

Р.В. Константинов

**ПРИМЕНЕНИЕ КОНФОРМНЫХ  
ОТОБРАЖЕНИЙ В РЕШЕНИИ  
НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ ЭЛЕКТРО-  
И МАГНИТОСТАТИКИ**

В пособии рассматриваются несколько модельных задач электро- и магнитостатики на плоскости, решение которых основывается на применении конформных отображений и других стандартных методов ТФКП, связанных с вычислением интегралов на основе теории вычетов. Как известно, задачи электро- и магнитостатики сводятся к решению уравнения Лапласа для электрического или магнитного потенциала в рассматриваемой области при наличии граничных условий смешанного типа. В рассматриваемых ниже примерах показано, как подобные задачи можно свести к стандартной задаче Дирихле в верхней полуплоскости, решение которой дается известной формулой Пуассона.

**Задача 1.** На плоскости  $\mathbb{R}^2$  поляризованный диэлектрик заполняет замкнутую область:

$$G_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : y \leq 0 \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0 \right\},$$

как показано на 1. Вектор поляризации диэлектрика  $\vec{P}$  сонаправлен с осью ординат. В открытой области  $G_1 = \mathbb{R}^2 \setminus G_2$  вещество отсутствует. Требуется найти электрическое поле в области  $G_1$ .

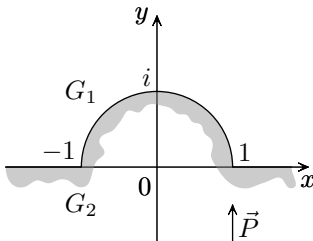


Рис. 1.

В области  $G_1$  векторы напряженности электрического поля  $\vec{E}_1$  и электрической индукции  $\vec{D}_1$  совпадают и удовлетворяют уравнениям Максвелла:

$$\operatorname{div} \vec{D}_1 = 0, \tag{1}$$

$$\operatorname{rot} \vec{E}_1 = \vec{0}. \tag{2}$$

Следовательно, можно искать векторное поле  $\vec{E}_1$  в виде  $\vec{E}_1 = \operatorname{grad} \Phi$ . Здесь скалярная функция  $\Phi: G_1 \rightarrow \mathbb{R}$  имеет смысл

электрического потенциала. При этом уравнение (2) автоматически выполняется, а уравнение (1) превращается в уравнение Лапласа для  $\Phi$  в области  $G_1$ :

$$\Delta \Phi = 0. \quad (3)$$

Осталось определить, каким граничным условиям на границе  $\gamma = \partial G_1$  области  $G_1$  должна удовлетворять функция  $\Phi$ . Пусть  $\vec{E}_2$  и  $\vec{D}_2$  – векторы напряженности электрического поля и электрической индукции в области  $G_2$  соответственно. Тогда  $\vec{D}_2 = \vec{0}$ , так как в области  $G_2$  нет свободных зарядов и не приложено внешнее поле. Следовательно,  $\vec{E}_2 = -4\pi\vec{P}$ .

Пусть  $\vec{n}$  – единичный вектор внешней нормали к границе области  $G_2$ , а  $\vec{t}$  – единичный касательный вектор к границе области  $G_2$ , такие, что пара векторов  $\{\vec{t}, \vec{n}\}$  правая. Тогда граничные условия для векторов напряженности электрического поля и электрической индукции записываются в виде (см. [1], § 14):

$$D_{1n} = \left( \vec{D}_1, \vec{n} \right) \Big|_{\gamma} = D_{2n} = \left( \vec{D}_2, \vec{n} \right) \Big|_{\gamma}, \quad (4)$$

$$E_{1t} = \left( \vec{E}_1, \vec{t} \right) \Big|_{\gamma} = E_{2t} = \left( \vec{E}_2, \vec{t} \right) \Big|_{\gamma}. \quad (5)$$

Заметим, что граница  $\gamma = \gamma_0 \cup \gamma_c$ , где

$$\gamma_0 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} : |x| > 1 \right\}, \quad \gamma_c = \left\{ \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} : \varphi \in (0, \pi) \right\}.$$

На  $\gamma_0$  имеем  $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Следовательно, соотношения (4), (5) на  $\gamma_0$  принимают вид

$$D_{1n} = \left. \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right|_{\gamma_0} = D_{2n} = 0, \quad (6)$$

$$E_{1t} = \left. \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right|_{\gamma_0} = E_{2t} = 0. \quad (7)$$

На  $\gamma_c$  имеем  $\vec{n} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}$ ,  $\vec{t} = \begin{pmatrix} \sin \varphi \\ -\cos \varphi \end{pmatrix}$ . Следовательно, соотношения (4), (5) на  $\gamma_c$  принимают вид

$$D_{1n} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \sin \varphi \Big|_{\gamma_c} = D_{2n} = 0, \quad (8)$$

$$E_{1t} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \sin \varphi - \frac{\partial \Phi}{\partial y} \cos \varphi \Big|_{\gamma_c} = E_{2t} = 4\pi P \cos \varphi. \quad (9)$$

Введем в рассмотрение скалярную функцию  $F: G_1 \rightarrow \mathbb{R}$ , гармоническую в  $G_1$  и сопряженную гармонической функции  $\Phi$  (см. [2], § 5, определение 5). Тогда комплекснозначная функция  $f(z) = \Phi(x, y) + iF(x, y)$  регулярна в области  $G_1$ , причем  $f'(z) = \Phi'_x(x, y) - i\Phi'_y(x, y)$ . В силу соотношений (6), (7), (8), (9) получаем

$$f' \Big|_{\gamma_0} = 0, \quad (10)$$

$$f' \Big|_{\gamma_c} e^{i\varphi} = -4\pi i P \cos \varphi. \quad (11)$$

Рассмотрим конформное отображение области  $G_1$  на верхнюю полуплоскость, которое дается функцией Жуковского:

$$h(z) = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right).$$

В силу теоремы 1 из § 29 [2] получаем, что функция  $f$  представима в виде  $f(z) = g(h(z))$  для всех  $z \in G_1$ , где функция  $g$  регулярна в верхней полуплоскости. Определим граничные условия для функции  $g$  на границе верхней полуплоскости  $\Gamma = h(\gamma)$ . Обозначим

$$\Gamma_0 = h(\gamma_0) = \{u + i0 : |u| > 1\},$$

$$\Gamma_c = h(\gamma_c) = \{u + i0 : |u| < 1\}.$$

Так как  $f'(z) = g'(w)h'(z)$ , где  $w = u + iv = h(z)$ , то в силу (10) для  $w = u + i0 = h(z) \Big|_{\gamma_0} \in \Gamma_0$  получаем

$$g'(w) \Big|_{\Gamma_0} h'(z) \Big|_{\gamma_0} = 0, \quad (12)$$

а в силу (11) для  $w = u + i0 = h(e^{i\varphi}) \in \Gamma_c$  получаем

$$g'(w) \Big|_{\Gamma_c} h'(e^{i\varphi}) e^{i\varphi} = -4\pi i P \cos \varphi. \quad (13)$$

Из соотношения (12) получаем  $(\operatorname{Re} g)'_u \Big|_{\Gamma_0} = 0$ , т. е.

$$\operatorname{Re} g(u, 0) = \operatorname{const}, \quad |u| > 1. \quad (14)$$

Поскольку  $h'(z) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{z^2}\right)$ , то  $h'(e^{i\varphi}) e^{i\varphi} = i \sin \varphi$ , и из соотношения (13) находим

$$g'(w)|_{\Gamma_c} i \sin \varphi = -4\pi i P \cos \varphi.$$

Следовательно,

$$g'(w)|_{\Gamma_c} = (\operatorname{Re} g)'_u|_{\Gamma_c} - i (\operatorname{Re} g)'_v|_{\Gamma_c} = -4\pi P \operatorname{ctg} \varphi.$$

Так как  $\cos \varphi = h(e^{i\varphi}) = u$ ,  $\sin \varphi = \sqrt{1 - u^2}$  для  $u \in \Gamma_c$ , то

$$(\operatorname{Re} g)'_u|_{\Gamma_c} = -4\pi P \frac{u}{\sqrt{1 - u^2}}.$$

Следовательно,

$$\operatorname{Re} g(u, 0) = 4\pi P \sqrt{1 - u^2} + \operatorname{const}, \quad |u| < 1. \quad (15)$$

Поскольку для определения напряженности электрического поля в области  $G_1$  функцию  $f$  достаточно знать с точностью до некоторой константы, то в соотношениях (14) и (15) без ограничения общности считаем  $\operatorname{const} = 0$ .

Итак, для определения гармонической в верхней полуплоскости функции  $\operatorname{Re} g$  получаем задачу Дирихле:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta (\operatorname{Re} g(u, v)) = 0, \quad v > 0, \\ \operatorname{Re} g(u, 0) = \begin{cases} 0, & |u| > 1, \\ 4\pi P \sqrt{1 - u^2}, & |u| < 1. \end{cases} \end{array} \right. \quad (16)$$

Решение этой задачи дается формулой Пуассона (см. теорему 5 § 29 [2]). Получаем

$$\operatorname{Re} g(u, v) = 4Pv \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1 - t^2}}{(t - u)^2 + v^2} dt, \quad v > 0. \quad (17)$$

Нашей целью теперь является вычисление интеграла

$$I = \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1 - t^2}}{(t - u)^2 + v^2} dt, \quad (18)$$

для произвольных  $u \in \mathbb{R}$  и  $v > 0$ .

Для вычисления этого интеграла воспользуемся теорией вычетов. В области  $D = \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$  рассмотрим регулярную ветвь  $s(z) \in \sqrt{1 - z^2}$ , такую, что  $s(0 + i0) = 1$ . Далее для произвольного достаточно малого  $\varepsilon > 0$  рассмотрим интеграл

$$I_\varepsilon = \oint_{C_\varepsilon} \frac{s(z) dz}{(z - u)^2 + v^2}, \quad (19)$$

где имеющий вид “гантели” (см. рис. 2) контур

$$C_\varepsilon = C_{1\varepsilon} \cup C_\varepsilon^+ \cup C_{2\varepsilon} \cup C_\varepsilon^-$$

составлен из окружностей  $C_{1\varepsilon}$  и  $C_{2\varepsilon}$  радиуса  $\varepsilon$  с центрами в точках  $-1$  и  $1$  соответственно, а также двух берегов  $C_\varepsilon^+$  и  $C_\varepsilon^-$  разреза по отрезку  $[-1 + \varepsilon, 1 - \varepsilon]$ . Контур  $C_\varepsilon$  ориентирован по часовой стрелке.

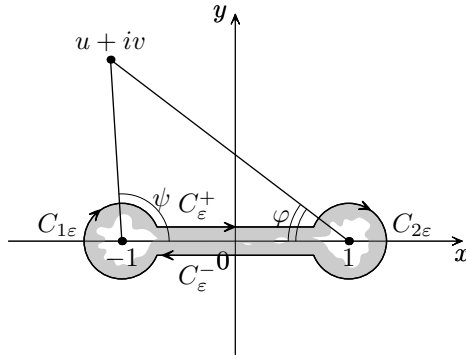


Рис. 2.

Обозначим подынтегральную функцию в (19) через  $J(z)$ . По теореме о вычетах (теорема 1 § 13 [2]) получаем

$$\begin{aligned} I_\varepsilon &= 2\pi i \left( \operatorname{res}_\infty J + \operatorname{res}_{u+iv} J + \operatorname{res}_{u-iv} J \right) = \\ &= \left( \int_{C_\varepsilon^+} + \int_{C_\varepsilon^-} + \int_{C_{1\varepsilon}} + \int_{C_{2\varepsilon}} \right) J(z) dz. \end{aligned} \quad (20)$$

Так как для  $|t| < 1 - \varepsilon$  имеем  $s(t \pm i0) = \pm \sqrt{1 - t^2}$ , то

$$\left( \int_{C_\varepsilon^+} + \int_{C_\varepsilon^-} \right) J(z) dz = 2 \int_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon} \frac{\sqrt{1-t^2} dt}{(t-u)^2 + v^2} \xrightarrow{(\varepsilon \rightarrow +0)} 2I.$$

Далее, так как функция  $J(z)$  ограничена в окрестности точек  $\pm 1$ , то  $\int_{C_{1,2\varepsilon}} J(z) dz \rightarrow 0$  при  $\varepsilon \rightarrow +0$ . Следовательно, переходя в равенстве (20) к пределу при  $\varepsilon \rightarrow +0$ , находим

$$2\pi i \left( \operatorname{res}_\infty J + \operatorname{res}_{u+iv} J + \operatorname{res}_{u-iv} J \right) = 2I. \quad (21)$$

Для вычисления вычетов  $\operatorname{res}_{u\pm iv} J$  нам потребуются значения  $s(u \pm \pm iv)$ . Для их вычисления воспользуемся формулой (см. лемму 6 и теорему 2 из § 16 [2]):

$$s(z) = \sqrt{|1-z^2|} \exp \left\{ \frac{i}{2} \left( \Delta_{\gamma(z)} \arg(1-z) + \Delta_{\gamma(z)} \arg(1+z) \right) \right\},$$

где  $\gamma(z)$  гладкая кривая с началом в точке, лежащей на верхнем крае разреза  $C_\varepsilon^+$  и концом в точке  $z$ . Находим для произвольных  $u \in \mathbb{R}$ ,  $v > 0$  (см. рис. 2):

$$\Delta_{\gamma(u+iv)}(1-z) = -\arccos \left( \frac{1-u}{\sqrt{(1-u)^2 + v^2}} \right) = -\phi(u, v), \quad (22)$$

$$\Delta_{\gamma(u+iv)}(1+z) = \arccos \left( \frac{1+u}{\sqrt{(1+u)^2 + v^2}} \right) = \psi(u, v). \quad (23)$$

Аналогично получаем (см. рис. 2), что

$$\Delta_{\gamma(u-iv)}(1-z) = \phi(u, v), \quad \Delta_{\gamma(u-iv)}(1+z) = 2\pi - \psi(u, v).$$

Следовательно,

$$s(u+iv) = \sqrt{|1-w^2|} \exp \left\{ \frac{i}{2} (\psi(u, v) - \phi(u, v)) \right\},$$

$$s(u-iv) = -\sqrt{|1-w^2|} \exp \left\{ \frac{i}{2} (\phi(u, v) - \psi(u, v)) \right\}.$$

Тогда в силу леммы 2 § 13 [2] получаем

$$\operatorname{res}_{u+iv} J = \frac{s(u+iv)}{2iv} = \frac{\sqrt{|1-w^2|} \exp\left\{\frac{i}{2}(\psi(u,v) - \phi(u,v))\right\}}{2iv},$$

$$\operatorname{res}_{u-iv} J = \frac{s(u-iv)}{-2iv} = \frac{\sqrt{|1-w^2|} \exp\left\{\frac{i}{2}(\phi(u,v) - \psi(u,v))\right\}}{2iv}.$$

Осталось вычислить  $\operatorname{res}_{\infty} J$ . Для произвольного вещественного  $x > 1$  находим

$$\begin{aligned} s(x) &= \sqrt{x^2 - 1} \exp\left(-\frac{i\pi}{2}\right) = -ix \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}} = \\ &= -ix \left(1 - \frac{1}{2x^2} + O\left(\frac{1}{x^4}\right)\right). \end{aligned}$$

Следовательно, в силу теоремы единственности регулярной функции (теорема 1 § 10 [2]) в области  $|z| > 1$  справедливо равенство

$$s(z) = -iz + \frac{i}{2z} + O\left(\frac{1}{z^3}\right),$$

так как оно справедливо на луче  $x > 1$ . Отсюда для  $|z| > 1$  получаем

$$J(z) = \frac{-iz + O\left(\frac{1}{z}\right)}{z^2 \left(1 + O\left(\frac{1}{z}\right)\right)} = -\frac{i}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right).$$

Таким образом, по формуле (12) из § 13 [2] находим, что

$$\operatorname{res}_{\infty} J = i.$$

Наконец, пользуясь соотношением (21), получаем значение искомого интеграла:

$$I = \frac{\pi}{v} \sqrt{|1-w^2|} \cos\left(\frac{\psi(u,v) - \phi(u,v)}{2}\right) - \pi. \quad (24)$$

Окончательно из (17) получаем для любых  $u \in \mathbb{R}$  и  $v > 0$ :

$$\operatorname{Re} g(u,v) = 4\pi P \left( \sqrt{|1-w^2|} \cos\left(\frac{\psi(u,v) - \phi(u,v)}{2}\right) - v \right).$$

Таким образом, получаем вид электрического потенциала в области  $G_1$ :



$$\Phi(z) = 4\pi P \left( \sqrt{|1 - h^2(z)|} \cos \left( \frac{\psi(z) - \phi(z)}{2} \right) - \operatorname{Im} h(z) \right),$$

где

$$h(z) = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right),$$

$$\phi(z) = \arccos \left( \frac{1 - \operatorname{Re} h(z)}{\sqrt{(1 - \operatorname{Re} h(z))^2 + (\operatorname{Im} h(z))^2}} \right),$$

$$\psi(z) = \arccos \left( \frac{1 + \operatorname{Re} h(z)}{\sqrt{(1 + \operatorname{Re} h(z))^2 + (\operatorname{Im} h(z))^2}} \right).$$

На рис. 3 изображены силовые линии электрического поля в области  $G_1$  вида  $\Phi(z) = \text{const}$ .

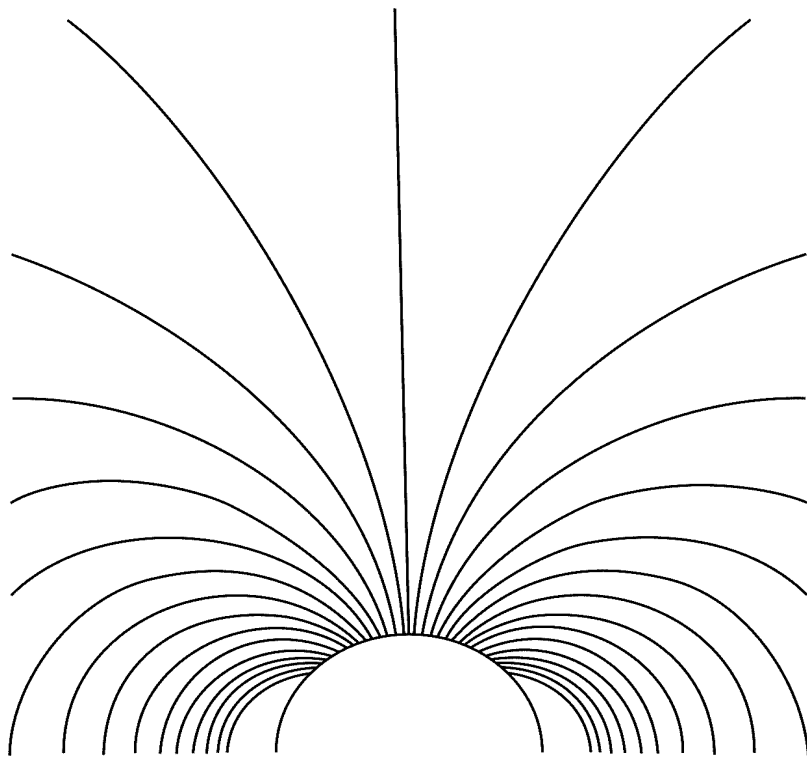


Рис. 3. Силовые линии электрического поля в области  $G_1$

**Задача 2.** На плоскости  $\mathbb{R}^2$  идеальный проводник заполняет замкнутую область:

$$G_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : y \leq 0 \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} : 0 \leq y \leq 1 \right\},$$

как показано на рис. 3. Вектор намагниченности проводника  $\vec{J}$  сонаправлен с осью ординат. В области  $G_1 = \mathbb{R}^2 \setminus G_2$  проводники отсутствуют. Требуется найти магнитное поле в области  $G_1$ .

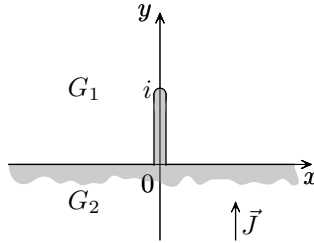


Рис. 4.

В области  $G_1$  векторы напряженности магнитного поля  $\vec{H}_1$  и магнитной индукции  $\vec{B}_1$  совпадают и удовлетворяют уравнениям Максвелла:

$$\operatorname{div} \vec{B}_1 = 0, \quad (25)$$

$$\operatorname{rot} \vec{H}_1 = \vec{0}. \quad (26)$$

Следовательно, можно искать векторное поле  $\vec{B}_1$  в виде  $\vec{B}_1 = \operatorname{grad} A$ . Здесь скалярная функция  $A: G_1 \rightarrow \mathbb{R}$  имеет смысл магнитного потенциала. При этом уравнение (26) автоматически выполняется, а уравнение (25) превращается в уравнение Лапласа для  $A$  в области  $G_1$ :

$$\Delta A = 0. \quad (27)$$

Осталось определить, каким граничным условиям на границе  $\gamma_2 = \partial G_1$  области  $G_1$  должна удовлетворять функция  $A$ . Пусть  $\vec{H}_2$  и  $\vec{B}_2$  – векторы напряженности магнитного поля и магнитной индукции в области  $G_2$  соответственно. Тогда  $\vec{B}_2 = \vec{H}_2 + 4\pi \vec{J} = \vec{0}$ . Следовательно,  $\vec{H}_2 = -4\pi \vec{J}$ .

Пусть  $\vec{n}$  – единичный вектор внешней нормали к границе области  $G_2$ , а  $\vec{t}$  – единичный касательный вектор к границе области

$G_2$ , такие, что пара векторов  $\{\vec{t}, \vec{n}\}$  правая. Тогда граничные условия для векторов напряженности магнитного поля и магнитной индукции записываются в виде (см. [1], § 60):

$$B_{1n} = \left( \vec{B}_1, \vec{n} \right) \Big|_{\gamma} = B_{2n} = \left( \vec{B}_2, \vec{n} \right) \Big|_{\gamma}, \quad (28)$$

$$H_{1t} = \left( \vec{H}_1, \vec{t} \right) \Big|_{\gamma} = H_{2t} = \left( \vec{H}_2, \vec{t} \right) \Big|_{\gamma}. \quad (29)$$

Заметим, что граница  $\gamma = \gamma_0 \cup \gamma_+ \cup \gamma_-$ , где

$$\gamma_0 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} : |x| > 0 \right\}, \quad \gamma_{\pm} = \left\{ \begin{pmatrix} \pm 0 \\ y \end{pmatrix} : y \in [0, 1] \right\}.$$

На  $\gamma_0$  имеем  $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Следовательно, соотношения (28), (29) на  $\gamma_0$  принимают вид

$$B_{1n} = \frac{\partial A}{\partial y} \Big|_{\gamma_0} = B_{2n} = 0, \quad (30)$$

$$H_{1t} = \frac{\partial A}{\partial x} \Big|_{\gamma_0} = H_{2t} = 0. \quad (31)$$

На  $\gamma_{\pm}$  имеем  $\vec{n} = \begin{pmatrix} \pm 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{t} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mp 1 \end{pmatrix}$ . Следовательно, соотношения (28), (29) на  $\gamma_{\pm}$  принимают вид

$$B_{1n} = \pm \frac{\partial A}{\partial x} \Big|_{\gamma_{\pm}} = B_{2n} = 0, \quad (32)$$

$$H_{1t} = \mp \frac{\partial A}{\partial y} \Big|_{\gamma_{\pm}} = H_{2t} = \pm 4\pi J. \quad (33)$$

Введем в рассмотрение скалярную функцию  $F: G_1 \rightarrow \mathbb{R}$ , гармоническую в  $G_1$  и сопряженную гармонической функции  $A$  (см. [2], § 5, определение 5). Тогда комплекснозначная функция  $f(z) = A(x, y) + iF(x, y)$  регулярна в области  $G_1$ , причем  $f'(z) = A'_x(x, y) - iA'_y(x, y)$ . В силу соотношений (30), (31), (32), (33) получаем

$$f' \Big|_{\gamma_0} = 0, \quad (34)$$

$$f' \Big|_{\gamma_{\pm}} = 4\pi i J. \quad (35)$$

Рассмотрим конформное отображение области  $G_1$  на верхнюю полуплоскость, которое дается функцией  $h(z) = s(z^2 + 1)$ , где  $s(z) \in \sqrt{z}$  – регулярная ветвь многозначной функции  $\sqrt{z}$  в области  $\mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$ , такая, что  $s(-1) = i$ . Приведем явный вид этой функции:

$$s(z) = \sqrt{|z|} \exp \left\{ \frac{i}{2} \arg z \right\}.$$

Здесь  $\arg z \in [0, 2\pi)$  – главное значение аргумента комплексного числа  $z$ . В силу теоремы 1 из § 29 [2] получаем, что функция  $f$  представима в виде  $f(z) = g(h(z))$  для всех  $z \in G_1$ , где функция  $g$  регулярна в верхней полуплоскости. Определим граничные условия для функции  $g$  на границе верхней полуплоскости  $\Gamma = h(\gamma)$ . Обозначим

$$\Gamma_0 = h(\gamma_0) = \{u + i0 : |u| > 1\},$$

$$\Gamma_{\pm} = h(\gamma_+ \cup \gamma_-) = \{u + i0 : |u| < 1\}.$$

Так как  $f'(z) = g'(w)h'(z) = g'(w)\frac{z}{h(z)}$ , где  $w = u + iv = h(z)$ , что равносильно  $z = s(w^2 - 1)$ , то в силу (34), (35) получаем

$$g'(w)|_{\Gamma_0} = 0, \tag{36}$$

$$g'(w)\frac{s(w^2 - 1)}{w}\Big|_{\Gamma_{\pm}} = 4\pi i J. \tag{37}$$

Так как для  $w = u + i0 \in \Gamma_{\pm}$  справедливо равенство

$$\begin{aligned} s(w^2 - 1)|_{\Gamma_{\pm}} &= \sqrt{1 - u^2} \exp \left\{ \frac{i}{2} \arg(u^2 - 1) \right\} = \\ &= \sqrt{1 - u^2} \exp \left\{ \frac{i\pi}{2} \right\} = i\sqrt{1 - u^2}, \end{aligned}$$

то для  $|u| < 1$  получаем

$$g'(u + i0) = (\operatorname{Re} g)'_u(u, 0) - i(\operatorname{Re} g)'_v(u, 0) = \frac{4\pi Ju}{\sqrt{1 - u^2}}$$

Следовательно,

$$(\operatorname{Re} g)'_u(u,0) = \begin{cases} 0, & |u| > 1, \\ \frac{4\pi J u}{\sqrt{1-u^2}}, & |u| < 1. \end{cases}$$

Отсюда получаем

$$\operatorname{Re} g(u,0) = \begin{cases} \operatorname{const}, & |u| > 1, \\ \operatorname{const} - 4\pi J \sqrt{1-u^2}, & |u| < 1. \end{cases} \quad (38)$$

Поскольку для определения векторного поля магнитной индукции в области  $G_1$  функцию  $f$  достаточно знать с точностью до некоторой константы, то в соотношениях (38) без ограничения общности считаем  $\operatorname{const} = 0$ .

Итак, для определения гармонической в верхней полуплоскости функции  $\operatorname{Re} g$  получаем задачу Дирихле:

$$\begin{cases} \Delta(\operatorname{Re} g(u,v)) = 0, & v > 0, \\ \operatorname{Re} g(u,0) = \begin{cases} 0, & |u| > 1, \\ -4\pi J \sqrt{1-u^2}, & |u| < 1. \end{cases} \end{cases} \quad (39)$$

Решение этой задачи дается формулой Пуассона (см. теорему 5 § 29 [2]). Получаем

$$\operatorname{Re} g(u,v) = -4Jv \int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-t^2}}{(t-u)^2 + v^2} dt, \quad v > 0. \quad (40)$$

Пользуясь вычисленным при решении задачи 1 интегралом (18), значение которого дается формулой (24), получаем

$$\operatorname{Re} g(u,v) = 4\pi J \left( v - \sqrt{|1-w^2|} \cos \left( \frac{\psi(u,v) - \phi(u,v)}{2} \right) \right),$$

где функции  $\phi(u,v)$  и  $\psi(u,v)$  определены в формулах (22) и (23).

Таким образом, получаем вид магнитного потенциала в области  $G_1$ :

$$A(z) = 4\pi J \left( \operatorname{Im} h(z) - |z| \cos \left( \frac{\psi(z) - \phi(z)}{2} \right) \right),$$

где

$$h(z) = \sqrt{|1+z^2|} \exp \left\{ \frac{i}{2} \arg (1+z^2) \right\},$$

$$\phi(z) = \arccos \left( \frac{1 - \operatorname{Re} h(z)}{\sqrt{(1 - \operatorname{Re} h(z))^2 + (\operatorname{Im} h(z))^2}} \right),$$

$$\psi(z) = \arccos \left( \frac{1 + \operatorname{Re} h(z)}{\sqrt{(1 + \operatorname{Re} h(z))^2 + (\operatorname{Im} h(z))^2}} \right).$$

На рис. 5 изображены силовые линии магнитного поля в области  $G_1$  вида  $A(z) = \text{const}$ .

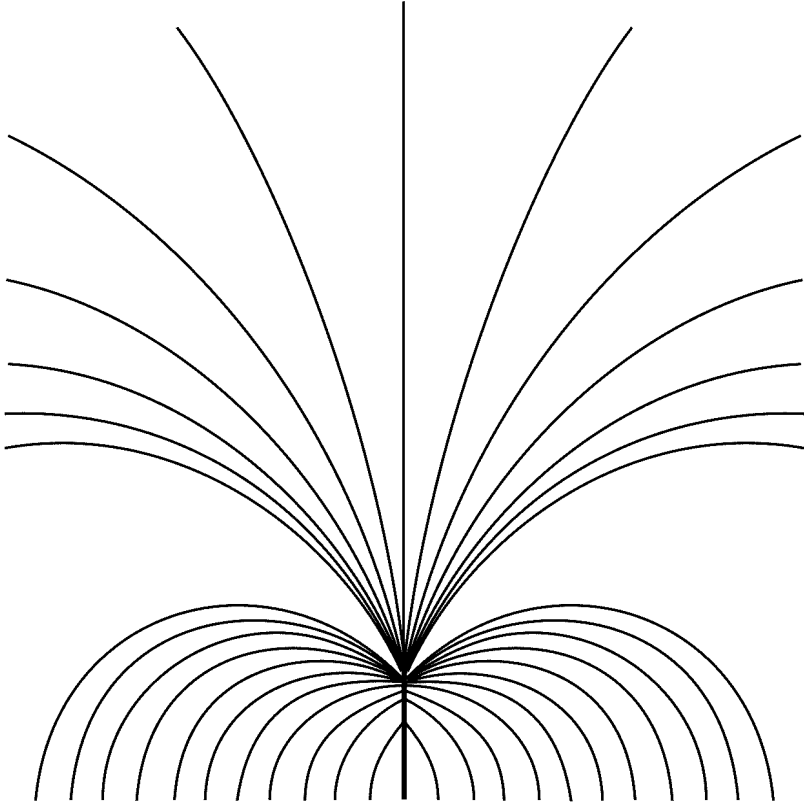


Рис. 5. Силовые линии магнитного поля в области  $G_1$

**Задача 3.** На плоскости  $\mathbb{R}^2$  идеальный проводник заполняет замкнутую область:

$$G_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : x^2 + y^2 \leq 1 \right\},$$

как показано на рис. 5. Вектор намагниченности проводника  $\vec{J}$  сонаправлен с осью ординат. В области  $G_1 = \mathbb{R}^2 \setminus G_2$  проводники отсутствуют. Требуется найти магнитное поле в области  $G_1$ .

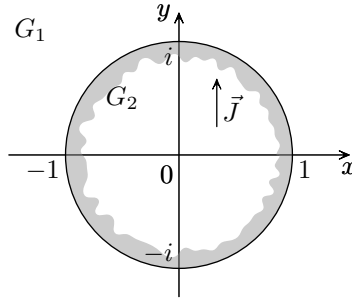


Рис. 6.

В области  $G_1$  векторы напряженности магнитного поля  $\vec{H}_1$  и магнитной индукции  $\vec{B}_1$  совпадают и удовлетворяют уравнениям Максвелла (25), (26). Векторное поле  $\vec{B}_1$  ищем в виде  $\vec{B}_1 = \text{grad } A$ , где скалярная функция  $A: G_1 \rightarrow \mathbb{R}$  имеет смысл магнитного потенциала. При этом уравнение (26) автоматически выполняется, а уравнение (25) превращается в уравнение Лапласа для  $A$  в области  $G_1$  (27).

Осталось определить, каким граничным условиям на границе  $\gamma = \partial G_1$  области  $G_1$  должна удовлетворять функция  $A$ . Пусть  $\vec{H}_2$  и  $\vec{B}_2$  – векторы напряженности магнитного поля и магнитной индукции в области  $G_2$  соответственно. Тогда  $\vec{B}_2 = \vec{H}_2 + 4\pi\vec{J} = \vec{0}$ . Следовательно,  $\vec{H}_2 = -4\pi\vec{J}$ .

Пусть  $\vec{n}$  – единичный вектор внешней нормали к границе области  $G_2$ , а  $\vec{t}$  – единичный касательный вектор к границе области  $G_2$ , такие, что пара векторов  $\{\vec{t}, \vec{n}\}$  правая. Граничные условия для векторов напряженности магнитного поля и магнитной индукции записываются в виде (28), (29).

Граница области  $G_1$  представляет собой окружность с центром в нуле радиуса 1 вида  $\gamma = \{ e^{i\varphi} : \varphi \in [0, 2\pi) \}$ . На  $\gamma$  имеем  $\vec{n} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}$ ,  $\vec{t} = \begin{pmatrix} \sin \varphi \\ -\cos \varphi \end{pmatrix}$ . Следовательно, соотношения (28), (29) принимают вид

$$B_{1n} = \frac{\partial A}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial A}{\partial y} \sin \varphi \Big|_{\gamma} = B_{2n} = 0, \quad (41)$$

$$H_{1t} = \frac{\partial A}{\partial x} \sin \varphi - \frac{\partial A}{\partial y} \cos \varphi \Big|_{\gamma} = H_{2t} = 4\pi J \cos \varphi. \quad (42)$$

Введем в рассмотрение скалярную функцию  $F: G_1 \rightarrow \mathbb{R}$ , гармоническую в  $G_1$  и сопряженную гармонической функции  $A$  (см. [2], § 5, определение 5). Тогда комплекснозначная функция  $f(z) = A(x, y) + iF(x, y)$  регулярна в области  $G_1$ , причем  $f'(z) = A'_x(x, y) - iA'_y(x, y)$ . В силу соотношений (41), (42) получаем

$$f' \Big|_{\gamma} e^{i\varphi} = 4\pi i J \cos \varphi. \quad (43)$$

Рассмотрим конформное отображение области  $G_1$  на верхнюю полуплоскость, которое дается дробно-линейной функцией:

$$h(z) = \frac{z - 1}{z + 1} i.$$

В силу теоремы 1 из § 29 [2] получаем, что функция  $f$  представима в виде  $f(z) = g(h(z))$  для всех  $z \in G_1$ , где функция  $g$  регулярна в верхней полуплоскости. Определим граничные условия для функции  $g$  на границе верхней полуплоскости  $\Gamma = h(\gamma)$ . Так как

$$f'(z) = g'(w)h'(z) = g'(w) \frac{2i}{(z + 1)^2},$$

где  $w = u + iv = h(z)$ , то из соотношения (43) получаем

$$g'(w) \Big|_{\Gamma} h'(e^{i\varphi}) e^{i\varphi} = 4\pi i J \cos \varphi. \quad (44)$$

Так как  $w \Big|_{\Gamma} = u + i0 = h(e^{i\varphi}) = -\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$ , а

$$h'(e^{i\varphi}) e^{i\varphi} = \frac{i}{1 + \cos \varphi},$$

то соотношение (44) переписывается в виде



$$g'(u + i0)\Big|_{u=-\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}} = 4\pi J \cos \varphi (1 + \cos \varphi) = 8\pi J \frac{1 - u^2}{1 + u^2}.$$

Следовательно, для любого  $u \in \mathbb{R}$  получаем

$$(\operatorname{Re} g)'_u(u, 0) = 8\pi J \frac{1 - u^2}{1 + u^2},$$

откуда

$$\operatorname{Re} g(u, 0) = 8\pi J \frac{u}{1 + u^2} + \operatorname{const}. \quad (45)$$

Поскольку для определения векторного поля магнитной индукции в области  $G_1$  функцию  $f$  достаточно знать с точностью до некоторой константы, то в соотношении (45) без ограничения общности считаем  $\operatorname{const} = 0$ .

Итак, для определения гармонической в верхней полуплоскости функции  $\operatorname{Re} g$  получаем задачу Дирихле:

$$\begin{cases} \Delta (\operatorname{Re} g(u, v)) = 0, & v > 0, \\ \operatorname{Re} g(u, 0) = 8\pi J \frac{u}{1 + u^2}. \end{cases} \quad (46)$$

Решение этой задачи дается формулой Пуассона (см. теорему 5 § 29 [2]). Получаем

$$\operatorname{Re} g(u, v) = 8Jv \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{(1 + t^2)((t - u)^2 + v^2)} dt, \quad v > 0. \quad (47)$$

Нашей целью теперь является вычисление интеграла

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{(1 + t^2)((t - u)^2 + v^2)} dt, \quad (48)$$

для произвольных  $u \in \mathbb{R}$  и  $v > 0$ . Для вычисления этого интеграла воспользуемся теорией вычетов. Введем комплексную функцию:

$$L(z) = \frac{z}{(1 + z^2)((z - u)^2 + v^2)}.$$

Тогда в силу формулы (21) из § 13 [2] получаем

$$I = 2\pi i \left( \operatorname{res}_{u+iv} L + \operatorname{res}_i L \right). \quad (49)$$

В силу леммы 2 § 13 [2] находим

$$\operatorname{res}_{u+iv} L = \left( \frac{u+iv}{1+(u+iv)^2} \right) \frac{1}{2iv}, \quad \operatorname{res}_i L = \left( \frac{i}{(i-u)^2+v^2} \right) \frac{1}{2i}.$$

Подставляя полученные значения вычетов в (49), получаем

$$\begin{aligned} I &= \pi \left( \frac{u+iv}{(1+(u+iv)^2)v} + \frac{i}{(i-u)^2+v^2} \right) = \\ &= \frac{\pi}{u+iv-i} \left( \frac{u+iv}{(i+u+iv)v} - \frac{i}{i-u+iv} \right) = \\ &= -\frac{\pi(iu-u^2-ivv)}{(u+iv-i)((v+1)^2+u^2)v} = \frac{\pi u}{(u^2+(v+1)^2)v}. \end{aligned}$$

Следовательно, из (47) получаем для любых  $u \in \mathbb{R}$  и  $v > 0$ :

$$\operatorname{Re} g(u,v) = \frac{8\pi J u}{u^2+(v+1)^2}.$$

Так как  $u+iv = h(z) = \frac{z-1}{z+1}i$  для  $z \in G_1$ , то

$$u = -\operatorname{Im} \frac{z-1}{z+1}, \quad v = \operatorname{Re} \frac{z-1}{z+1},$$

то получаем вид магнитного потенциала в области  $G_1$ :

$$A(z) = -8\pi J \frac{\operatorname{Im} \frac{z-1}{z+1}}{\left| \frac{z-1}{z+1} \right|^2 + 1 + 2 \operatorname{Re} \frac{z-1}{z+1}}.$$

На рис. 7 изображены силовые линии магнитного поля в области  $G_1$  вида  $A(z) = \text{const}$ .

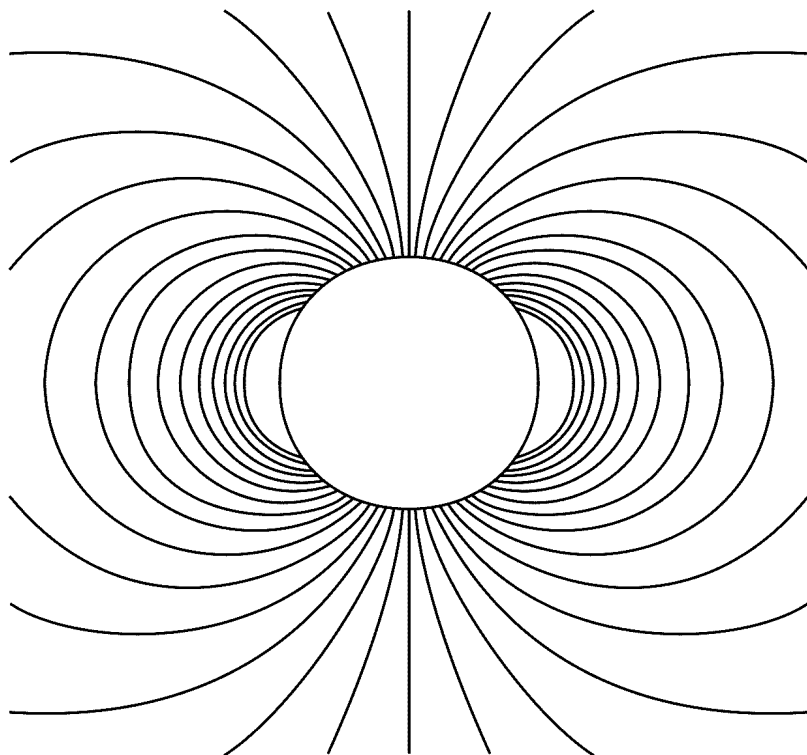


Рис. 7. Силовые линии магнитного поля в области  $G_1$

### Задачи для самостоятельного решения

**Задача 4.** На плоскости  $\mathbb{R}^2$  идеальный проводник заполняет замкнутую область:

$$G_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : y \leq 0 \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0 \right\},$$

как показано на 8. Вектор намагниченности проводника  $\vec{J}$  сонаправлен с осью абсцисс. В области  $G_1 = \mathbb{R}^2 \setminus G_2$  проводники отсутствуют. Требуется найти магнитное поле в области  $G_1$ .

**Задача 5.** На плоскости  $\mathbb{R}^2$  идеальный проводник заполняет замкнутую область:

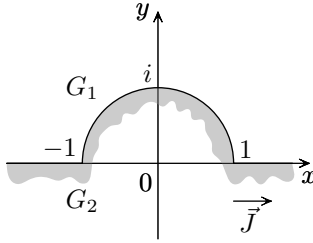


Рис. 8.

$$G_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : y \leq 0 \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0 \right\},$$

как показано на 9. Вектор намагниченности проводника  $\vec{J}$  сонаправлен с осью ординат. В области  $G_1 = \mathbb{R}^2 \setminus G_2$  проводники отсутствуют. Требуется найти магнитное поле в области  $G_1$ .

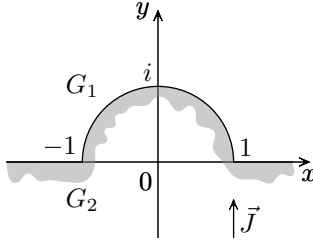


Рис. 9.

**Задача 6.** На плоскости  $\mathbb{R}^2$  поляризованный диэлектрик заполняет замкнутую область:

$$G_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : y \leq 0 \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : x^2 + y^2 \geq 1, y \geq 0 \right\},$$

как показано на 10. Вектор поляризации диэлектрика  $\vec{P}$  сонаправлен с осью ординат. В открытой области  $G_1 = \mathbb{R}^2 \setminus G_2$  вещество отсутствует. Требуется найти электрическое поле в области  $G_1$ .

**Задача 7.** На плоскости  $\mathbb{R}^2$  идеальный проводник заполняет замкнутую область:

$$G_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0 \right\},$$

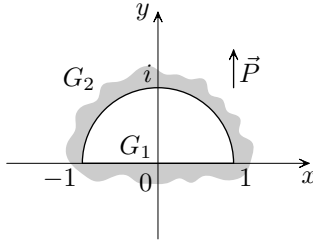


Рис. 10.

как показано на 11. Вектор намагниченности проводника  $\vec{J}$  сонаправлен с осью ординат. В области  $G_1 = \mathbb{R}^2 \setminus G_2$  проводники отсутствуют. Требуется найти магнитное поле в области  $G_1$ .

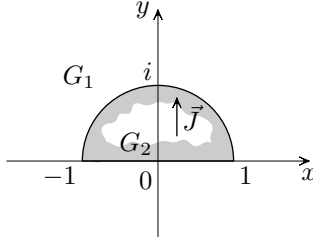


Рис. 11.

**Задача 8.** На плоскости  $\mathbb{R}^2$  поляризованный диэлектрик заполняет замкнутую область:

$$G_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : y \leq 0 \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : x^2 + y^2 \geq 1, y \geq 0 \right\},$$

как показано на 12. Вектор поляризации диэлектрика  $\vec{P}$  сонаправлен с осью абсцисс. В открытой области  $G_1 = \mathbb{R}^2 \setminus G_2$  вещество отсутствует. Требуется найти электрическое поле в области  $G_1$ .

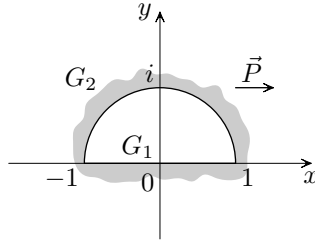


Рис. 12.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сивухин Д. В.* Общий курс физики. Т. III. Электричество. Ч. 1. — 3-е изд. — М.: Наука. Физматлит, 1996.
2. *Половинкин Е. С.* Курс лекций по теории функций комплексного переменного. — М.: Физматкнига, 2003.