Министерство образования Российской Федерации

Московский физико-технический институт
Кафедра высшей математики

# РАЦИОНАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ

***Методические указания и оптимальные алгоритмы решения экзаменационных задач 1-го семестра 1-го курса***

Москва 2006

Составитель: Л.И.Коваленко

Рецензенты:
*Т.С. Пиголкина,*
*В.Р.Почуев*

УДК 517

**Задачи экзаменационных работ по математическому анализу для студентов 1-го курса** МФТИ, 2006.

# ОГЛАВЛЕНИЕ

## Введение

В пособии приводятся решения задач по математическому анализу, которые входят в экзаменационную работу 1-го курса МФТИ в первом семестре.

Рассматриваются экзаменационные работы первых семестров 2002/2003 и 1996/1997 уч. гг. Приводятся подробные решения всех задач варианта А и более лаконичные решения задач варианта Е работы 2002/2003 уч. г. и двух задач варианта 72 работы 1996/1997 уч. г.

Даются методические указания к наиболее рациональному решению задач. Помещены указания перед решениями задач варианта А, но могут быть использованы для решения аналогичных задач других вариантов обеих работ.

Приводятся ответы ко всем задачам.

Особенностью рассматриваемых экзаменационных работ является то, что в них входят задачи на темы всех четырёх заданий 1-го семестра. Кроме того, в них нет задач с трудоёмкими вычислениями.

Задачи составляли преподаватели: М.В. Балашов, В.О. Геогджаев, С.В. Иванова, Л.И. Коваленко, П.А. Кожевников, Р.В. Константинов, Л.А. Леонтьева, А.И. Ноаров, В.Т. Петрова, А.Ю. Петрович, В.Р. Почуев, Б.Н. Румянцев, А.М. Тер-Крикоров, А.А. Фонарёв, А.А. Хасанов, Т.Х. Яковлева.

Ответственный по 1-му курсу В.Р. Почуев был экспертом работы 2002/2003 уч.г. и рецензировал данное пособие.

Л.И.Коваленко была ответственной за обе экзаменационные работы, помимо составления задач осуществляла общее редактирование.

Рукопись к печати подготовил А.В. Полозов.

# § 1. Экзаменационная работа по математическому анализу 1-го семестра 2002/2003 уч.г. для студентов 1-го курса

## Вариант А

**1.** Вычислить интегралы

а) ③ $\displaystyle\int \frac{(\arccos \ln x)^2}{x}\,dx$; б) ④ $\displaystyle\int \frac{1+\operatorname{tg}^3 x}{1+\sin 2x}\,dx$.

**2.**⑤ Найти $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+3x+x^2}-\ln(1+\sin x)-\cos\frac{x}{\sqrt{3}}}{\operatorname{tg}(e^x-1)-\operatorname{sh} x-\frac{x^2}{2}}$.

**3.** Построить графики функций

а) ④ $y=\dfrac{x^3}{2(x-2)^2}$; б) ⑤ $y=\sqrt[3]{|x|(x+3)^2}$.

**4.** Разложить по формуле Тейлора функцию

$$y=\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\sqrt{2+4x-2x^2}$$

а) ② в окрестности $x_0=0$ до $o(x^3)$;
б) ④ в окрестности $x_0=1$ до $o((x-1)^{2n+1})$.

**5.**④ Указать все точки непрерывности и точки разрыва, установить тип разрывов функции $f(x)$, определенной на $\left(-\dfrac{3\pi}{2};\dfrac{5\pi}{2}\right)$, при этом $f(x)=\dfrac{|x|(\pi^2-x^2)}{\sin x}$ при $x\in\left(-\dfrac{3\pi}{2};\dfrac{5\pi}{2}\right)$, $x\ne k\pi$, $k=0,\ \pm1,\ 2$; $f(0)=f(2\pi)=\pi^2$, $f(\pi)=2\pi^2$, $f(-\pi)=-2\pi^2$.

**6.**④ Найти в точке $(1;1)$ значение радиуса кривизны графика функции $y(x)$, заданной уравнением $x^4+y^4-2xy=0$.

**7.**⑤ Найти $\displaystyle\lim_{x\to +0}\left(\frac{x}{\ln(1+x)}-\operatorname{sh}\left(\frac{x}{2}-\frac{x^2}{12}\right)\right)^{\frac{1}{x^3}+\ln^4 x}$.

**8.**⑦ Построить кривую $x=\dfrac{(t+1)^3}{t^2}$, $y=\dfrac{(t+1)(2t+1)}{t^2}$.

**9.**③ Установить, сходится или расходится последовательность $\{x_n\}$, $x_n>0$, $n=1,\,2,\,\ldots$, если $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{x_{n+1}}=5$.

## Ответы к варианту А

**1.** а) $(\arccos \ln x)^2 \ln x - 2\sqrt{1-\ln^2 x}\arccos \ln x - 2\ln x + C$;

б) $\dfrac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x - 2\operatorname{tg} x + 3\ln|1+\operatorname{tg} x| + C$.

**2.** $\boxed{\dfrac{5}{2}}$; $\sqrt[3]{1+3x+x^2} = 1 + x - \dfrac{2}{3}x^2 + x^3 + o(x^3)$,

$\ln(1+\sin x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)$,

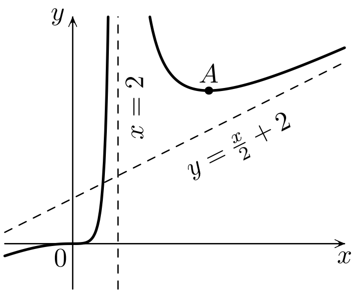
$\operatorname{tg}(e^x - 1) = x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{2} + o(x^3)$;

числитель: $\dfrac{5}{6}x^3 + o(x^3)$; знаменатель: $\dfrac{x^3}{3} + o(x^3)$.

**3.** а) Асимптоты: $x = 2$, $y = \dfrac{x}{2} + 2$, график на рис. 1;

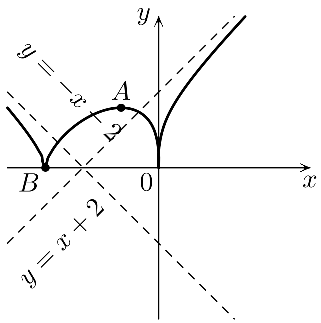
$y' = \dfrac{x^2(x-6)}{2(x-2)^3}$, $y'' = \dfrac{12x}{(x-2)^4}$. б) Асимптоты: $y = x + 2$ $(x \to +\infty)$, $y = -x - 2$ $(x \to -\infty)$; $y' = \dfrac{(x+1)\operatorname{sgn} x}{x^{2/3}(x+3)^{1/3}}$, $x \neq 0$;

$y'' = \dfrac{-2\operatorname{sgn} x}{x^{5/3}(x+3)^{4/3}}$, $x \neq 0$, график на рис. 2.




$A\left(6; \dfrac{27}{4}\right)$; $O(0;0)$

Рис. 1




$A(-1; \sqrt[3]{4})$; $O(0;0)$, $B(-3;0)$

Рис. 2

**4.** а) $y = -\sqrt{2}x - \dfrac{x^2}{\sqrt{2}} + \dfrac{3}{\sqrt{2}}x^3 + o(x^3)$; б) $y = (t^2-1)\sqrt{1-\dfrac{t^2}{2}}$, $t = x - 1$,

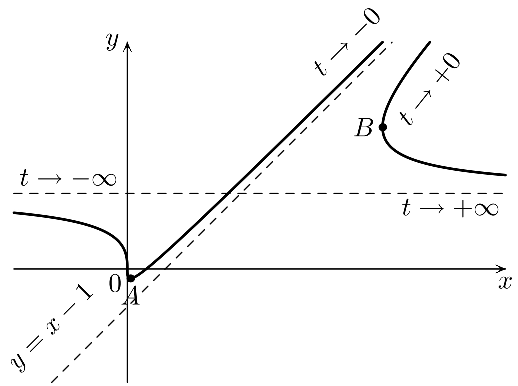
$$y = -1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{2^k}(C_{1/2}^k + 2C_{1/2}^{k-1})(x-1)^{2k} + o((x-1)^{2n+1}).$$

**5.** $x = 0$ — точка разрыва 1-го рода,
$x = 2\pi$ — точка разрыва 2-го рода; остальные точки интервала $\left(-\dfrac{3\pi}{2}; \dfrac{5\pi}{2}\right)$ — точки непрерывности.

**6.** $R = \dfrac{\sqrt{2}}{7}$ $(y' = -1,\ y'' = -14)$.

**7.** $\boxed{e^{1/48}}$ ; $\dfrac{x}{\ln(1+x)} = 1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{12} + \dfrac{x^3}{24} + o(x^3)$.

**8.** Асимптоты: $y = 2$ $(t = \pm\infty)$, $y = x - 1$ $(t \to \pm 0)$;
$x'_t = \dfrac{(t+1)^2(t-2)}{t^3}$, $y'_t = \dfrac{-3(t+2/3)}{t^3}$, $y'_x = -3\dfrac{t+2/3}{(t+1)^2(t-2)}$,
$y''_{xx} = \dfrac{6t^5}{(t+1)^5(t-2)^3}$, кривая на рис. 3.




$A\left(\dfrac{1}{12}; -\dfrac{1}{4}\right)$, $B\left(\dfrac{27}{4}; \dfrac{15}{4}\right)$, $O(0;0)$

Рис. 3

**9.** Сходится.

## Методические указания к решению задач. Решение задач варианта А

При вычислении одного из неопределённых интегралов каждого варианта работы применяется метод интегрирования по частям.

Интеграл представляем в виде

$$\int f\,dx = \int \varphi\,d\psi(x) = \varphi\cdot\psi - \int \psi\,d\varphi(x),$$

не выписывая отдельно выражений для $\varphi$ и $\psi$.

**1.** а) Вычислить интеграл $\displaystyle\int \frac{(\arccos\ln x)^2}{x}\,dx.$

Р е ш е н и е. Заменив переменную, положив $t=\ln x$, получим

$$J = \int \frac{(\arccos\ln x)^2}{x}\,dx = \int (\arccos t)^2\,dt.$$

Далее интегрируем два раза по частям

$$J = t(\arccos t)^2 + 2\int \frac{t\arccos t}{\sqrt{1-t^2}}\,dt =$$

$$= t(\arccos t)^2 - 2\int \arccos t\,d\sqrt{1-t^2} =$$

$$= t(\arccos t)^2 - 2\sqrt{1-t^2}\arccos t - 2t + C.$$

**Ответ:** $(\arccos\ln x)^2\ln x - 2\sqrt{1-\ln^2 x}\arccos\ln x - 2\ln x + C.$

Для вычисления другого интеграла варианта А (№ 1б)) применимо правило вычисления интеграла от $f = R(\sin x, \cos x)$, где $R(u,v)$ — рациональная функция ([7], т. 2).

б) Вычислить интеграл $\displaystyle\int \frac{1+\operatorname{tg}^3 x}{1+\sin 2x}\,dx.$

Р е ш е н и е. Заметив, что подынтегральная функция не меняется, если одновременно $\sin x$ заменить на $-\sin x$, а $\cos x$ — на $-\cos x$, удобно перейти к новой переменной $t=\operatorname{tg} x$. Так как

$$d\ \operatorname{tg} x = \frac{dx}{\cos^2 x},$$

то, поделив числитель и знаменатель подынтегральной функции на $\cos^2 x$ и воспользовавшись соотношением

$$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x,$$

получим

$$\int \frac{1+\operatorname{tg}^3 x}{1+\sin 2x}\,dx = \int \frac{1+t^3}{1+2t+t^2}\,dt = \int \frac{1-t+t^2}{1+t}\,dt =$$

$$= \int \left(t - 2 + \frac{3}{t+1}\right) dt = \frac{t^2}{2} - 2t + 3\ln|t+1| + C, \quad \text{где} \quad t = \operatorname{tg} x.$$

**Ответ:** $\dfrac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x - 2\operatorname{tg} x + 3\ln|1+\operatorname{tg} x| + C.$

---

> Для вычисления предела частного двух функций нужно раскрыть неопределённость вида $\frac{0}{0}$. Для этого разлагаем функции по формуле Маклорена в окрестности точки $x = 0$ и выделяем главные части степенного вида числителя и знаменателя. При этом особое внимание следует обращать на учёт всех членов нужного порядка малости.

**2.** Найти

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+3x+x^2} - \ln(1+\sin x) - \cos\frac{x}{\sqrt{3}}}{\operatorname{tg}(e^x - 1) - \operatorname{sh} x - \frac{x^2}{2}}.$$

Р е ш е н и е. Имеем неопределённость вида $\frac{0}{0}$. В состав знаменателя отношения двух функций, данного в условии, входит лишь одна сложная функция. Поэтому рассмотрим вначале знаменатель.

Используя разложение для $\operatorname{sh} x$, можно получить представление

$$\operatorname{sh} x + \frac{x^2}{2} = x + \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

Тогда сложную функцию $\operatorname{tg}(e^x - 1)$ надо будет разлагать тоже до $o(x^2)$. Будем иметь

$$u = e^x - 1 = x + \frac{x^2}{2} + o(x^2),$$

$$\operatorname{tg}(e^x - 1) = \operatorname{tg} u = u + o(u^2) = x + \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

Следовательно, знаменатель будет представлен в виде $o(x^2)$.

Главная часть степенного вида не выделена. Из этого заключаем, что все функции надо разлагать до $o(x^k)$, $k \geqslant 3$.

Тогда получим

$$\operatorname{sh} x + \frac{x^2}{2} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^4),$$
$$u = e^x - 1 = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3).$$

Так как $u \sim x$ при $x \to 0$, то $\operatorname{tg} u$ надо разлагать до $o(u^3)$.

$$\operatorname{tg}(e^x - 1) = \operatorname{tg} u = u + \frac{u^3}{3} + o(u^3) =$$
$$= x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) + \frac{1}{3}\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^3.$$

Приводим подобные члены, при этом выписываем лишь слагаемые со степенями $x$ не выше третьей. Имеем

$$\operatorname{tg}(e^x - 1) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + o(x^3).$$

Для знаменателя получаем представление в виде

$$\frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

Теперь ясно, что все функции, входящие в состав числителя, следует разлагать тоже до $o(x^3)$. Имеем $(1 + 3x + x^2)^{\frac{1}{3}} = (1 + v)^{\frac{1}{3}}$, где $v = 3x + x^2$. Так как $v \sim 3x$ при $x \to 0$, то разлагаем $(1 + v)^{\frac{1}{3}}$ до $o(v^3)$. Используя биномиальное разложение, получаем $(1 + v)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{3}v - \frac{1}{9}v^2 + \frac{5}{81}v^3 + o(v^3)$, откуда $(1 + 3x + x^2)^{\frac{1}{3}} = 1 + x - \frac{2}{3}x^2 + x^3 + o(x^3)$.

Аналогично получаем разложение $\ln(1 + \sin x) = \ln(1 + w)$, где $w = \sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$. Имеем

$$\ln(1 + w) = w - \frac{w^2}{2} + \frac{w^3}{3} + o(w^3),$$
$$\ln(1 + \sin x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) - \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2 +$$
$$+ \frac{1}{3}\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^3 = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3),$$

$$\cos\frac{x}{\sqrt{3}} = 1 - \frac{x^2}{6} + o(x^3).$$

Числитель представлен в виде

$$\frac{5}{6}x^3 + o(x^3).$$

Искомый предел равен

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{5}{6}x^3 + o(x^3)}{\frac{x^3}{3} + o(x^3)} = \frac{5}{2}.$$

**Ответ:** $\frac{5}{2}$.

---

При отыскании предела функции $f = u(x)^{v(x)}$ применяется представление $f$ в виде

$$f = u^v = e^{v\ln u}.$$

Считается известным, что при любом $\varepsilon > 0$

$$\lim_{x\to+0}(x^\varepsilon \ln x) = 0.$$

**7.** Найти

$$\lim_{x\to+0}\left(\frac{x}{\ln(1+x)} - \operatorname{sh}\left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{12}\right)\right)^{\frac{1}{x^3}+\ln^4 x}.$$

Р е ш е н и е. Если ввести обозначения

$$u = \frac{x}{\ln(1+x)} - \operatorname{sh}\left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{12}\right), \quad v = \frac{1}{x^3} + \ln^4 x = \frac{1 + x^3\ln^4 x}{x^3},$$

то требуется найти

$$\lim_{x\to+0} u^v = e^{\lim\limits_{x\to+0} v\ln u}.$$

Будем вычислять $\lim\limits_{x\to+0} v\ln u$.

Исходя из структуры функции $v$, заключаем, что $\ln u$ нужно разлагать до $o(x^3)$. Имеем

$$\frac{x}{\ln(1+x)} = \frac{x}{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)} =$$

$$= \frac{1}{1 - \left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{4} + o(x^3)\right)} = \frac{1}{1-w},$$

где $w = \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{3} + \dfrac{x^3}{4} + o(x^3)$. Так как $w \sim \dfrac{x}{2}$ при $x \to +0$, то $\dfrac{1}{1-w}$ будем разлагать до $o(w^3)$. Получим

$$\frac{1}{1-w} = 1 + w + w^2 + w^3 + o(w^3).$$

Возвращаясь к $x$ и выписывая лишь слагаемые со степенями $x$ не выше третьей (остальные включены в $o(x^3)$), имеем

$$\frac{x}{\ln(1+x)} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{12} + \frac{x^3}{24} + o(x^3).$$

Функцию $\operatorname{sh}\left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{12}\right)$ разлагаем до $o(x^3)$.

$$\operatorname{sh}\left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{12}\right) = \frac{x}{2} - \frac{x^2}{12} + \frac{1}{6}\left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{12}\right)^3 + o(x^3) = \frac{x}{2} - \frac{x^2}{12} + \frac{x^3}{48} + o(x^3).$$

Тогда

$$\ln u = \ln\left(\frac{x}{\ln(1+x)} - \operatorname{sh}\left(\frac{x}{2} - \frac{x^2}{12}\right)\right) =$$

$$= \ln\left(1 + \frac{x^3}{48} + o(x^3)\right) = \frac{x^3}{48} + o(x^3),$$

$$\lim_{x\to+0} v \ln u = \lim_{x\to+0} \frac{1 + x^3 \ln^4 x}{x^3}\left(\frac{x^3}{48} + o(x^3)\right) = \frac{1}{48},$$

так как $\lim\limits_{x\to+0}(x^3 \ln^4 x) = \lim\limits_{x\to+0}(x^{\frac{3}{4}} \ln x)^4 = 0$.

**Ответ:** $e^{\frac{1}{48}}$.

---

Для получения разложения по формуле Тейлора с остаточным членом $o((x - x_0)^n)$ нужно сделать замену переменной и свести задачу к получению разложения по формуле Маклорена.

Нужно уметь объединять слагаемые двух сумм, записанных с помощью знака $\sum$. Удобно при этом применить сдвиг индекса в одной из сумм и объединить слагаемые нужного порядка обеих сумм, записав отдельно одно из слагаемых.

**4.** Разложить по формуле Тейлора функцию

$$y = \left(\frac{x^2}{2} - x\right)\sqrt{2 + 4x - 2x^2}$$

а) в окрестности $x_0 = 0$ до $o(x^3)$; б) в окрестности $x_0 = 1$ до $o((x-1)^{2n+1})$.

Р е ш е н и е. а) Так как первый множитель, входящий в состав функции $y(x)$, эквивалентен $-x$ при $x \to 0$, то второй множитель надо разлагать до $o(x^2)$. Использовав биномиальное разложение для второго множителя, получим

$$y = \sqrt{2}\left(-x + \frac{x^2}{2}\right)(1+2x-x^2)^{\frac{1}{2}} =$$
$$= \sqrt{2}\left(-x + \frac{x^2}{2}\right)\left(1 + x - \frac{x^2}{2} - \frac{(2x)^2}{8} + o(x^2)\right) =$$
$$= \sqrt{2}\left(-x - \frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}x^3 + o(x^3)\right).$$

б) $y(x) = \dfrac{(x-1)^2 - 1}{2}\sqrt{4 - 2(x-1)^2}.$

Сделаем замену переменной, положив $t = x - 1$. Тогда

$$y(x(t)) = (-1+t^2)\left(1 - \frac{t^2}{2}\right)^{\frac{1}{2}} =$$
$$= (-1+t^2)\left(\sum_{m=0}^{n} C_{\frac{1}{2}}^{m}\frac{(-1)^m}{2^m}t^{2m} + o(t^{2n+1})\right) =$$
$$= -1 + \sum_{m=1}^{n} C_{\frac{1}{2}}^{m}\frac{(-1)^{m+1}}{2^m}t^{2m} + \sum_{m=0}^{n-1} C_{\frac{1}{2}}^{m}\frac{(-1)^m}{2^m}t^{2(m+1)} + o(t^{2n+1}).$$

Заменив во второй сумме $m+1$ на $k$, объединим обе суммы

$$y = -1 + \sum_{k=1}^{n}\left(C_{\frac{1}{2}}^{k}\frac{(-1)^{k+1}}{2^k} + C_{\frac{1}{2}}^{k-1}\frac{(-1)^{k-1}}{2^{k-1}}\right)t^{2k} + o(t^{2n+1}) =$$
$$= -1 + \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{2^k}\left(2C_{\frac{1}{2}}^{k-1} + C_{\frac{1}{2}}^{k}\right)(x-1)^{2k} + o((x-1)^{2n+1}),$$

где

$$C_{\frac{1}{2}}^{k} = \frac{1}{k!}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 1\right)\ldots\left(\frac{1}{2} - (k-1)\right) =$$
$$= \begin{cases} \dfrac{1}{2}, & k = 1, \\ \dfrac{(-1)^{k-1}(2k-3)!!}{k!2^k}, & k = 2, 3, \ldots; \end{cases} \qquad C_{\frac{1}{2}}^{0} = 1.$$

**Ответ:** а) $y = -\sqrt{2}x - \dfrac{x^2}{\sqrt{2}} + \dfrac{3}{\sqrt{2}}x^3 + o(x^3)$;

б) $y = -1 + \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^{k-1}}{2^k}(C^k_{1/2} + 2C^{k-1}_{1/2})(x-1)^{2k} +$
$+ o((x-1)^{2n+1})$.

---

При решении задачи №5 потребуется теорема о непрерывности частного двух функций, а также необходимо знать определение точек разрыва 1-го рода, 2-го рода.

Используются пределы:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1. \tag{1}$$

Можно применить правило Лопиталя.

**5.** Указать все точки непрерывности и точки разрыва, установить тип разрывов функции $f(x)$, определенной на $\left(-\dfrac{3\pi}{2}; \dfrac{5\pi}{2}\right)$, при этом

$$f(x) = \frac{|x|(\pi^2 - x^2)}{\sin x}$$

$$\text{при } x \in \left(-\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right), \quad x \neq k\pi, \quad k = 0, \pm 1, 2;$$

$$f(0) = f(2\pi) = \pi^2, \quad f(\pi) = 2\pi^2, \quad f(-\pi) = -2\pi^2.$$

Р е ш е н и е. В любой точке $x \in \left(-\dfrac{3\pi}{2}; \dfrac{5\pi}{2}\right)$, $x \neq k\pi$, $k = 0$, $\pm 1$, 2, функция $f(x)$ непрерывна как частное.

Исследуем $f(x)$ в точках $x = 0$, $x = \pm\pi$, $x = 2\pi$.

$\boxed{x = 0}$. Пользуясь (1), получаем

$$\lim_{x\to +0} f(x) = \lim_{x\to +0}\frac{x(\pi^2 - x^2)}{\sin x} = \pi^2 = f(0), \quad \lim_{x\to -0} f(x) = -\pi^2,$$

$x = 0$ — точка разрыва 1-го рода функции $f(x)$.

$\boxed{x = \pm\pi}$. Имеем при $x \to \pm\pi$ неопределённость вида $\dfrac{0}{0}$. Применим правило Лопиталя.

$$\lim_{x\to \pi} f(x) = \lim_{x\to \pi}\frac{x(\pi^2 - x^2)}{\sin x} = \lim_{x\to \pi}\frac{\pi^2 - 3x^2}{\cos x} = 2\pi^2 = f(\pi);$$

$$\lim_{x\to-\pi} f(x) = -2\pi^2 = f(-\pi)$$

(можно было не применять правило Лопиталя, а сделать замену переменной, положив $t = \pi - x$); $x = \pm\pi$ — точки непрерывности функции $f(x)$.

$\boxed{x = 2\pi}$. $\lim\limits_{x\to 2\pi} f(x) = \infty$; $x = 2\pi$ — точка разрыва 2-го рода функции $f(x)$.

**Ответ:** $x = 0$ — точка разрыва 1-го рода, $x = 2\pi$ — точка разрыва 2-го рода; остальные точки интервала $\left(-\dfrac{3\pi}{2}; \dfrac{5\pi}{2}\right)$ — точки непрерывности функции $f(x)$.

---

При решении задачи № 9 применяется теорема о существовании у монотонной ограниченной последовательности конечного предела.

**9.** Установить, сходится или расходится последовательность $\{x_n\}$, $x_n > 0$, $n = 1, 2, \ldots$, если $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{x_{n+1}} = 5$.

Р е ш е н и е. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = \dfrac{1}{5}$, то существует $n_0$ такое, что

$$0 < \frac{x_{n+1}}{x_n} \leqslant \frac{2}{5} < 1$$

при любом $n \geqslant n_0$. Последовательность $\{x_n\}$ убывающая при $n \geqslant n_0$, по условию она ограничена снизу. Следовательно, сходится.

**Ответ:** Сходится.

---

При построении графиков функций $f(x)$ надо обратить внимание на отыскание асимптот при $x \to \pm\infty$. Их можно быстро найти, если использовать разложение функции по степеням $\dfrac{1}{x}$ при $x > x_0$, $x < -x_0$, $x_0 > 0$.

При вычислении производных от $f(x)$ стоит производную частного $\dfrac{p(x)}{q(x)}$ находить, представляя $\dfrac{p}{q}$ в виде $p \cdot q^{-1}$ — произведения двух сомножителей.

Заполнение таблицы упорядочивает сведения о функции $f(x)$ и является кратким обоснованием построения её графика.

**3.** Построить графики функций

а) $y = \dfrac{x^3}{2(x-2)^2}$; б) $y = \sqrt[3]{|x|(x+3)^2}$.

Р е ш е н и е. а) Область определения $(-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$; $x = 2$ — вертикальная асимптота;

$$y = \frac{x^3}{2(x-2)^2} = \frac{x}{2}\left(1 - \frac{2}{x}\right)^{-2} =$$

$$= \frac{x}{2}\left(1 + \frac{4}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \frac{x}{2} + 2 + o(1) \text{ при } x \to \infty,$$

$y = \dfrac{x}{2} + 2$ — наклонная асимптота при $x \to \infty$.

$$y' = \frac{1}{2}\left(x^3(x-2)^{-2}\right)' = \frac{3}{2}\frac{x^2}{(x-2)^2} - \frac{x^3}{(x-2)^3} = \boxed{\frac{x^2(x-6)}{2(x-2)^3}},$$

$$y'' = \frac{1}{2}\left(x^2(x-6)(x-2)^{-3}\right)'' = \frac{x(x-6)}{(x-2)^3} + \frac{x^2}{2(x-2)^3} - \frac{3x^2(x-6)}{2(x-2)^4} = \boxed{\frac{12x}{(x-2)^4}}.$$

График $y(x)$ см. на рис. 1 на с. 6.

| $x$ | | $0$ | | $2$ | | $6$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $\nearrow$ | $0$ | $\nearrow$ | | $\searrow$ | $\frac{27}{4}$ | $\nearrow$ |
| $y'$ | $+$ | $0$ | $+$ | | $-$ | $0$ | $+$ |
| $y''$ | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | $+$ | $+$ |
| | | точка перегиба | | | | min | |

б) Область определения $(-\infty; +\infty)$;

$$y = \sqrt[3]{x(x+3)^2} \text{ при } x \geqslant 0, \quad y = -\sqrt[3]{x(x+3)^2} \text{ при } x < 0.$$

Рассмотрим $y(x)$ при $x > 0$.

$$y = x\left(1 + \frac{3}{x}\right)^{\frac{2}{3}} = x\left(1 + \frac{2}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) = x + 2 + o(1) \text{ при } x \to +\infty,$$

$y = x + 2$ — наклонная асимптота при $x \to +\infty$,

$$y' = \left(x^{\frac{1}{3}}(x+3)^{\frac{2}{3}}\right)' = \frac{1}{3}\frac{(x+3)^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}} + \frac{2}{3}\frac{x^{\frac{1}{3}}}{(x+3)^{\frac{1}{3}}} = \boxed{\frac{x+1}{x^{\frac{2}{3}}(x+3)^{\frac{1}{3}}}};$$

$$y'' = \left((x+1)x^{-\frac{2}{3}}(x+3)^{-\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}(x+3)^{\frac{1}{3}}} - \frac{2(x+1)}{3x^{\frac{5}{3}}(x+3)^{\frac{1}{3}}} -$$

$$- \frac{x+1}{3x^{\frac{2}{3}}(x+3)^{\frac{4}{3}}} = \boxed{-\frac{2}{x^{\frac{5}{3}}(x+3)^{\frac{4}{3}}}}.$$

При $x < 0$ имеем: $y = -x - 2$ — наклонная асимптота при $x \to -\infty$;

$$y' = \boxed{-\frac{x+1}{x^{\frac{2}{3}}(x+3)^{\frac{1}{3}}}}, \quad y'' = \boxed{\frac{2}{x^{\frac{5}{3}}(x+3)^{\frac{4}{3}}}}.$$

График $y(x)$ см. на рис. 2 на с. 6.

| $x$ | | $-3$ | | | $-1$ | | $0$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $\searrow$ | $0$ | | $\nearrow$ | $\sqrt[3]{4}$ | $\searrow$ | $0$ | | $\nearrow$ |
| $y'$ | $-$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $+$ | $0$ | $-$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $+$ |
| $y''$ | $-$ | $\nexists$ | | $-$ | $-$ | $-$ | $\nexists$ | | $-$ |
| | | min | | | max | | min | | |

При построении параметрически заданных кривых для отыскания невертикальных асимптот нужно сначала определить, к чему должно стремиться $t$, чтобы $x(t)$ стремилось к $\pm\infty$, при исследовании на вертикальные асимптоты — к чему должно стремиться $t$, чтобы $y(t)$ стремилось к $\pm\infty$, а $x(t)$ — к конечному $x_0$.

По производной $x'(t)$ определяем интервалы $E_k$ изменения $t$, на которых сохраняется знак производной $x'(t)$, а функция $y(t)$ непрерывна. На каждом из интервалов $E_k$ функция $x(t)$ имеет обратную функцию $t_k(x)$, определённую на соответствующем промежутке изменения $x$. Имеем функции $y(t_k(x))$, которые обозначаем через $Y(x)$.

Далее вычисляем $y'(t)$, $Y'(x)$, $Y''(x)$. Заполняем таблицу. Она облегчает построение кривой.

**8.** Построить кривую $x = \dfrac{(t+1)^3}{t^2}$, $y = \dfrac{(t+1)(2t+1)}{t^2}$.

Р е ш е н и е. 1) Функции $x(t)$, $y(t)$ определены при

$$t \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty).$$

2) **Исследование на асимптоты.** Имеем

$$\lim_{t\to 0} x(t) = +\infty, \quad \lim_{t\to\pm\infty} x(t) = \pm\infty, \quad \lim_{t\to 0} y(t) = +\infty.$$

Вертикальных асимптот нет.

Для отыскания невертикальных асимптот находим

$$\lim_{t\to 0}\frac{y}{x} = \lim_{t\to 0}\frac{2t+1}{(t+1)^2} = 1,$$

$$\lim_{t\to 0}(y-x) = \lim_{t\to 0}(-(t+1)) = -1,$$

$$\lim_{t\to\infty}\frac{y}{x} = 0, \quad \lim_{t\to\infty}(y - 0\cdot x) = 2,$$

$y = x - 1$ — наклонная асимптота при $t \to 0$, $y = 2$ — горизонтальная асимптота при $t \to \infty$.

3) **Вычисление $x'(t)$.**

$$x'(t) = ((t+1)^3 t^{-2})' = \frac{(t+1)^2(t-2)}{t^3}.$$

Указываем интервалы $E_k$ изменения $t$, на которых сохраняется знак производной $x'(t)$, а $y(t)$ непрерывна:

$$E_1 = (-\infty; 0), \quad E_2 = (0; 2), \quad E_3 = (2; +\infty).$$

**Вычисление $y'(t)$, $Y'(x)$, $Y''(x)$.**

$$y'(t) = \left(\left(1+\frac{1}{t}\right)\left(2+\frac{1}{t}\right)\right)' = -3\frac{t+\frac{2}{3}}{t^3},$$

$$Y'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)} = -3\frac{t+\frac{2}{3}}{(t+1)^2(t-2)};$$

$$Y''(x) = \left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)'\frac{1}{x'(t)} = \frac{6t^5}{(t+1)^5(t-2)^3},$$

так как $\left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)' = -((3t+2)(t+1)^{-2}(t-2)^{-1})' = \frac{6t^2}{(t+1)^3(t-2)^2}$.

4) **Заполнение таблицы.** Вначале заполняем графу с $x'(t)$, потом с $x(t)$. Аналогично — с $y'(t)$ и $y(t)$.

При заполнении графы с $Y'(x)$ стоит обратить внимание на то, что знак функции $Y'(x)$ легко определяется, как знак отношения $y'(t)$ к $x'(t)$.

| | $E_1$ | | | | | | | $E_2$ | | | $E_3$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $t$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $-\frac{2}{3}$ | | $-0$ | $+0$ | | $2$ | $2$ | | $+\infty$ |
| $x(t)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $\frac{1}{12}$ | $\nearrow$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $\frac{27}{4}$ | $\frac{27}{4}$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |
| $x'(t)$ | | $+$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ | | | $-$ | $0$ | $0$ | $+$ | |
| $y(t)$ | $2-0$ | $\searrow$ | $0$ | $\searrow$ | $-\frac{1}{4}$ | $\nearrow$ | $+\infty$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $\frac{15}{4}$ | $\frac{15}{4}$ | $\searrow$ | $2+0$ |
| $y'(t)$ | | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ | | | $-$ | $-$ | $-$ | $-$ | |
| $Y'(x)$ | | $-$ | $-\infty$ | $-$ | $0$ | $+$ | | | $+$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $-$ | |
| $Y''(x)$ | | $-$ | $\nexists$ | $+$ | $+$ | $+$ | | | $-$ | $\nexists$ | $\nexists$ | $+$ | |

5) **Построение кривой.** Строим кривую, считывая информацию из таблицы. См. рис. 3 на с. 7.

$t=-1$, $O(0;0)$; $x=0$ — точка перегиба с вертикальной касательной;

$t=-\dfrac{2}{3}$, $A\left(\dfrac{1}{12};-\dfrac{1}{4}\right)$; $x=\dfrac{1}{12}$ — точка минимума $Y(x)$;

$t=2$, $B\left(\dfrac{27}{4};\dfrac{15}{4}\right)$; $t=2$ — граничная точка интервалов $E_2$ и $E_3$; касательная в точке $B$ вертикальна; $y=\dfrac{15}{4}$ — точка минимума $X(y)$.

---

При решении задачи № 6 нужно использовать формулу для подсчёта кривизны, при этом не забывать, что в неё входит модуль $y''$.

В задаче нужно найти первую и вторую производные в данной точке функции, заданной неявно. Для этого надо дважды продифференцировать тождество, в которое входит $y(x)$, и из полученных равенств найти $y'$ и $y''$ в заданной точке.

**6.** Найти в точке $(1;1)$ значение радиуса кривизны графика функции $y(x)$, заданной уравнением $x^4+y^4-2xy=0$.

Р е ш е н и е. Дифференцируя тождество

$$x^4+y^4(x)-2xy(x)\equiv 0,$$

получаем

$$2x^3+2y^3(x)y'(x)-y(x)-xy'(x)\equiv 0. \tag{2}$$

Так как $y(1)=1$, то из (2) следует, что

$$y'(1)=-1.$$

Дифференцируем тождество (2). Имеем

$$6x^2 + 6y^2(x)y'^2(x) + 2y^3(x)y''(x) - 2y'(x) - xy''(x) \equiv 0.$$

Отсюда, пользуясь тем, что $y(1) = 1$, $y'(1) = -1$, получаем

$$y''(1) = -14.$$

Для кривизны $K$ и радиуса кривизны $R$ имеем

$$K = \frac{|y''|}{(1 + y'^2)^{3/2}}, \quad R = \frac{1}{K},$$

поэтому в точке $(1; 1)$

$$R = \frac{2^{\frac{3}{2}}}{14} = \frac{\sqrt{2}}{7}.$$

**Ответ:** $R = \dfrac{\sqrt{2}}{7}$.

## Вариант E

**1.** Вычислить интегралы

а) ③ $\displaystyle\int \sin 2x \ln(1 + \cos x)\, dx$; б) ④ $\displaystyle\int \frac{x^5}{(1 + x^2)^{3/2}}\, dx$.

**2.**⑤ Найти $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left( \frac{e^{x\sqrt{1+2x}} - \cos(x - x^2) - 2x^2}{\arcsin x} \right)^{\operatorname{ctg}^2 x}$.

**3.** Построить графики функций

а) ④ $y = \dfrac{(x-1)^7}{x^6}$; б) ⑤ $y = \sqrt[3]{(1 - x)(x + 2)^2}$.

**4.** Разложить по формуле Тейлора функцию

$$y = \left( \frac{x^2}{2} + 2x - 3 \right) e^{-x^2 - 4x}$$

а) ② в окрестности $x_0 = 0$ до $o(x^2)$;

б) ④ в окрестности $x_0 = -2$ до $o((x + 2)^{2n+1})$.

**5.**④ Указать все точки непрерывности и точки разрыва, установить тип разрывов функции $f(x)$, определенной на $(-\pi; 2\pi)$, при этом

$$f(x) = \frac{(\pi^2 - 4x^2)\operatorname{tg} x}{|x|}$$

$$\text{при } x \in (-\pi; 2\pi), \quad x \neq 0, \quad x \neq \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi, \quad k = 0, \pm 1;$$

$$f(0) = f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \pi^2, \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 8, \quad f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -8.$$

**6.** 4 Найти в точке $(-1; -1)$ значение радиуса кривизны графика функции $y(x)$, заданной уравнением $x^3 + y^3 = 1 + 3y^2x$.

**7.** 5 Найти $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[\left(\sqrt[3]{x^3 - 3x^2} - x + e^{\frac{1}{x}}\right) \cdot \ln^2 \operatorname{sh} x\right]$.

**8.** 7 Построить кривую $x = \dfrac{t^2}{t^2 - 1}$, $y = t + 1 + \dfrac{1}{t+1}$.

**9.** 3 Установить, сходится или расходится последовательность $\{x_n\}$, $x_n > 0$, $n = 1, 2, \ldots$, если $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right)^2 = 4$.

## Ответы к варианту Е

**1.** а) $\sin^2 x \cdot \ln(1 + \cos x) - \cos x + \dfrac{1}{2}\cos^2 x + C$;

б) $\dfrac{1}{3}(1 + x^2)^{3/2} - 2(1 + x^2)^{1/2} - \dfrac{1}{(1 + x^2)^{1/2}} + C$.

**2.** $\boxed{e^{-1/2}}$; $e^{x\sqrt{1+2x}} = 1 + x + \dfrac{3}{2}x^2 + \dfrac{2}{3}x^3 + o(x^3)$,

$\cos(x - x^2) = 1 - \dfrac{x^2}{2} + x^3 + o(x^3)$.

**3.** а) Асимптоты: $x = 0$, $y = x - 7$;

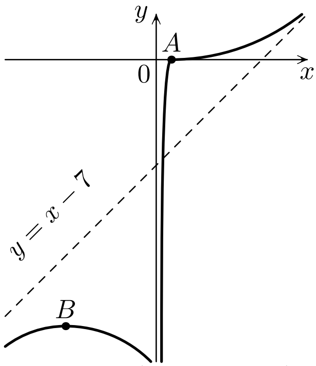
$y' = \dfrac{(x-1)^6(x+6)}{x^7}$, $y'' = \dfrac{42(x-1)^5}{x^8}$; график на рис. 4.

б) Асимптота: $y = -x - 1$ $(x \to \infty)$;

$y' = -\dfrac{x}{(x-1)^{2/3}(x+2)^{1/3}}$, $y'' = \dfrac{2}{(x+2)^{4/3}(x-1)^{5/3}}$, график на рис. 5.

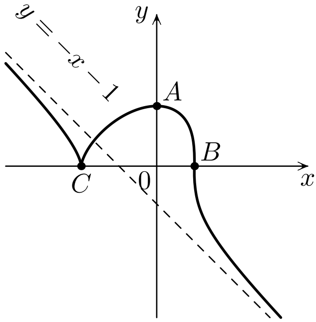
**4.** а) $y = -3 + 14x - \dfrac{57x^2}{2} + o(x^2)$;

б) $y = \left(\dfrac{t^2}{2} - 5\right) \cdot e^4 e^{-t^2}$, $t = x + 2$,




$A(1;0)$, $B\left(-6; 7\cdot\left(\dfrac{7}{6}\right)^6\right)$

Рис. 4




$A(0;2^{2/3})$, $B(1;0)$, $C(-2;0)$

Рис. 5

$y = -5e^4 + \sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}e^4\left(\dfrac{5}{k!} + \dfrac{1}{(k-1)!2}\right)(x+2)^{2k} + o((x+$ $+2)^{2n+1})$.

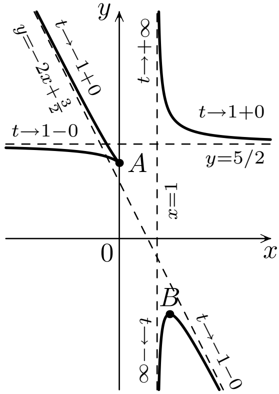
**5.** $x = 0$ — точка разрыва 1-го рода, $x = \dfrac{3\pi}{2}$ — точка разрыва 2-го рода; остальные точки интервала $(-\pi; 2\pi)$ — точки непрерывности.

**6.** $R = \dfrac{1}{2}$ $(y' = 0,\ y'' = -2)$.

**7.** $\boxed{-\dfrac{7}{6}}$; $\sqrt[3]{x^3 - 3x^2} - x = -1 - \dfrac{1}{x} - \dfrac{5}{3x^2} + o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$.

**8.** Асимптоты: $y = \dfrac{5}{2}$ $(t \to 1 \pm 0)$, $x = 1$ $(t \to \pm\infty)$,
$y = -2x + \dfrac{3}{2}$ $(t \to -1 \pm 0)$; $x'_t = -\dfrac{2t}{(t^2-1)^2}$,
$y'_t = \dfrac{t(t+2)}{(t+1)^2}$, $y'_x = -\dfrac{(t+2)(t-1)^2}{2}$, $y''_{xx} = \dfrac{3}{4}\,\dfrac{(t+1)^3(t-1)^3}{t}$,
кривая на рис. 6.

**9.** Расходится.




$A(0;2)$ $(t=0,\ \operatorname{tg}\alpha_{\text{кас}}=-1)$ — точка возврата, $B\left(\dfrac{4}{3};-2\right)$

Рис. 6

## Решение задач варианта Е

**1.** Вычислить интегралы

а) $\displaystyle\int \sin 2x \ln(1+\cos x)\,dx$; б) $\displaystyle\int \frac{x^5}{(1+x^2)^{3/2}}\,dx$.

Р е ш е н и е. а) Интегрируя по частям, получаем

$$\int \ln(1+\cos x)\,d(\sin^2 x) = \sin^2 x\cdot\ln(1+\cos x) + \int \frac{\sin^3 x}{1+\cos x}\,dx$$

Так как $\sin^3 x\,dx = (\cos^2 x - 1)\,d(\cos x)$, то

$$\int \frac{\sin^3 x}{1+\cos x}\,dx = \int (\cos x - 1)\,d(\cos x) = \frac{\cos^2 x}{2} - \cos x + C.$$

**Ответ:** $\sin^2 x\cdot\ln(1+\cos x) - \cos x + \dfrac{1}{2}\cos^2 x + C$.

б) Заменив переменную, положив $\tau = x^2$, преобразуем исходный интеграл $J$ к виду

$$J = \frac{1}{2}\int \frac{\tau^2\,d\tau}{(1+\tau)^{3/2}}.$$

Перейдя к переменной $t=\sqrt{\tau+1}$, получим

$$J = \int \frac{(t^2-1)^2}{t^2}\,dt = \int \left(t^2 - 2 + \frac{1}{t^2}\right)dt = \frac{1}{3}t^3 - 2t - \frac{1}{t} + C,$$

где $t = \sqrt{x^2+1}$.

**Ответ:** $\dfrac{1}{3}(1+x^2)^{3/2} - 2(1+x^2)^{1/2} - \dfrac{1}{(1+x^2)^{1/2}} + C$.

**2.** Найти $\displaystyle \lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{x\sqrt{1+2x}} - \cos(x-x^2) - 2x^2}{\arcsin x}\right)^{\operatorname{ctg}^2 x}$.

Р е ш е н и е. Обозначим через $u$ отношение, стоящее в скобках, и положим

$$v = \operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x}.$$

Найдём $\lim\limits_{x\to 0}(v\ln u)$.

Так как $\operatorname{tg}^2 x = x^2 + o(x^2)$, то функцию $\ln u$ надо разлагать до $o(x^2)$. Для этого функции, входящие в состав числителя и знаменателя дроби, которую обозначили через $u$, будем разлагать до $o(x^3)$.

$$x\sqrt{1+2x} = x\left(1 + x + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\frac{1}{2!}(2x)^2 + o(x^2)\right) = \\ = x + x^2 - \frac{x^3}{2} + o(x^3),$$

$$e^{x\sqrt{1+2x}} = e^{x+x^2-\frac{x^3}{2}+o(x^3)} = 1 + x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^3 + o(x^3),$$

$$\cos(x-x^2) = 1 - \frac{(x-x^2)^2}{2} + o(x^3) = 1 - \frac{x^2}{2} + x^3 + o(x^3),$$

$$\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + o(x^4),$$

$$u = \frac{x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)}{x + \frac{x^3}{6} + o(x^4)} = \\ = \left(1 - \frac{x^2}{3} + o(x^2)\right)\left(1 + \frac{x^2}{6} + o(x^3)\right)^{-1} = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2);$$

$$\lim_{x\to 0}(v\ln u) = \lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)}{x^2 + o(x^2)} = -\frac{1}{2},$$

$$\lim_{x\to 0} u^v = e^{\lim\limits_{x\to 0}(v\ln u)} = e^{-\frac{1}{2}}.$$

**Ответ:** $e^{-\frac{1}{2}}$.

**3.** Построить графики функций

а) $y = \dfrac{(x-1)^7}{x^6}$; б) $y = \sqrt[3]{(1-x)(x+2)^2}$.

Р е ш е н и е. а) Область определения

$$(-\infty; 0) \cup (0; +\infty);$$

$x = 0$ — вертикальная асимптота;

$y = x\left(1 - \dfrac{1}{x}\right)^7 = x\left(1 - \dfrac{7}{x} + o\left(\dfrac{1}{x}\right)\right) = x - 7 + o(1)$ при $x \to \infty$,

$y = x - 7$ — наклонная асимптота при $x \to \infty$;

$y' = ((x-1)^7 x^{-6})' = \boxed{\dfrac{(x-1)^6}{x^7}(x+6)}$,

$y'' = ((x-1)^6(x+6)x^{-7})' = \boxed{42\dfrac{(x-1)^5}{x^8}}$.

График $y(x)$ см. на рис. 4 на с. 22.

| $x$ | | $-6$ | | $0$ | | $1$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $\nearrow$ | $-\gamma^2$ | $\searrow$ | | $\nearrow$ | $0$ | $\nearrow$ |
| $y'$ | $+$ | $0$ | $-$ | | $+$ | $0$ | $+$ |
| $y''$ | $-$ | $-$ | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ |
| | | max | | | | точка перегиба | |

$$\gamma^2 = 7\left(\frac{7}{6}\right)^6$$

б) Область определения $(-\infty; +\infty)$;

$$y = -x\left(1 - \frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{3}}\left(1 + \frac{2}{x}\right)^{\frac{2}{3}} = -x\left(1 - \frac{1}{3x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right)\left(1 + \frac{4}{3x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) = -x - 1 + o(1), \quad x \to \infty,$$

$y = -x - 1$ — наклонная асимптота при $x \to \infty$;

$y' = \left(-(x+2)^{\frac{2}{3}}(x-1)^{\frac{1}{3}}\right)' = \boxed{\dfrac{-x}{(x+2)^{1/3}(x-1)^{2/3}}}$,

$y'' = -\left(x(x+2)^{-\frac{1}{3}}(x-1)^{-\frac{2}{3}}\right)' = \boxed{\dfrac{2}{(x+2)^{4/3}(x-1)^{5/3}}}$.

График $y(x)$ см. на рис. 5 на с. 22.

| $x$ | | $-2$ | | $0$ | | $1$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $\sqrt[3]{4}$ | $\searrow$ | $0$ | $\searrow$ |
| $y'$ | $-$ | $-\infty \mid +\infty$ | $+$ | $0$ | $-$ | $-\infty$ | $-$ |
| $y''$ | $-$ | $\nexists$ | $-$ | $-$ | $-$ | $\nexists$ | $+$ |
| | | min | | max | | точка перегиба | |

**4.** Разложить по формуле Тейлора функцию
$$y = \left(\frac{x^2}{2} + 2x - 3\right) e^{-x^2-4x}$$
а) в окрестности $x_0 = 0$ до $o(x^2)$; б) в окрестности $x_0 = -2$ до $o((x+2)^{2n+1})$.

Р е ш е н и е.

а) $y = \left(\frac{x^2}{2} + 2x - 3\right)\left(1 - x^2 - 4x + \frac{16x^2}{2} + o(x^2)\right) = -3 + 14x - \frac{57}{2}x^2 + o(x^2)$.

б) $y = \frac{(x+2)^2 - 10}{2} e^{-(x+2)^2+4}$.

Сделаем замену переменной, положив $t = x + 2$. Тогда
$$y(x(t)) = \frac{1}{2}(t^2 - 10)e^{4-t^2} =$$
$$= e^4\left(\frac{1}{2}t^2 - 5\right)\left(\sum_{l=0}^{n} \frac{1}{l!}(-t^2)^l + o(t^{2n+1})\right) =$$
$$= \frac{1}{2}e^4 \sum_{l=0}^{n-1} \frac{(-1)^l}{l!} t^{2(l+1)} + 5e^4 \sum_{l=0}^{n} \frac{1}{l!}(-1)^{l+1} t^{2l} + o(t^{2n+1}).$$

Заменив в первой сумме $l + 1$ на $k$, объединим обе суммы, при этом первое слагаемое из второй суммы выпишем отдельно. Получим
$$y(x(t)) = -5e^4 + \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} e^4 \left(\frac{5}{k!} + \frac{1}{(k-1)!2}\right) t^{2k} + o(t^{2n+1}).$$

**Ответ:** а) $y = -3 + 14x - \frac{57x^2}{2} + o(x^2)$;

б) $y = -5e^4 + \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} e^4 \left(\frac{5}{k!} + \frac{1}{(k-1)!2}\right) (x+2)^{2k} +$

$+\, o((x+2)^{2n+1})$.

**5.** Указать все точки непрерывности и точки разрыва, установить тип разрывов функции $f(x)$, определенной на $(-\pi; 2\pi)$, при этом

$$f(x) = \frac{(\pi^2 - 4x^2)\operatorname{tg} x}{|x|}$$

$$\text{при } x \in (-\pi; 2\pi), \quad x \neq 0, \quad x \neq \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi, \quad k = 0, \pm 1;$$

$$f(0) = f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \pi^2, \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 8, \quad f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -8.$$

Р е ш е н и е. В любой точке $x \in (-\pi; 2\pi)$, $x \neq 0$, $x \neq (2k + 1)\dfrac{\pi}{2}$, $k = 0, \pm 1$, функция $f(x)$ непрерывна, как частное.

Исследуем $f(x)$ в точках $x = 0$, $x = \pm\dfrac{\pi}{2}$, $x = \dfrac{3\pi}{2}$.

$\boxed{\boldsymbol{x = 0}}$ :

$$\lim_{x\to+0} f(x) = \lim_{x\to+0} \frac{(\pi^2 - 4x^2)\operatorname{tg} x}{x} = \pi^2 = f(0), \qquad \lim_{x\to-0} f(x) = -\pi^2.$$

$x = 0$ — точка разрыва 1-го рода функции $f(x)$.

$\boxed{\boldsymbol{x = \dfrac{\pi}{2}}}$ : При $x \in \left(\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{3\pi}{4}\right)$

$$f(x) = 4\left(\frac{\pi^2}{4} - x^2\right)\frac{\sin x}{x\cos x}.$$

Заменим переменную, положив $t = \dfrac{\pi}{2} - x$. Тогда

$$f(x) = f\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \frac{4t(\pi - t)\cos t}{\left(\frac{\pi}{2} - t\right)\sin t},$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x) = \lim_{t\to 0} \frac{4t(\pi - t)\cos t}{(\sin t)\left(\frac{\pi}{2} - t\right)} = 8 = f\left(\frac{\pi}{2}\right),$$

$x = \dfrac{\pi}{2}$ — точка непрерывности функции $f(x)$.

$\boxed{\boldsymbol{x = -\dfrac{\pi}{2}}}$ : При $x \in (-\pi; 0)$ функция $f(x)$ отличается от $f(-x)$ лишь знаком, поэтому

$$\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}} f(x) = -8 = f\left(-\frac{\pi}{2}\right),$$

$x = -\dfrac{\pi}{2}$ — точка непрерывности функции $f(x)$.

$\boxed{\boldsymbol{x = \frac{3\pi}{2}}}$ : $\lim\limits_{x\to\frac{3\pi}{2}} f(x) = \infty$, $x = \dfrac{3\pi}{2}$ — точка разрыва 2-го рода функции $f(x)$.

**Ответ:** $x = 0$ — точка разрыва 1-го рода, $x = \dfrac{3\pi}{2}$ — точка разрыва 2-го рода; остальные точки интервала $(-\pi; 2\pi)$ — точки непрерывности функции $f(x)$.

**6.** Найти в точке $(-1;-1)$ значение радиуса кривизны графика функции $y(x)$, заданной уравнением $x^3 + y^3 = 1 + 3y^2x$.

Р е ш е н и е. Дифференцируя дважды тождество

$$x^3 + y^3(x) - 3xy^2(x) - 1 \equiv 0$$

и пользуясь тем, что $y(-1) = -1$, получаем

$$y'(-1) = 0, \quad y''(-1) = -2.$$

По формуле $R = \dfrac{1}{K}$, где $K = \dfrac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}$, вычисляем в точке $(-1;-1)$ значение радиуса кривизны $R = \dfrac{1}{2}$.

**Ответ:** $\dfrac{1}{2}$.

**7.** Найти $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(\sqrt[3]{x^3-3x^2} - x + e^{\frac{1}{x}}\right)\cdot \ln^2 \operatorname{sh} x\right].$

Р е ш е н и е. Найдём для функции $\ln^2 \operatorname{sh} x$ эквивалентную ей при $x \to +\infty$ степенную функцию.

$$\ln \operatorname{sh} x = \ln \frac{[e^x(1-e^{-2x})]}{2} = x - \ln 2 + o(1) = x(1+o(1)),$$

$$\ln^2 \operatorname{sh} x = x^2(1+o(1)) \text{ при } x \to +\infty.$$

Разлагаем при достаточно больших $x$ по степеням $\dfrac{1}{x}$ до $o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ функцию

$$\varphi(x) = \sqrt[3]{x^3-3x^2} - x + e^{\frac{1}{x}}.$$

Получаем

$$\sqrt[3]{x^3-3x^2}-x = x\left(\sqrt[3]{1-\frac{3}{x}}-1\right) = -1-\frac{1}{x}-\frac{5}{3}\frac{1}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right),$$

$$e^{\frac{1}{x}} = 1+\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\frac{1}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right), \quad \varphi(x) = -\frac{7}{6}\frac{1}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Тогда

$$\lim_{x\to+\infty}(\varphi(x)\ln^2 \operatorname{sh} x) = \lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{7}{6}\frac{1}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)x^2 = -\frac{7}{6}.$$

**Ответ:** $-\dfrac{7}{6}$.

**8.** Построить кривую $\quad x = \dfrac{t^2}{t^2-1}, \quad y = t+1+\dfrac{1}{t+1}.$

Р е ш е н и е. 1) Область определения

$$x(t) : (-\infty;-1)\cup(-1;1)\cup(1;+\infty),$$
$$y(t) : (-\infty;-1)\cup(-1;+\infty).$$

2) **Исследование на асимптоты.**

$x\to\infty$ при $t\to\pm1$, $y\to\infty$ при $t\to-1$, $t\to\infty$;

$x=1$ — вертикальная асимптота, так как

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 1, \quad \lim_{t\to\infty} y(t) = \infty;$$

$y = \dfrac{5}{2}$ — горизонтальная асимптота, так как

$$\lim_{t\to 1} x(t) = \infty, \quad \lim_{t\to 1} y(t) = \frac{5}{2};$$

Для отыскания невертикальной асимптоты $y = kx+b$ при $t\to-1$ находим

$$k = \lim_{t\to-1}\frac{y}{x} = \lim_{t\to-1}\frac{(t^2+2t+2)(t-1)}{t^2} = -2,$$

$$b = \lim_{t\to-1}(y+2x) = \lim_{t\to-1}\frac{t^2+2t-2}{t-1} = \frac{3}{2},$$

$y = -2x+\dfrac{3}{2}$ — наклонная асимптота при $t\to-1$.

3) **Вычисление $x'(t)$.**

$$x(t) = 1+\frac{1}{t^2-1}, \quad x'(t) = -\frac{2t}{(t^2-1)^2}.$$

Указываем интервалы $E_k$ изменения $t$, на которых сохраняется знак производной $x'(t)$, а $y(t)$ непрерывна:

$$E_1 = (-\infty; -1), \quad E_2 = (-1; 0), \quad E_3 = (0; 1), \quad E_4 = (1; +\infty).$$

**Вычисление $y'(t)$, $Y'(x)$, $Y''(x)$.**

$$y'(t) = 1 - \frac{1}{(t+1)^2} = \frac{t(t+2)}{(t+1)^2}, \quad Y'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)} = -\frac{1}{2}(t+2)(t-1)^2;$$

$$Y''(x) = \left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)' \frac{1}{x'(t)} = \frac{3}{4}\frac{(t^2-1)^3}{t} = \frac{3}{4}\frac{(t+1)^3(t-1)^3}{t},$$

$$\text{так как} \quad \left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)' = -\frac{1}{2}[(t+2)(t-1)^2]' = -\frac{3}{2}(t^2-1).$$

4) **Заполнение таблицы.**

| | $E_1$ | | | | | $E_2$ | | | $E_3$ | | | $E_4$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $t$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $-1-0$ | $-1+0$ | | $0$ | $0$ | | $1-0$ | $1+0$ | | $+\infty$ |
| $x(t)$ | $1+0$ | $\nearrow$ | $\frac{4}{3}$ | $\nearrow$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $0$ | $0$ | $\searrow$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $1+0$ |
| $x'(t)$ | | $+$ | $+$ | $+$ | | | $+$ | $0$ | $0$ | $-$ | | | $-$ | |
| $y(t)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $-2$ | $\searrow$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $2$ | $2$ | $\nearrow$ | $\frac{5}{2}-0$ | $\frac{5}{2}+0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |
| $y'(t)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | | | $-$ | $0$ | $0$ | $+$ | | | $+$ | |
| $Y'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | | | $-$ | $-1$ | $-1$ | $-$ | | | $-$ | |
| $Y''(x)$ | | $-$ | $-$ | $-$ | | | $+$ | $\nexists$ | $\nexists$ | $-$ | | | $+$ | |

5) **Построение кривой** см. рис. 6 на с. 23.
$t = 0$, $A(0; 2)$ — точка возврата, $\operatorname{tg}\alpha_{\text{кас}} = -1$;
$t = -2$, $B\left(\frac{4}{3}; -2\right)$, $x = \frac{4}{3}$ — точка максимума $Y(x)$.

**9.** Установить, сходится или расходится последовательность $\{x_n\}$, $x_n > 0$, $n = 1, 2, \ldots$, если $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^2 = 4$.

Р е ш е н и е. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n} = 2$, $\frac{x_{n+1}}{x_n} \geqslant \frac{3}{2} > 1$ при $n \geqslant n_0$. Последовательность $\{x_n\}$ строго возрастающая при $n \geqslant n_0$. По условию $x_n > 0$, $n = 1, 2, \ldots$

Если бы последовательность $\{x_n\}$ была ограничена сверху, то существовал бы конечный предел

$$\lim_{n\to\infty} x_n = C > 0, \quad \lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{C}{C} = 1,$$

что абсурдно.

Следовательно, последовательность $\{x_n\}$ неограничена сверху и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, $\{x_n\}$ расходится.

**Ответ:** Расходится.

## Вариант И

**1.** Вычислить интегралы

а) ③ $\displaystyle\int e^{-2x} \operatorname{arcctg} e^{2x}\, dx$; б) ④ $\displaystyle\int \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}\, dx$.

**2.**⑤ Найти $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x\sqrt{1+x}) + \ln(1+x+x^2) - \arcsin x - 1}{e^{\operatorname{tg} x} - \operatorname{ch} x - x}$.

**3.** Построить графики функций

а) ④ $y = \dfrac{(2-x)^5}{(x-1)^4}$; б) ⑤ $y = \sqrt[3]{x^2(6-|x|)}$.

**4.** Разложить по формуле Тейлора функцию

$$y = \left(\frac{x^2}{2} + x\right)\sqrt{1-3x}$$

а) ② в окрестности $x_0 = 0$ до $o(x^3)$;
б) ④ в окрестности $x_0 = -1$ до $o((x+1)^n)$;

**5.**④ Указать все точки непрерывности и точки разрыва, установить тип разрывов функции $f(x)$, определенной на $(-\pi; 2\pi)$, при этом

$$f(x) = \frac{(\pi+2x)^2|\pi-2x|}{\cos x}$$

$$\text{при } x \in (-\pi; 2\pi), \quad x \neq \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi, \quad k = 0, \pm 1;$$

$$f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 4\pi^2.$$

**6.**④ Найти в точке $(-1; 2)$ значение радиуса кривизны графика функции $y(x)$, заданной уравнением $3x^2y + y^3 = 15 + x^3$.

**7.**⑤ Найти $\displaystyle\lim_{x\to +0} \left(e^{x \operatorname{ctg} x - 1} + \frac{x^2}{3}\right)^{\frac{1}{x^4} + \ln^3 x}$.

**8.**⑦ Построить кривую $x = \dfrac{1}{t(t+1)}$, $y = \dfrac{(t-1)^2}{t}$.

**9.**③ Установить, сходится или расходится последовательность

$\{x_n\}$, $x_n > 0$, $n = 1, 2, \ldots$, если $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{x_{n+1}} = \dfrac{1}{5}$.

## Ответы к варианту И

**1.** а) $-\dfrac{1}{2}e^{-2x}\operatorname{arcctg} e^{2x} + \dfrac{1}{4}\ln(1+e^{-4x}) + C = -\dfrac{1}{2}e^{-2x}\operatorname{arcctg} e^{2x} + \dfrac{1}{4}\ln(1+e^{4x}) - x + C$;

б) $-\dfrac{1}{2}\ln|1+\operatorname{tg} x| - \dfrac{1}{2}\ln|\cos x| + \dfrac{1}{2}x + C = -\dfrac{1}{2}\ln|\cos x + \sin x| + \dfrac{x}{2} + C$.

**2.** $\boxed{-\dfrac{8}{3}}$; $\cos(x\sqrt{1+x}) = 1 - \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{2}x^3 + o(x^3)$;

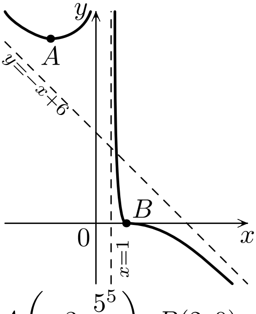
$e^{\operatorname{tg} x} = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{2} + o(x^3)$; $\ln(1+x+x^2) = x + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{2}{3}x^3 + o(x^3)$; числитель: $-\dfrac{4}{3}x^3 + o(x^3)$; знаменатель: $\dfrac{x^3}{2} + o(x^3)$.

**3.** а) Асимптоты: $x = 1$, $y = -x + 6$; график на рис. 7;

$$y' = -\frac{(x-2)^4(x+3)}{(x-1)^5},\quad y'' = -20\frac{(x-2)^3}{(x-1)^6}.$$

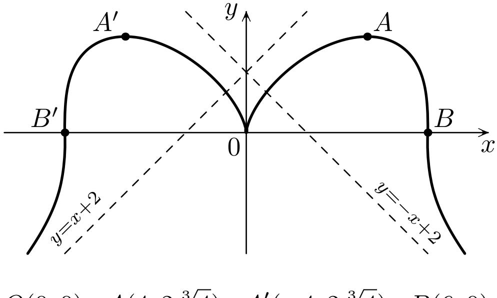
б) Функция четная. При $x > 0$: $y' = -\dfrac{x-4}{x^{1/3}(x-6)^{2/3}}$, $y'' = \dfrac{8}{x^{4/3}(x-6)^{5/3}}$;

Асимптоты: $y = -x + 2$ $(x \to +\infty)$, $y = x + 2$ $(x \to -\infty)$; график на рис. 8.




$A\left(-3; \dfrac{5^5}{4^4}\right)$, $B(2;0)$.

Рис. 7




$O(0;0)$, $A(4; 2\sqrt[3]{4})$, $A'(-4; 2\sqrt[3]{4})$, $B(6;0)$, $B'(-6;0)$.

Рис. 8

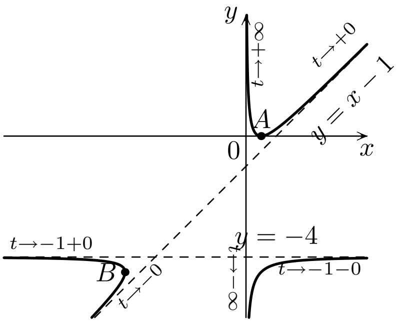
**4.** а) $y = x - x^2 - \dfrac{15}{8}x^3 + o(x^3)$; б) $y = -1 + \dfrac{3}{8}(x+1) +$
$$+\sum_{k=2}^{n}(-1)^k\frac{3^k}{4^k}\left(\frac{16}{9}C_{1/2}^{k-2} - C_{1/2}^{k}\right)(x+1)^k + o((x+1)^n).$$

**5.** $x = \dfrac{\pi}{2}$ — точка разрыва 1-го рода, $x = \dfrac{3\pi}{2}$ — точка разрыва 2-го рода; остальные точки интервала $(-\pi; 2\pi)$ — точки непрерывности.

**6.** $R = \dfrac{5\sqrt{2}}{3}$ $\left(y' = 1,\ y'' = -\dfrac{6}{5}\right)$.

**7.** $\boxed{e^{1/30}}$; $e^{x \operatorname{ctg} x - 1} = 1 - \dfrac{x^2}{3} + \dfrac{x^4}{30} + o(x^4)$.

**8.** Асимптоты: $y = -4$ $(t \to -1 \pm 0)$, $x = 0$ $(t \to \pm\infty)$, $y = x - 1$ $(t \to \pm 0)$; $x'_t = -\dfrac{2(t+1/2)}{(t+1)^2t^2}$, $y'_t = \dfrac{t^2-1}{t^2}$, $y'_x = -\dfrac{(t+1)^3(t-1)}{2(t+1/2)}$, $y''_{xx} = \dfrac{6t^4(t+1)^4}{(2t+1)^3}$, кривая на рис. 9.




$A\left(\dfrac{1}{2}; 0\right)$ $(t = 1)$, $B\left(-4; -\dfrac{9}{2}\right)$ $\left(t = -\dfrac{1}{2}\right)$.

В точке $B$ касательная вертикальна.

Рис. 9

**9.** Расходится.

## Вариант O

**1.** Вычислить интегралы

а) ③ $\int \cos x \ln(2-\cos^2 x)\, dx$; б) ④ $\int \dfrac{x^8}{(1-x^3)^{3/2}}\, dx$.

**2.**⑤ Найти $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sqrt[3]{1+3x-x^2}+\arcsin(\operatorname{tg} x)-1+\frac{4}{3}x^2}{2\operatorname{arctg} x}\right)^{\frac{1}{x \operatorname{sh} x}}$.

**3.** Построить графики функций

а) ④ $y = 1 - \dfrac{(x+2)^3}{x^2}$; б) ⑤ $y = \sqrt[3]{(x+1)^2(8x-4)}$.

**4.** Разложить по формуле Тейлора функцию

$$y = (x^2-6x)e^{6-2x}$$

а) ② в окрестности $x_0 = 0$ до $o(x^3)$;
б) ④ в окрестности $x_0 = 3$ до $o((x-3)^n)$;

**5.**④ Указать все точки непрерывности и точки разрыва, установить тип разрывов функции $f(x)$, определенной на $\left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{3\pi}{2}\right)$, при этом

$$f(x) = \frac{|x| \operatorname{ctg} x}{1+2^{\frac{2}{2x-\pi}}}$$

$$\text{при } x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right), \quad x \neq \frac{k\pi}{2}, \quad k = 0, 1, 2;$$

$$f(0) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = f(\pi) = 0.$$

**6.**④ Найти в точке $(2; -1)$ значение радиуса кривизны графика функции $y(x)$, заданной уравнением $x^3 + 3x^2y + y^3 + 5 = 0$.

**7.**⑤ Найти $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(\sqrt{x+4}-\sqrt{x}-\sin\dfrac{2}{\sqrt{x}}\right)^2 \cdot \ln^3 \operatorname{ch} x\right]$.

**8.**⑦ Построить кривую $x = t + \dfrac{1}{t}$, $y = 2t + \dfrac{8}{t+1}$.

**9.**③ Установить, сходится или расходится последовательность $\{x_n\}$, $x_n > 0$, $n = 1, 2, \ldots$, если $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right)^2 = \dfrac{1}{4}$.

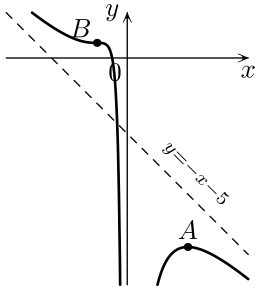
## Ответы к варианту О

**1.** а) $\sin x \cdot \ln(1+\sin^2 x) - 2\sin x + 2\,\mathrm{arctg}(\sin x) + C$; б) $\dfrac{2}{3(1-x^3)^{1/2}} + \dfrac{4}{3}(1-x^3)^{1/2} - \dfrac{2}{9}(1-x^3)^{3/2} + C$.

**2.** $\boxed{e^{7/4}}$; $\sqrt[3]{1+3x-x^2} = 1 + x - \dfrac{4}{3}x^2 + \dfrac{7}{3}x^3 + o(x^3)$.

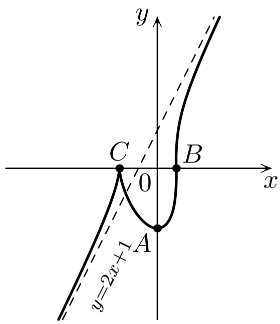
**3.** а) Асимптоты: $x=0$, $y=-x-5$; график на рис. 10; $y' = -\dfrac{(x+2)^2(x-4)}{x^3}$, $y'' = \dfrac{-24(x+2)}{x^4}$.

б) Асимптота: $y = 2x+1$; $y' = \dfrac{2x}{(x+1)^{1/3}(x-1/2)^{2/3}}$, $y'' = -\dfrac{1}{(x+1)^{4/3}(x-1/2)^{5/3}}$, график на рис. 11.




$A\left(4; \dfrac{-25}{2}\right)$, $B(-2;1)$

Рис. 10




$A(0;-2^{2/3})$, $B\left(\dfrac{1}{2};0\right)$, $C(-1;0)$

Рис. 11

**4.** а) $y = e^6(-6x+13x^2-14x^3) + o(x^3)$; б) $y = -9 + 18(x-3) + \sum\limits_{k=2}^{n}(-1)^k 2^k \left(\dfrac{1}{4(k-2)!} - \dfrac{9}{k!}\right)(x-3)^k + o((x-3)^n)$.

**5.** $x=0$ — точка разрыва 1-го рода, $x=\pi$ — точка разрыва 2-го рода; остальные точки интервала $\left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{3\pi}{2}\right)$ — точки непрерывности.

**6.** $R = \dfrac{5}{2}$ ($y'=0$, $y'' = -\dfrac{2}{5}$).

**7.** $\boxed{\dfrac{4}{9}}$; $\sqrt{x+4}-\sqrt{x}=\dfrac{2}{\sqrt{x}}-\dfrac{2}{x^{3/2}}+o\left(\dfrac{1}{x^{3/2}}\right)$.

**8.** Асимптоты: $y=8$ $(t\to\pm0)$, $x=-2$ $(t\to-1\pm0)$, $y=2x$ $(t\to\pm\infty)$; $x'_t=\dfrac{t^2-1}{t^2}$, $y'_t=\dfrac{2(t-1)(t+3)}{(t+1)^2}$, $y'_x=\dfrac{2(t+3)t^2}{(t+1)^3}$, $y''_{xx}=\dfrac{12t^3}{(t+1)^5(t-1)}$, кривая на рис. 12.

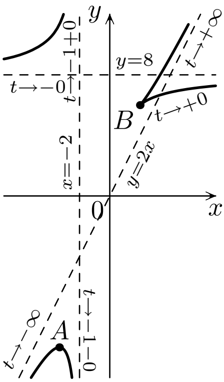



Рис. 12

$A\left(-\dfrac{10}{3};-10\right)$ $(t=-3)$;

**9.** Сходится.

# § 2. Экзаменационная работа по математическому анализу 1-го семестра 1996/1997 уч.г. для студентов 1-го курса

## Вариант 71

**1.** Вычислить интегралы

а) ③ $\int \cos x \ln(1+\cos x)\,dx$; б) ④ $\int \frac{(1+x^4)^{\frac{3}{2}}}{x}\,dx.$

**2.**⑤ Найти предел функции

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x\cos x)-\operatorname{arctg} x}{e^{\operatorname{tg} x}-\sqrt[3]{1+3x}+3\ln\cos x}.$$

**3.**④ Построить график функции

$$y=\sqrt[3]{x^2(9-8x)}.$$

**4.**④ Разложить по формуле Тейлора в окрестности точки $x=-1$ до $o((x+1)^{2n+1})$ функцию

$$y=(x^2+2x-3)\sqrt{1-6x-3x^2}.$$

**5.**④ Найти в точке $(\sqrt{2};1)$ кривизну графика функции $y=y(x)$, заданной неявно уравнением

$$y^5+y-x^2=0.$$

**6.**④ Найти предел функции

$$\lim_{x\to+0}\left(1+\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{\arcsin x}\right)^{\frac{1}{x}+\ln^2 x}.$$

**7.**⑦ Построить кривую

$$x(t)=\frac{t-t^2-4}{t},\quad y(t)=\frac{(t-1)^2}{t}.$$

**8.**④ Доказать, что последовательность $\{x_n\}$ имеет предел, и найти его, если

$$x_1=1,\quad x_{n+1}=\frac{x_n^2}{4}+1.$$

## Ответы к варианту 71

**1.** а) $\sin x \ln(1+\cos x) + x - \sin x + C$.

б) $\frac{1}{6}(1+x^4)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}(1+x^4)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{4}\ln\frac{\sqrt{1+x^4}-1}{\sqrt{1+x^4}+1} + C$.

**2.** $\boxed{\frac{2}{7}}$; $\sin(x\cos x) = x - \frac{2}{3}x^3 + o(x^4)$; $\ln\cos x = -\frac{x^2}{2} + o(x^3)$; числитель: $-\frac{x^3}{3} + o(x^3)$, знаменатель: $-\frac{7}{6}x^3 + o(x^3)$.

**3.** Асимптота $y = -2x + \frac{3}{4}$;

$$y' = -2\frac{x-\frac{3}{4}}{x^{\frac{1}{3}}\left(x-\frac{9}{8}\right)^{\frac{2}{3}}}, \quad y'' = \frac{9}{16}\frac{1}{x^{\frac{4}{3}}\left(x-\frac{9}{8}\right)^{\frac{5}{3}}};$$

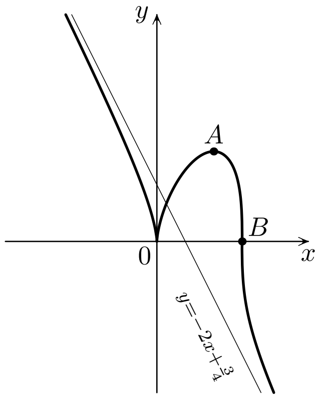



Рис. 13

$A\left(\frac{3}{4}; \frac{3}{2\sqrt[3]{2}}\right)$, $x = \frac{3}{4}$ — точка максимума $y$,
$O(0;0)$, $x = 0$ — точка минимума $y$,
$B\left(\frac{9}{8}; 0\right)$, $x = \frac{9}{8}$ — точка перегиба с вертикальной касательной.

**4.** $y = -8 + \sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{3^{k-1}}{2^{2k-3}}\left(C_{\frac{1}{2}}^{k-1} + 3C_{\frac{1}{2}}^{k}\right)(x+1)^{2k} + o((x+1)^{2n+1})$.

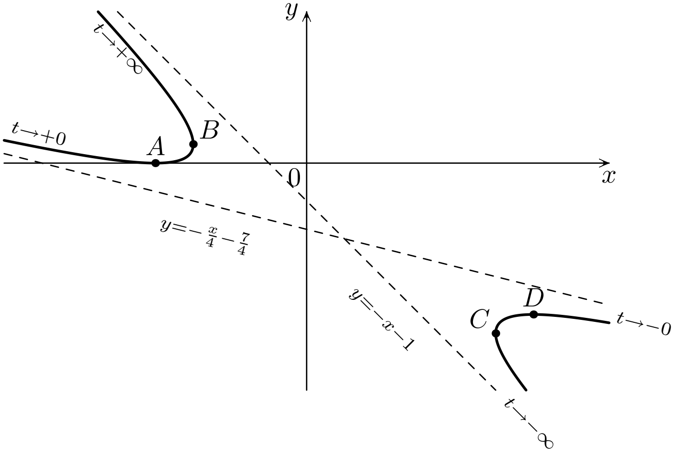
**5.** $K = \frac{1}{\sqrt{11}}$ ($y' = \frac{\sqrt{2}}{3}$, $y'' = -\frac{11}{27}$).

**6.** $\boxed{e^{\frac{1}{3}}}$. $\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\arcsin x} = \frac{x}{3} + o(x^2)$.

**7.** Асимптоты: $y = -\frac{x}{4} - \frac{7}{4}$ ($t \to \pm 0$), $y = -x - 1$ ($t \to \pm\infty$).

$$x'_t = \frac{4-t^2}{t^2} = -\frac{(t+2)(t-2)}{t^2}, \quad y'_t = \frac{t^2-1}{t^2} = \frac{(t+1)(t-1)}{t^2},$$

$$y'_x = \frac{t^2-1}{4-t^2}, \quad y''_{xx} = \frac{6t^3}{(4-t^2)^3} = \frac{-6t^3}{(t+2)^3(t-2)^3}.$$




$A(-4;0)$ $(t=1)$, $B\left(-3;\dfrac{1}{2}\right)$ $(t=2)$, $C\left(5;-\dfrac{9}{2}\right)$ $(t=-2)$;
в точках $B$ и $C$ касательные вертикальны;
$D(6;-4)$ $(t=-1)$.

Рис. 14

**8.** $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$.

## Вариант 72

**1.** Вычислить интегралы

а) ③ $\displaystyle\int x^5 \operatorname{arctg} x\, dx$, б) ④ $\displaystyle\int \frac{\operatorname{tg}^5 x}{1+\cos^2 x}\, dx$.

**2.**⑤ Найти предел функции

$$\lim_{x\to 0}\left(e^{\sin x}+\frac{\arcsin 2x}{x-2}\right)^{\frac{1}{x \ln \operatorname{ch} x}}$$

**3.**⑤ Построить график функции

$$y=\sqrt{(2-x)|x+2|}-x.$$

**4.**④ Разложить по формуле Тейлора в окрестности точки $x=-3$ до $o((x+3)^{2n+1})$ функцию

$$y=\left(\frac{x^2}{3}+2x-1\right)\cos(2x+6).$$

**5.**④ Найти в точке $(1;1)$ кривизну графика функции $y=y(x)$, заданной неявно уравнением

$$y^3+y-2x^3=0.$$

**6.**④ Найти предел функции

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x(\sqrt{x^2+x}-x)+(\cos x)\ln x}{\ln(1+\operatorname{ch} x)}.$$

**7.**⑦ Построить кривую

$$x=\frac{t^2}{2}+t,\quad y=\frac{t^2+3}{t-1}.$$

**8.**④ Доказать, что последовательность $\{x_n\}$ имеет предел, и найти его, если

$$x_1=0,\quad x_{n+1}=\frac{1+x_n}{2+x_n}.$$

## Ответы к варианту 72

**1.** а) $\dfrac{1}{6}(x^6+1)\operatorname{arctg} x - \dfrac{1}{30}x^5 + \dfrac{1}{18}x^3 - \dfrac{1}{6}x + C$;

б) $\dfrac{1}{4}\operatorname{tg}^4 x - \operatorname{tg}^2 x + 2\ln(\operatorname{tg}^2 x + 2) + C$.

**2.** $\boxed{e^{-11/6}}$; $e^{\sin x} = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + o(x^3)$;

$\dfrac{\arcsin 2x}{x-2} = -x - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{11}{12}x^3 + o(x^3)$.

**3.** Область определения $x \leqslant 2$.

Асимптота $y = -2x$ при $x \to -\infty$.

$$y' = \begin{cases} -\dfrac{x+\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{4-x^2}} = \dfrac{2(x^2-2)}{\sqrt{4-x^2}(\sqrt{4-x^2}-x)}, & |x| < 2, \\ \dfrac{x-\sqrt{x^2-4}}{\sqrt{x^2-4}}, & x < -2; \end{cases}$$

$$y'' = \begin{cases} -\dfrac{4}{(4-x^2)^{3/2}}, & |x| < 2, \\ -\dfrac{4}{(x^2-4)^{3/2}}, & x < -2. \end{cases}$$

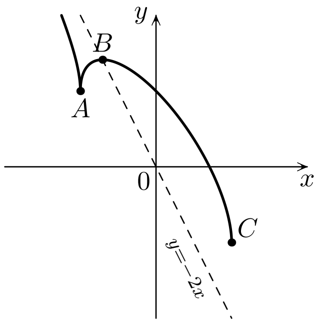



Рис. 15

$A(-2;2)$,
$x=-2$ — точка минимума $y(x)$,
$B(-\sqrt{2}; 2\sqrt{2})$,
$x = -\sqrt{2}$ — точка максимума $y(x)$,
$C(2;-2)$,
$x = 2$ — точка краевого минимума $y(x)$,
касательные в точках $A$ и $C$ вертикальные.

**4.** $y = -4 + \sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}2^{2k}\left[\dfrac{1}{12(2k-2)!} + \dfrac{4}{(2k)!}\right](x+3)^{2k} + {}$
$+ o((x+3)^{2n+1})$.

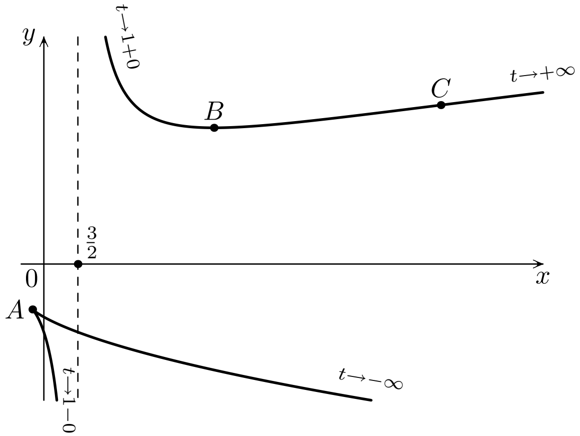
**5.** $K = \dfrac{3}{13\sqrt{13}}$ $\left(y' = \dfrac{3}{2},\ y'' = -\dfrac{3}{8}\right)$.

**6.** $\boxed{\dfrac{1}{2}}$; $x(\sqrt{x^2+x}-x)=x^2\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}-1\right)=\dfrac{x}{2}+o(x)$ при $x\to$ $\to+\infty$, $\ln(1+\operatorname{ch}x)=x+o(x)$.

**7.** Асимптота $x=\dfrac{3}{2}$ $(t\to 1\pm 0)$.

$$x'_t=t+1,\quad y'_t=\frac{(t+1)(t-3)}{(t-1)^2},$$

$$y'_x=\frac{t-3}{(t-1)^2},\quad y''_{xx}=-\frac{t-5}{(t+1)(t-1)^3}.$$




$A\left(-\dfrac{1}{2};-2\right)$ $(t=-1)$ — точка возврата, $\operatorname{tg}\alpha_{\text{кас}}=-1$;
$B\left(\dfrac{15}{2};6\right)$ $(t=3)$; $C\left(\dfrac{35}{2};7\right)$ $(t=5)$,
$x=\dfrac{35}{2}$ — точка перегиба, $\operatorname{tg}\alpha_{\text{кас}}=\dfrac{1}{8}$.

Рис. 16

**8.** $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$.

## Решения задач №7 и №8 варианта 72

**7.** Построить кривую

$$x=\frac{t^2}{2}+t,\quad y=\frac{t^2+3}{t-1}.$$

Р е ш е н и е. 1) **Область определения**

$$x(t):\ (-\infty;+\infty),\quad y(t):\ (-\infty;1)\cup(1;+\infty).$$

2) **Исследование на асимптоты.**
$x\to+\infty$ при $t\to\pm\infty$; $y\to\pm\infty$ при $t\to\pm\infty$, $t\to1\pm0$; $x=\dfrac{3}{2}$ — вертикальная асимптота при $t\to1$; невертикальных асимптот нет, так как

$$\lim_{t\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{t\to\infty}\frac{2(t^2+3)}{t(t+2)(t-1)}=0,\qquad \lim_{t\to\infty}(y-0x)=\lim_{t\to\infty}y=\infty.$$

3) **Вычисление** $x'(t)$. $x'(t)=t+1$.

Указываем интервалы $E_k$ изменения $t$, на которых сохраняется знак $x'(t)$, а $y(t)$ непрерывна:

$$E_1=(-\infty;-1),\quad E_2=(-1;1),\quad E_3=(1;+\infty).$$

**Вычисление** $y'(t)$**,** $Y'(x)$**,** $Y''(x)$.

$$y=t+1+\frac{4}{t-1},\quad y'(t)=1-\frac{4}{(t-1)^2}=\frac{(t+1)(t-3)}{(t-1)^2},$$

$$Y'(x)=\frac{t-3}{(t-1)^2},$$

$$Y''(x)=\left(\frac{t-3}{(t-1)^2}\right)'\frac{1}{t+1}=\left(\frac{1}{t-1}-\frac{2}{(t-1)^2}\right)'\frac{1}{t+1}=$$
$$=-\frac{t-5}{(t+1)(t-1)^3}.$$

4) **Заполнение таблицы**.

| | $E_1$ | | | $E_2$ | | | $E_3$ | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $t$ | $-\infty$ | | $-1$ | $-1$ | | $1-0$ | $1+0$ | | $3$ | | $5$ | | $+\infty$ |
| $x(t)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | $\nearrow$ | $\frac{3}{2}-0$ | $\frac{3}{2}+0$ | $\nearrow$ | $\frac{15}{2}$ | $\nearrow$ | $\frac{35}{2}$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |
| $x'(t)$ | | $-$ | $0$ | $0$ | $+$ | | | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ | |
| $y(t)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $-2$ | $-2$ | $\searrow$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $6$ | $\nearrow$ | $7$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |
| $y'(t)$ | | $+$ | $0$ | $0$ | $-$ | | | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ | |
| $Y'(x)$ | | $-$ | $-1$ | $-1$ | $-$ | | | $-$ | $0$ | $+$ | $\frac{1}{8}$ | $+$ | |
| $Y''(x)$ | | $+$ | $\nexists$ | $\nexists$ | $-$ | | | $+$ | $+$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

5) **Построение кривой**.

См. рис. 16 на с. 42.

**8.** Доказать, что последовательность $\{x_n\}$ имеет предел, и найти его, если

$$x_1 = 0, \quad x_{n+1} = \frac{1 + x_n}{2 + x_n}. \tag{1}$$

Р е ш е н и е. Имеем $x_1 = 0$, $x_2 = \dfrac{1}{2} > 0$. Пусть $x_n > 0$. Тогда $x_{n+1} = \dfrac{1 + x_n}{2 + x_n} > 0$. По индукции доказано, что $x_n > 0$, $n = 2, 3, \ldots$

Докажем монотонность последовательности $\{x_n\}$. Имеем $x_2 - x_1 = \dfrac{1}{2} > 0$. Пусть $x_n - x_{n-1} > 0$. Тогда

$$x_{n+1} - x_n = \frac{x_n - x_{n-1}}{(2 + x_n)(2 + x_{n-1})} > 0.$$

По индукции доказано, что последовательность $\{x_n\}$ строго возрастающая.

Из формулы (1) следует, что $x_n < 1$, $n = 1, 2, \ldots$

Следовательно, существует конечный

$$\lim_{n\to\infty} x_n = C.$$

Переходя к пределу в формуле (1), получаем

$$C = \frac{1 + C}{2 + C},$$

откуда заключаем, что $C = \dfrac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$, а не $-\dfrac{1}{2}(\sqrt{5} + 1)$, так как $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ не может быть отрицательным.

**Ответ:** $\dfrac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$.

## Вариант 73

**1.** Вычислить интегралы

а) ③ $\displaystyle\int \sin x \ln(1+\sin x)\,dx$, б) ④ $\displaystyle\int \frac{\sqrt[4]{x^5}\,dx}{(1-\sqrt[4]{x^3})^{\frac{4}{3}}}$.

**2.**⑤ Найти предел функции

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+\sin 2x}-\cos x-\operatorname{sh} x}{e^{\frac{x}{1-x}}-\operatorname{ch} x+\frac{1}{2}\ln(1-2x)}.$$

**3.**⑤ Построить график функции

$$y=\sqrt[3]{x^2(x-6)}.$$

**4.**④ Разложить по формуле Тейлора в окрестности точки $x=2$ до $o((x-2)^{2n+1})$ функцию

$$y=\left(\frac{x^2}{4}-x+4\right)e^{2x-\frac{x^2}{2}}.$$

**5.**④ Найти в точке $(1;1)$ кривизну графика функции $y=y(x)$, заданной неявно уравнением

$$y^5+y-2x^3=0.$$

**6.**④ Найти предел функции

$$\lim_{x\to +0}\left(\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{arctg} x}\right)^{\frac{1}{x^2}+\ln x}.$$

**7.**⑦ Построить кривую

$$x=\frac{t^2}{t-2},\quad y=\frac{t^2-3}{t-2}.$$

**8.**④ Доказать, что последовательность $\{x_n\}$ имеет предел, и найти его, если

$$x_1=0,\quad x_{n+1}=x_n^2+\frac{1}{4}.$$

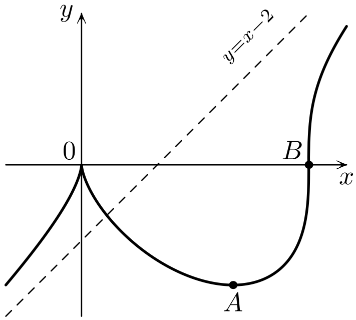
## Ответы к варианту 73

**1.** а) $-\cos x \ln(1+\sin x) + x + \cos x + C$. б) $\dfrac{4}{5}(\sqrt[4]{x^3}-1)^{5/3} + 4(\sqrt[4]{x^3}-1)^{2/3} + \dfrac{4}{(1-\sqrt[4]{x^3})^{1/3}} + C$.

**2.** $\boxed{-\dfrac{2}{5}}$; $\sqrt{1+\sin 2x} = 1 + x - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)$; $e^{\frac{x}{1-x}} = 1 + x + \dfrac{3}{2}x^2 + \dfrac{13}{6}x^3 + o(x^3)$; числитель: $-\dfrac{x^3}{3} + o(x^3)$, знаменатель: $\dfrac{5}{6}x^3 + o(x^3)$.

**3.** Асимптота: $y = x - 2$.

$$y' = \frac{x-4}{x^{1/3}(x-6)^{2/3}}, \quad y'' = -\frac{8}{x^{4/3}(x-6)^{5/3}}.$$




$O(0;0)$, $x = 0$ — точка максимума $y(x)$;
$A(4;-2\sqrt[3]{4})$, $x = 4$ — точка минимума $y(x)$;
$B(6;0)$, $x = 6$ — точка перегиба с вертикальной касательной.

Рис. 17

**4.** $y = 3e^2 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k e^2}{2^k (k-1)!}\left(\frac{3}{k} - \frac{1}{2}\right)(x-2)^{2k} + o((x-2)^{2n+1})$.

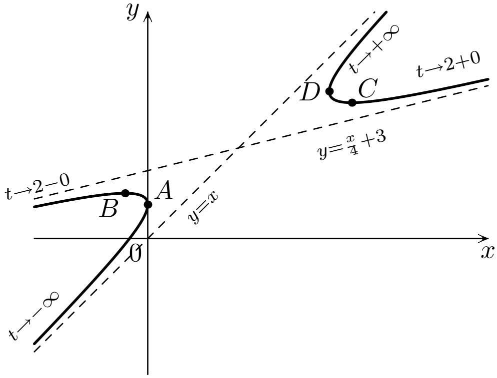
**5.** $K = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$ $\left(y'(1) = 1,\ y''(1) = -\dfrac{4}{3}\right)$.

**6.** $\boxed{e^{\frac{1}{2}}}$; $\dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{arctg} x} = 1 + \dfrac{x^2}{2} + o(x^3)$.

**7.** Асимптоты: $y = \dfrac{x}{4} + 3$ $(t \to 2 \pm 0)$, $y = x$ $(t \to \pm\infty)$.

$$x'_t = \frac{t(t-4)}{(t-2)^2}, \quad y'_t = \frac{(t-1)(t-3)}{(t-2)^2},$$

$$y'_x = \frac{(t-1)(t-3)}{t(t-4)}, \quad y''_{xx} = -\frac{6(t-2)^3}{t^3(t-4)^3}.$$




$A\left(0; \dfrac{3}{2}\right)$ $(t = 0)$, касательная в точке $A$ вертикальна;

$B(-1; 2)$ $(t = 1)$; $C(9; 6)$ $(t = 3)$; $D\left(8; \dfrac{13}{2}\right)$ $(t = 4)$,

касательная в точке $D$ вертикальна.

Рис. 18

**8.** $\lim\limits_{x \to \infty} x_n = \dfrac{1}{2}$.

## Вариант 74

**1.** Вычислить интегралы

а) ③ $\displaystyle\int (x^3+2)\,\mathrm{arctg}\,x\,dx$, б) ④ $\displaystyle\int \frac{\cos^4 x \sin 2x}{(1+\sin^2 x)^{\frac{3}{4}}}\,dx.$

**2.**⑤ Найти предел функции

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sqrt{1+2x}}-\frac{\ln(1+3\,\mathrm{tg}\,x)}{x^2-3}\right)^{\frac{1}{\mathrm{sh}\,x-x}}.$$

**3.**⑤ Построить график функции

$$y=2x-\sqrt{(x+1)|x-1|}.$$

**4.**④ Разложить по формуле Тейлора в окрестности точки $x=\dfrac{1}{3}$ до $o\left(\left(x-\dfrac{1}{3}\right)^{2n+2}\right)$ функцию

$$y=(-3x^2+2x+1)\sin(3x-1).$$

**5.**④ Найти в точке $(\sqrt{2};1)$ кривизну графика функции $y=y(x)$, заданной неявно уравнением

$$x^2-y-y^3=0.$$

**6.**④ Найти предел функции

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2(\sqrt[3]{x^3+x}-x)+(\sin x)\ln(1+x)}{\ln(1+x+e^{5x})}.$$

**7.**⑦ Построить кривую

$$x=\frac{t^2+3}{t+1},\quad y=\frac{t^3+9t^2}{3(t+1)}.$$

**8.**④ Доказать, что последовательность $\{x_n\}$ имеет предел, и найти его, если

$$0<x_1<1,\quad x_{n+1}=1-x_n^2+x_n^3.$$

## Ответы к варианту 74

**1.** а) $\left(\dfrac{x^4}{4}+2x-\dfrac{1}{4}\right)\operatorname{arctg} x-\ln(x^2+1)-\dfrac{x^3}{12}+\dfrac{x}{4}+C$;

б) $16\left(1+\sin^2 x\right)^{\frac{1}{4}}-\dfrac{16}{5}(1+\sin^2 x)^{\frac{5}{4}}+\dfrac{4}{9}(1+\sin^2 x)^{\frac{9}{4}}+C$.

**2.** $\boxed{e^7}$; $\ln(1+3\operatorname{tg} x)=3x-\dfrac{9}{2}x^2+10x^3+o(x^3)$; $\dfrac{1}{3-x^2}=\dfrac{1}{3}+\dfrac{x^2}{9}+$ $+\,o(x^3)$.

**3.** Область определения $x\geqslant -1$.

Асимптота $y=x$ при $x\to+\infty$.

$$y'=\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{1-x^2}+x}{\sqrt{1-x^2}}=\dfrac{5\left(\frac{4}{5}-x^2\right)}{(2\sqrt{1-x^2}-x)\sqrt{1-x^2}}, & |x|<1,\\ \dfrac{2\sqrt{x^2-1}-x}{\sqrt{x^2-1}}=\dfrac{3\left(x^2-\frac{4}{3}\right)}{(2\sqrt{x^2-1}+x)\sqrt{x^2-1}}, & x>1.\end{cases}$$

$$y''=\begin{cases}\dfrac{1}{(1-x^2)^{3/2}}, & |x|<1,\\ \dfrac{1}{(x^2-1)^{3/2}}, & x>1.\end{cases}$$

Касательные в точках $A$ и $C$ вертикальны.

График на рис. 19.

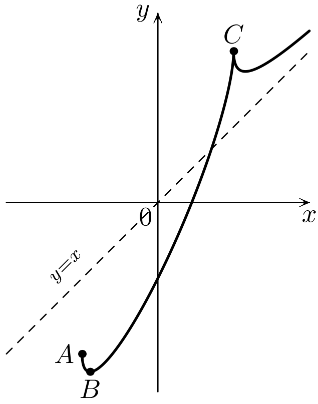



Рис. 19

$A(-1;-2)$, $x=-1$ — точка краевого максимума $y(x)$;
$B\left(-\dfrac{2}{\sqrt{5}};-\sqrt{5}\right)$,
$x=-\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ — точка минимума $y$;
$C(1;2)$, $x=1$ — точка $\max y(x)$.

**4.** $y \;=\; 4\left(x-\dfrac{1}{3}\right)+\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^k 3^{2k}\left[\dfrac{4}{(2k+1)!}+\dfrac{1}{(2k-1)!}\right]\times$

$$\times\left(x-\frac{1}{3}\right)^{2k+1}+o\left(\left(x-\frac{1}{3}\right)^{2n+2}\right).$$

**5.** $K=\dfrac{1}{3\sqrt{6}}$ $\left(y'=\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ y''=-\dfrac{1}{4}\right)$.

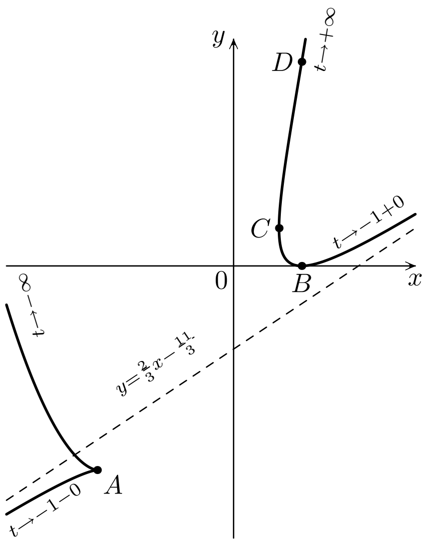
**6.** $\boxed{\dfrac{1}{15}}$; $(\sqrt[3]{x^3+x}-x)x^2=x^3\left(\sqrt[3]{1+\dfrac{1}{x^2}}-1\right)=\dfrac{x}{3}+o(1)$ при $x\to+\infty$, $\ln(1+x+e^{5x})=5x+o(1)$ при $x\to+\infty$.

**7.** Асимптота $y=\dfrac{2}{3}x-\dfrac{11}{3}$ $(t\to-1\pm0)$.

$$x'_t=\frac{(t+3)(t-1)}{(t+1)^2},\quad y'_t=\frac{2t(t+3)^2}{3(t+1)^2},$$

$$y'_x=\frac{2t(t+3)}{3(t-1)},\quad y''_{xx}=\frac{2(t-3)(t+1)^3}{3(t+3)(t-1)^3}.$$

Кривая на рис. 20.




$A(-6;-9)$ $(t=-3)$ — точка возврата, касательная горизонтальна;
$B(3;0)$ $(t=0)$;
$C\left(2;\dfrac{5}{3}\right)$ $(t=1)$, касательная в точке $C$ вертикальна;
$D(3;9)$ $(t=3)$,
$x=3$ — точка перегиба,
$\operatorname{tg}\alpha_{\text{кас}}=6$.

Рис. 20

**8.** $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кудрявцев Л.Д.* Краткий курс математического анализа. Т. 1. – М.: Наука, 1998, 2002.
2. *Никольский С.М.* Курс математического анализа. Т. 1. – М.: Наука, 1983, 2000.
3. *Яковлев Г.Н.* Лекции по математическому анализу. Ч. 1. – М.: Физматлит, 2001, 2004.
4. *Тер-Крикоров А.М., Шабунин М.И.* Курс математического анализа. – М.: Наука, 1988; М.: МФТИ, 1997; М.: Физматлит, 2003.
5. *Иванов Г.Е.* Лекции по математическому анализу. Ч. 1. – М.: МФТИ, 2000, 2004.
6. *Бесов О.В.* Лекции по математическому анализу. Ч. 1. – М.: МФТИ, 2004.
7. Сборник задач по математическому анализу /Под ред. Л.Д. Кудрявцева. Т.1, Т.2 – 2-е изд. – М.: Физматлит. 2003.