^{\alpha}$. При $\alpha = 1$ условие Гельдера принято называть условием Липшица. Как видим, из условия Гельдера сразу следует равномерная непрерывность функции $f : E \to \mathbb{R}$: в определении равномерной непрерывности достаточно для каждого $\varepsilon > 0$ выбрать $\delta > 0$ с условием $c\delta^{\alpha} < \varepsilon$. Итак, имеем следующее достаточное условие равномерной непрерывности.

[3] Как видно из решения, при любых $\alpha > 0$ и $\beta \in \mathbb{R}$ функция $f(x) = \begin{cases} x^{\alpha} \sin x^{\beta}, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ непрерывна на $[0, +\infty)$ и поэтому равномерно непрерывна на любом отрезке $[0, A]$, где $A > 0$.

Предложение 5. *Пусть функция $f : E \to \mathbb{R}$ удовлетворяет условию Гельдера с показателем $\alpha > 0$. Тогда f равномерно непрерывна.*

Отметим, что в решении примера 1 фактически мы установили, что функция $f(x) = \sqrt{x}$ удовлетворяет условию Гельдера с показателем $\frac{1}{2}$.

Далее рассмотрим случай дифференцируемой функции на промежутке E. Если производная ограничена, то f удовлетворяет условию Липшица. Действительно, пусть $C > 0$ таково, что $\forall x \in E$ выполнено $|f'(x)| < C$. Тогда, используя теорему Лагранжа, получаем: $\forall x_1, x_2 \in E$ найдется такое ξ между точками x_1 и x_2, что $|f(x_1) - f(x_2)| = |f'(\xi)| \cdot |x_1 - x_2| < C|x_1 - x_2|$. Как следствие предложения 5 получаем

Предложение 6. *Пусть E — конечный или бесконечный промежуток, функция $f : E \to \mathbb{R}$ дифференцируема на E, причем ее производная $f' : E \to \mathbb{R}$ — ограниченная функция. Тогда f равномерно непрерывна.*

Из предложения 6 сразу следует равномерная непрерывность на $\mathbb{R}$ линейных функций $f(x) = ax+b$ $(a, b \in \mathbb{R})$,[4] функций $\sin ax$, $\cos ax$ $(a \in \mathbb{R})$ и их линейных комбинаций (в частности, тригонометрических многочленов).[5] Рассмотрим несколько более сложный пример.

Пример 4. *(2003-3)*[6] *Докажите, что функция $f : E \to \mathbb{R}$, где $E = (0, +\infty)$, а $f(x) = \sqrt{x}\ln(1 + x^2)$, является равномерно непрерывной.*

Решение. Воспользуемся предложением 6. Имеем $f'(x) = \dfrac{2x^{\frac{3}{2}}}{1+x^2} + \dfrac{\ln(1+x^2)}{2\sqrt{x}}$. Нетрудно видеть, что f' непрерывна на промежутке $(0, +\infty)$, причем $\lim\limits_{x\to 0+0} f'(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$. Отсюда следует, что

---

[4] Конечно, ее легко установить и непосредственно по определению.

[5] См. также задачу 8.

[6] Задача предлагалась на письменной контрольной работе во II семестре 1 курса МФТИ (2003 год, 3 вариант).

$f' : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ — ограниченная функция.[7] $\square$

Особо отметим, что условие ограниченности производной из предложения 6 является лишь достаточным, но не необходимым условием равномерной непрерывности для функций, дифференцируемых на промежутке. Скажем, функции, рассмотренные в примерах 1 и 3, имеют неограниченные производные. Даже условие Гельдера не является необходимым условием равномерной непрерывности (скажем, существуют функции, непрерывные на отрезке, которые не удовлетворяют условию Гельдера).

Разбиение бесконечного интервала

Предложение 7. *Пусть функция $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$, где $a \in \mathbb{R}$, непрерывна и существует конечный предел $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Тогда f равномерно непрерывна.*

Доказательство. Зафиксируем $\varepsilon > 0$.

Из существования конечного предела $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ вытекает существование такого $m > a$, что $\forall\, x_1, x_2 \in [m, +\infty)$ выполнено $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$. Далее, по теореме Кантора сужение функции f на отрезок $[a, m+1]$ является равномерно непрерывной функцией, поэтому $\exists\, \delta_1 > 0$ такое, что $\forall\, x_1, x_2 \in [a, m+1]$ с условием $|x_1 - x_2| < \delta_1$ выполнено $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$. Любая пара $x_1, x_2 \in [a, +\infty)$ с условием $|x_1 - x_2| < 1$ находится хотя бы в одном из двух промежутков $[a, m+1]$, $[m, +\infty)$.[8] Поэтому если положить $\delta = \min\{\delta_1, 1\}$, то для любых $x_1, x_2 \in [a, +\infty)$ с условием $|x_1 - x_2| < \delta$ справедливо $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$, то есть выполнено определение равномерной непрерывности. $\square$

---

[7] Если для непрерывной функция $g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ существует конечный предел $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = A$, то g ограничена. Действительно, для $\varepsilon = 1$ найдется m такое, что при $x \in [m, +\infty)$ значения $g(x)$ лежат в промежутке $[A-1, A+1]$. А на отрезке $[0, m]$ функция g ограничена по теореме Вейерштрасса. На самом деле в решении этого примера достаточно было установить, что $f'(x)$ ограничена на $[a, +\infty)$ для некоторого $a > 0$ (см. задачу 7).

[8] Именно для этого удобно использовать не разбиение $[a, m] \cup [m, +\infty)$, а делать "нахлест" $[a, m+1] \cap [m, +\infty) = [m, m+1]$.

Как показывают примеры после предложения 6, предложение 7 дает только достаточное, но не необходимое условие равномерной непрерывности на бесконечном промежутке (в отличие от предложения 4, которое является критерием в случае конечного интервала).

Пример 5. *(2003-2) Докажите, что функция $f : E \to \mathbb{R}$, где $E = (0, +\infty)$, а $f(x) = \dfrac{\sin x^3}{x}$, является равномерно непрерывной.*

Решение. Так как $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x^3}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3(1+o(1))}{x} = 0$, то f продолжается до непрерывной функции на $[0, +\infty)$. Далее, $|f(x)| \leqslant \dfrac{1}{x}$, откуда $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Согласно предложению 7, получаем, что $f : E \to \mathbb{R}$ равномерно непрерывна.[9] □

Способы установить отсутствие равномерной непрерывности некоторых функций

Случай конечного промежутка

Как мы видели в предложении 4, функция, определенная на конечном промежутке и не имеющая конечного предела в одном из его концов, не может быть равномерно непрерывной.

Пример 6. *Докажите, что функция $f : E \to \mathbb{R}$, где $E = (0, 1)$, а $f(x) = \sin \dfrac{1}{x}$, не является равномерно непрерывной.*

Решение. Согласно предложению 4, достаточно доказать, что не существует предела $\lim\limits_{x\to 0+0} f(x)$. Рассмотрим две последовательности Гейне. Положим $x_n = \dfrac{1}{\pi n}$, тогда $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ и $f(x_n) = 0$. Если же $x'_n = \dfrac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}}$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x'_n = 0$ и $f(x'_n) = 1$. Тем самым получено противоречие с определением предела по Гейне. □

[9] Отметим, что пример 5 не удается решить с помощью предложения 6.

Бесконечно большая производная

Предложение 8. *Пусть $E = [a, +\infty)$, и функция $f : E \to \mathbb{R}$ дифференцируема на E, причем $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = \infty$. Тогда f не является равномерно непрерывной функцией.*

Доказательство. Предположим, что f равномерно непрерывна. Возьмем $\varepsilon = 1$ и подберем соответствующее $\delta > 0$ из определения равномерной непрерывности. Из условия $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = \infty$ следует, что найдется $m \geqslant a$ такое, что $\forall\, x \geqslant m$ выполнено $|f'(x)| > \frac{2}{\delta}$. Положим $x_1 = m$, $x_2 = m + \frac{\delta}{2}$. Применив теорему Лагранжа о конечных приращениях для отрезка $[x_1, x_2]$, получим, что $|f(x_1) - f(x_2)| = \frac{\delta}{2}|f'(\xi)|$ для некоторого $\xi \in [x_1, x_2]$. Так как $\xi \geqslant m$, то $|f'(\xi)| > \frac{2}{\delta}$, откуда $|f(x_1) - f(x_2)| > 1 = \varepsilon$, что противоречит равномерной непрерывности f. $\square$

Обратим внимание на то, что предложения 6 и 8 все же не дают исчерпывающий ответ на вопрос о равномерной непрерывности дифференцируемых функций (см., скажем, пример 5, задачу 11).

Пример 7. *(2003-4) Докажите, что функция $f : E \to \mathbb{R}$, где $E = (0, +\infty)$, а $f(x) = x^2 \operatorname{arctg} x$, не является равномерно непрерывной.*

Решение. Имеем $f'(x) = 2x \operatorname{arctg} x + \dfrac{x^2}{x^2+1}$. Так как $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x \operatorname{arctg} x = +\infty$, а $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{x^2+1} = 1$, то нужное утверждение сразу следует из предложения 8.[10] $\square$

Колебание функции и рост

Предложение 9. *Пусть $E = [a, +\infty)$, и функция $f : E \to \mathbb{R}$ равномерно непрерывна. Тогда существуют такие фиксированные числа k и b, что $\forall\, x, y \in E$ выполнено $|f(x) - f(y)| \leqslant k|x - y| + b$.*[11]

---

[10] Конечно, решение этого примера также сразу следует из более сильного предложения 10.

[11] Это предложение можно обобщить до критерия равномерной непрерывности (см. задачу 14).

Доказательство. По определению найдется такое $\delta > 0$, что $\forall\, x', x'' \in E$ таких, что $|x' - x''| < \delta$ выполнено $|f(x') - f(x'')| < 1$. Зафиксируем $x \in E$, $y \in E$, для определенности $y > x$ (если $x = y$, то годится любое k и любое $b > 0$). Положим $n = \left[\frac{y-x}{\delta}\right] + 1$. Разобьем отрезок $[x, y]$ на n равных отрезков: $x = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = y$; так как $n > \frac{y-x}{\delta}$, то $|x_i - x_{i-1}| = \frac{y-x}{n} < \delta$ для $i = 1, 2, \ldots, n$. Тогда $|f(y) - f(x)| = |f(x_n) - f(x_0)| \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| < n \cdot 1 = n$. Отсюда $|f(y) - f(x)| \leqslant n \leqslant \frac{y-x}{\delta} + 1 = \frac{1}{\delta}|x - y| + 1$, то есть в условии предложения достаточно положить $k = \frac{1}{\delta}$ и $b = 1$. $\square$

Отметим два следствия последнего предложения.

Предложение 10. *Пусть $E = [a, +\infty)$, и функция $f : E \to \mathbb{R}$ равномерно непрерывна. Тогда существуют такие фиксированные числа k и b, что $\forall\, x \in E$ выполнено $|f(x)| \leqslant kx + b$.*

Доказательство. Согласно предложению 9, найдутся постоянные числа k и b_1 такие, что $\forall\, x \in E$ выполнено $|f(x) - f(a)| \leqslant kx + b_1$. Но тогда $|f(x)| \leqslant kx + b_1 + |f(a)|$, значит, достаточно положить $b = b_1 + |f(a)|$. $\square$

Заметим, что из предложения 10 легко следует предложение 8.

Предложение 11. *Пусть $c > 0$ — фиксированное число, $E \subset \mathbb{R}$ — некоторый промежуток числовой прямой, $E' = \{x - c \,|\, x \in E\}$. Пусть дана равномерно непрерывная на E функция $f : E \to \mathbb{R}$. Тогда функция $g : E \cap E' \to \mathbb{R}$, где $g(x) = f(x + c) - f(x)$, является ограниченной.*

Доказательство. Согласно предложению 9 найдутся постоянные k и b такие, что $\forall\, x \in E$ выполнено $|f(x + c) - f(x)| \leqslant kc + b$.[12] $\square$

Пример 8. *(2010-4) Докажите, что функция $f : E \to \mathbb{R}$, где $E = (1, +\infty)$, а $f(x) = x^2 \cos \ln x$, не является равномерно непрерывной.*

[12] Как видно из доказательства, предложение 11 можно обобщить, заменив всюду число c на ограниченную функцию $c(x)$, определенную на E.

Решение. Предположим противное и, воспользовавшись предложением 10, найдем числа k и b такие, что $\forall\, x \in [2, +\infty)$ выполнено $|f(x)| \leqslant kx + b$. Найдем такое $m \in [2, +\infty)$, что $\forall\, x \in [m, +\infty)$ выполнено $x^2 > kx + b$. Подберем $n \in \mathbb{N}$ так, чтобы число $x_0 = e^{2\pi n}$ было больше m. Тогда $f(x_0) = x_0^2 \cos \ln x_0 = x_0^2 > kx_0 + b$. Получено противоречие.[13] $\square$

Пример 9. *(2003-2) Докажите, что функция $f : E \to \mathbb{R}$, где $E = (0, +\infty)$, а $f(x) = \sqrt{x} \sin x$, не является равномерно непрерывной.*

Решение. В силу предложения 11 достаточно доказать, что функция $g(x) = f(x + \frac{\pi}{2}) - f(x)$ не является ограниченной. Это верно, так как при натуральных k выполнено $f(2\pi k + \frac{\pi}{2}) - f(2\pi k) = \sqrt{2\pi k + \frac{\pi}{2}}$.[14] $\square$

Пример 10. *(2010-1) Докажите, что функция $f : E \to \mathbb{R}$, где $E = (0, +\infty)$, а $f(x) = x \sin \sqrt{x}$, не является равномерно непрерывной.*

Решение. Предположим противное. Положим $x_n = (2\pi n)^2$, $y_n = (2\pi n + \frac{\pi}{2})^2$ так, что $f(x_n) = 0$, $f(y_n) = y_n = (2\pi n + \frac{\pi}{2})^2 > n^2$. Тогда $|y_n - x_n| = y_n - x_n = \pi^2(2n + \frac{1}{4}) < 30n$.

Согласно предложению 9 должны существовать k и b такие, что для всех n выполнено $|f(x_n) - f(y_n)| \leqslant k|x_n - y_n| + b$. Тогда получаем $n^2 \leqslant 30kn + b$, что неверно при достаточно больших n. Противоречие. $\square$

Благодарность. Составитель этого пособия благодарен рецензенту за ряд полезных замечаний.

---

[13] Отметим, что пример 8 не удается решить с помощью предложения 8.

[14] Из решения видно, что вместо $f(x) = x \cos x$ можно взять любую функцию вида $h(x) \cos x$ или $h(x) \sin x$ (или даже $h(x) \cos^\alpha x$ или $h(x) \sin^\alpha x$ для $\alpha \geqslant 1$), где $h(x)$ удовлетворяет условию $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = \infty$.

Задачи

В задачах 1—5 требуется выяснить, является ли данная функция $f : E \to \mathbb{R}$ равномерно непрерывной.

Задача 1. *$f(x) = x^\alpha$, где $\alpha \in \mathbb{R}$; $E = (0, +\infty)$.*

Задача 2. *$f(x) = \ln x$ для а) $E = (1, +\infty)$; б) $E = (0, 1)$.*

Задача 3. *(2003-3) а) $f(x) = \dfrac{1}{x}\ln(1 + x^2)$; б) $f(x) = \dfrac{1}{x}\operatorname{arctg} x^2$; $E = (0, +\infty)$ (для а) и для б)).*

Задача 4. ** $f(x) = x^\alpha \sin x^\beta$, где $\alpha, \beta > 0$; $E = (0, +\infty)$.*

Задача 5. **(2003-1) $f(x) = \sin(x \sin x)$; $E = (0, +\infty)$.*

Задача 6. *а) Пусть дана функция $f : E \to \mathbb{R}$, где $E = E' \cup E''$. Известно, что сужения функции f на E' и на E'' являются равномерно непрерывными функциями. Обязательно ли $f : E \to \mathbb{R}$ равномерно непрерывна?*

б) Докажите, что если в условиях пункта а) $E' \subset \mathbb{R}$ замкнуто, а E'' компактно, то $f : E \to \mathbb{R}$ равномерно непрерывна.

Задача 7. *Пусть функция $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ непрерывна, причем для некоторого $b > a$ функция $f(x)$ дифференцируема на $[b, +\infty)$, и f' ограничена на $[b, +\infty)$. Докажите, что f равномерно непрерывна.*

Задача 8. *Докажите, что любая непрерывная периодическая функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ является равномерно непрерывной.*

Задача 9. *а) Пусть функции $f : E \to \mathbb{R}$ и $g : E \to \mathbb{R}$ равномерно непрерывны. Докажите, что $f \pm g$ и λf $(\lambda \in \mathbb{R})$ также равномерно непрерывны.*

б) Пусть $f : E \to \mathbb{R}$ равномерно непрерывна, а $g : E \to \mathbb{R}$ не является равномерно непрерывной. Докажите, что $f + g$ не является равномерно непрерывной.

Задача 10. *Докажите, что если $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ непрерывна и имеет наклонную асимптоту при $x \to +\infty$, то f равномерно непрерывна.*

Задача 11. *(1991-3) Существует ли функция равномерно непрерывная и дифференцируемая функция $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ такая, что $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \infty$, и $\forall\, b \geqslant a$ функция f' — неограниченная на $[b, +\infty)$?*

Задача 12. *Пусть функции $f : E \to \mathbb{R}$ и $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ равномерно непрерывны. Докажите, что их композиция $g \circ f : E \to \mathbb{R}$ равномерно непрерывна. (По определению композиции $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.)*

Задача 13. *(1991-1) Пусть $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ непрерывна на $[0, +\infty)$ и $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \infty$. Докажите, что функция $\operatorname{arctg} f(x)$ равномерно непрерывна на $[0, +\infty)$.*

Задача 14. *Докажите критерий для функции $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$: f является равномерно непрерывной $\Leftrightarrow \forall\, b > 0\ \exists\, k > 0$ такое, что $\forall\, x, y \in [a, +\infty)$ выполнено $|f(x) - f(y)| \leqslant k|x - y| + b$.*

Задача 15. *Пусть $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ равномерно непрерывна и интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\, dx$ сходится. Докажите, что $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.*

В задачах 16—17 речь идет о равномерной непрерывности функций двух переменных $f : E \to \mathbb{R}$, где $E \subset \mathbb{R}^2$.

Задача 16. *Пусть $E \subset \mathbb{R}^2$ — выпуклая область, а функция $f : E \to \mathbb{R}$ такова, что частные производные $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$ существуют в каждой точке E и являются ограниченными на E функциями. Докажите, что f равномерно непрерывна.*

Задача 17. *Является ли f равномерно непрерывной в области $E \subset \mathbb{R}^2$, где*
а) (2007-1) $f(x, y) = \sin \frac{1}{x^2 + y^2 + 2y}$, $E = \{x^2 + y^2 + y < 0\}$;
б) (2007-2) $f(x, y) = \sin \frac{1}{2x^2 - 2xy + y^2}$, $E = \{x > 0, y < 1, y > x\}$;
в) (2007-4) $f(x, y) = \cos \frac{1}{x^2 + y^2 - 2x}$, $E = \{-1 < y < 1, 2 < x < 3\}$*?*

Ответы, указания и решения

1. Ответ: f равномерно непрерывна $\Leftrightarrow \alpha \in [0, 1]$.

При $\alpha > 1$ можно воспользоваться предложением 8. Согласно предложению 4 при $\alpha < 0$ функция f не является равномерно непрерывной даже на $(0, 1)$.

При $\alpha \in (0, 1]$ можно доказать, что применимо предложение 5, либо воспользоваться задачей 7.

2. Ответ: а) да (равномерно непрерывна); б) нет.

а) следует из предложения 6, б) — из предложения 4.

3. Ответ: а) да; б) да.

Можно воспользоваться предложением 7.

4. Ответ: равномерно непрерывна $\Leftrightarrow \alpha + \beta \leqslant 1$.

При $\alpha+\beta \leqslant 1$ функция $f(x)$ продолжается до непрерывной функции на $[0, +\infty)$, имееющей ограниченную производную на $[1, +\infty)$ (см. задачу 7).

Если же $\alpha+\beta > 1$, можно строить противоречие с предложением 9 так же, как и в примере 10. Положим $x_n = (2\pi n)^{\frac{1}{\beta}}$, $y_n = (2\pi n + \frac{\pi}{2})^{\frac{1}{\beta}}$, так что $f(x_n) = 0$, $f(y_n) = y_n^\alpha = (2\pi n + \frac{\pi}{2})^{\frac{\alpha}{\beta}}$. Тогда $|y_n - x_n| = (2\pi n)^{\frac{1}{\beta}} \left(\left(1 + \frac{1}{4n}\right)^{\frac{1}{\beta}} - 1\right)$. При $n \to \infty$ имеем $|f(x_n) - f(y_n)| \sim c_1 n^{\frac{\alpha}{\beta}}$ ($c_1 > 0$ — константа); $|y_n - x_n| \sim (2\pi n)^{\frac{1}{\beta}} \cdot \frac{1}{4\beta n} \sim c_2 n^{\frac{1}{\beta}-1}$ ($c_2 > 0$ — константа). Так как $\frac{1}{\beta} - 1 < \frac{\alpha}{\beta}$, то при достаточно больших n неравенство $|f(x_n) - f(y_n)| \leqslant k|x_n - y_n| + b$ (k и b фиксированы) не выполнено. Получается противоречие с предположением 9.

5. Ответ: нет.

На отрезке $[2\pi n, 2\pi n + \frac{\pi}{2}]$ функция $h(x) = x \sin x$ непрерывна и монотонно возрастает от 0 до $2\pi n + \frac{\pi}{2}$. Пусть $2\pi n < x_1 < y_1 < x_2 < y_2 < \ldots < x_n < y_n = 2\pi n + \frac{\pi}{2}$ — такие точки, что $h(x_k) = 2\pi k$, $h(y_k) = 2\pi k + \frac{\pi}{2}$. Тогда $\sin y_k - \sin x_k = 1 - 0 = 0$, а длина хотя бы одного из отрезков $[x_k, y_k]$ меньше, чем $\frac{\pi}{2n}$. При достаточно больших n получается противоречие с определением равномерной непрерывности.

6. а) Ответ: нет.

Пусть $E' \cap E'' = \varnothing$, и $\inf\limits_{\substack{x' \in E',\\ x'' \in E''}} |x' - x''| = 0$.[15] Тогда достаточно рассмотреть функцию, равную 1 на E' и равную 0 на E''.

б) Предположив противное, можно для некоторого $\varepsilon > 0$ выбрать последовательности точек $x_1', x_2', \ldots \in E'$, $x_1'', x_2'', \ldots \in E''$ такие, что $\lim\limits_{n\to\infty} |x_k' - x_k''| = 0$, но $|f(x_k') - f(x_k'')| > \varepsilon$ при всех k. В силу компактности E'' можно считать, что (x_k'') сходится к $x_0 \in E''$. Тогда и (x_k') сходится к x_0, поэтому $x_0 \in E'$ (так как E' замкнуто). Так как сужения f на E' и E'' непрерывны в точке x_0, то $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k') = \lim\limits_{k\to\infty} f(x_k'') = f(x_0)$. Противоречие. [16]

7. По теореме Кантора и предложению 6 функция f равномерно непрерывна на каждом из множеств $[a, c]$ и $[b, +\infty)$. Остается положить $c = b$ и воспользоваться задачей 6. Можно также положить $c > b$ (сделать "нахлест") и далее доказать равномерную непрерывность по определению, как это сделано в доказательстве предложения 7.

8. Пусть $T > 0$ — длина периода. Для любых $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ таких, что $|x_1 - x_2| < T$ найдется $k \in \mathbb{Z}$ такое, что $x_1 + kT, x_2 + kT \in [0, 2T]$. Поэтому равномерную непрерывность f можно вывести из того, что сужение f на отрезок $[0, 2T]$ — равномерно непрерывная функция.

9. Утверждение а) несложно выводится из определений. Докажем, например, равномерную непрерывность функции $f + g$ исходя из равномерной непрерывности f и g. Для данного $\varepsilon > 0$ выберем $\delta > 0$ такое, что при $|x_1 - x_2| < \delta$ выполнено $|f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2}$ и $|g(x_1) - g(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Тогда при $|x_1 - x_2| < \delta$ выполнено $|(f(x_1) + g(x_1)) - (f(x_2) + g(x_2))| \leqslant |f(x_1) - f(x_2)| + |g(x_1) - g(x_2)| < \varepsilon$.[17]

б) Предположим противное: пусть функция $h = f + g$ является

[15] Это может выполняться и для замкнутых множеств E' и E''.

[16] Пункт б) легко обобщить на случай полного и компактного метрических пространств E' и E''.

[17] Утверждение а), по сути, означает, что равномерно непрерывные функции $E \to \mathbb{R}$ образуют линейное пространство.

равномерно непрерывной. Тогда согласно а) функция $g = h - f$ тоже равномерно непрерывна. Противоречие.

10. По условию $f(x) = (kx + b) + g(x)$, где k и b — некоторые константы, а $g : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ непрерывна и $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$. Согласно предложению 7 g равномерно непрерывна. Воспользовавшись задачей 9, получаем, что и f равномерно непрерывна.

11. Ответ: Существует.

Воспользовавшись задачей 9 (или 10), нужный пример можно построить как $f(x) = x + g(x)$, где $g : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ — дифференцируемая функция такая, что $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$, и $\forall\, b \geqslant a$ функция g' — неограниченная на $[b, +\infty)$ (годится, скажем, функция $g(x) = \frac{\sin x^3}{x}$ из примера 5).

12. В силу равномерной непрерывности g, для данного $\varepsilon > 0$ найдется $\delta_1 > 0$ такое, что $\forall\, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$, удовлетворяющих условию $|y_1 - y_2| < \delta_1$, выполнено $|g(y_1) - g(y_2)| < \varepsilon$. В силу равномерной непрерывности f, для такого δ_1 найдется $\delta > 0$ такое, что $\forall\, x_1, x_2 \in E$, удовлетворяющих условию $|x_1 - x_2| < \delta$, выполнено $|f(x_1) - f(x_2)| < \delta_1$. Получаем, что для всех таких x_1, x_2 выполнено $|g(f(x_1)) - g(f(x_2))| < \varepsilon$.

13. Можно воспользоваться задачей 12.[18]

14. Доказать утверждение в одну сторону можно, повторяя доказательство предложения 9, вместо $\varepsilon = 1$ положив $\varepsilon = b$.

В обратную сторону утверждение можно доказать по определению равномерной непрерывности, взяв $b = \frac{\varepsilon}{2}$ и $\delta = \frac{\varepsilon}{2k}$.

15. Предположив, что утверждение неверно, найдем такое $\varepsilon > 0$, что $\forall\, c > a\ \exists\, x_c > c$, для которого $|f(x_c)| > \varepsilon$. Из условия равномерной непрерывности следует, что найдется $\delta > 0$ (зависящее от ε, но не зависящее от c) такое, что $|f(x)| > \frac{\varepsilon}{2}$ $|f(x)| > \frac{\varepsilon}{2}$ при $x \in [x_c - \delta, x_c + \delta]$. Тогда $\left|\int\limits_{x_c-\delta}^{x_c+\delta} f(x)\right| \geqslant 2\delta \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\delta$. Это противоречит критерию Коши

[18] Предположение о том, что $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \infty$, является лишним условием.

для сходимости данного в условии интеграла.[19]

16. Пусть модули частных производных не превосходят C. Тогда верно следующее *утверждение:* для любых двух точек $M, N \in E$, имеющих равную абсциссу или ординату, выполнено $|f(M) - f(N)| < C|MN|$. Это утверждение доказывается аналогично предложению 6 (при этом используется то, что весь отрезок MN содержится в E).

Докажем, что для данного $\varepsilon > 0$ можно положить $\delta < \frac{\varepsilon}{2C}$, и определение равномерной непрерывности будет выполнено. Зафиксируем две точки $M, N \in E$ такие, что $|MN| < \delta$. Пусть $\sigma > 0$ таково, что отрезок MN вместе с его σ-окрестностью содержится в E (такое σ существует, так как E выпуклое и открытое множество). Положим $k = \left[\frac{\delta}{\sigma}\right] + 1$ и разобьем отрезок MN точками $M = M_0, M_1, M_2, \ldots, M_k = N$ на k равных отрезков. Заметим, что длина каждого из отрезков меньше σ. Пусть M_i имеет координаты (x_i, y_i). Рассмотрим еще точки $P_i(x_{i-1}, y_i)$, $i = 1, 2, \ldots, k$. В силу выбора σ все отрезки $M_{i-1}P_i$ и P_iM_i целиком содержатся в E. Пользуясь *утверждением*, имеем: $|f(M_i) - f(M_{i-1})| \leqslant \leqslant |f(M_i) - f(P_i)| + |f(P_i) - f(M_{i-1})| \leqslant C|M_iP_i| + C|P_iM_{i-1}| \leqslant 2C|M_iM_{i-1}|$. Таким образом, $|f(M) - f(N)| = |f(M_0) - f(M_k)| \leqslant \sum\limits_{i=1}^{k} |f(M_i) - f(M_{i-1})| \leqslant \leqslant 2C \sum\limits_{i=1}^{k} |M_iM_{i-1}| = 2C|M_0M_k| = 2C|MN|$.

17. Ответ: а) нет; б) нет; в) нет.

Как следует из обобщения предложения 4, достаточно показать, что функцию невозможно продолжить до непрерывной функции на замыкании области E. Например: а) не существует $\lim\limits_{y \to 0-0} f(0, y)$; б) не существует $\lim\limits_{x \to 0+0} f(x, 2x)$; в) не существует $\lim\limits_{x \to 2+0} f(x, 0)$.

[19] Отметим, что утверждение задачи становится неверным, если заменить условие равномерной непрерывности на условие непрерывности.

Литература

Учебники

1. *Бесов О. В.* Лекции по математическому анализу. Ч. 1: учебное пособие. — М.: МФТИ, 2004.
2. *Зорич В. А.* Математический анализ. Ч. 1. — М.: ФАЗИС, 1997.
3. *Иванов Г. Е.* Лекции по математическому анализу. Ч. 1: учебное пособие. — М.: МФТИ, 2012.
4. *Кудрявцев Л. Д.* Курс математического анализа. Т. I. — М.: Высшая школа, 1981.
5. *Никольский С. М.* Курс математического анализа. Т. I. — М.: Наука, 1983.
6. *Тер-Крикоров А. М., Шабунин М. И.* Курс математического анализа. — М.: МФТИ, 2000.
7. *Яковлев Г. Н.* Лекции по математическому анализу. Ч. 1 — М.: Физматлит, 2004.

Задачники

1. *Демидович Б. П.* Сборник задач и упражнений по математическому анализу: учебное пособие. — 13 изд., испр. — М.: Изд-во Моск. ун-та, ЧеРо, 1997.
2. *Кудрявцев Л. Д., Кутасов А. Д., Чехлов В. И., Шабунин М. И.* Сборник задач по математическому анализу. Ч. I (Предел, непрерывность, дифференцируемость). — 2-е изд., перераб. — М.: Физматлит, 2003.