Федеральное агентство по образованию
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
Московский физико-технический институт
(государственный университет)

Кафедра высшей математики

Серия «Инновационные технологии современного
математического образования»

МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ ПО РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ГОСУДАРСТВЕННОГО КВАЛИФИКАЦИОННОГО ЭКЗАМЕНА ПО МАТЕМАТИКЕ

2001-2007 гг.

Часть II

Учебно-методическое пособие

Составитель Л.И. Коваленко

Москва 2007

УДК 517.

Рецензент:
Доктор физико-математических наук *Тер-Крикоров А.М.*

Методическое пособие по решению задач государственного квалификационного экзамена по математике в МФТИ. Ч. II. 2004-2005 гг.: Учебно-методическое пособие / Сост. Л.И.Коваленко. М.: МФТИ, 2007. 66 с.

УДК 517

Во второй части пособия рассматриваются три варианта письменной работы ГКЭ 2004/2005 уч.г. Студент на экзамене мог решать не все задачи варианта, а выбрать для решения задачи определённой трудности. В этом поливариативность экзаменационной работы 2004-2005 уч.г., что является инновационным элементом.

К задачам двух вариантов даны ответы. Один из вариантов приводится с рациональными решениями всех задач. Перед решениями сообщаются основные правила, помогающие быстро решать задачи. Они могут быть применены при решении задач других вариантов.

Цель предлагаемого пособия — помочь студенту в сжатые сроки подготовиться к быстрому решению задач письменной работы ГКЭ. Обучение быстрому решению задач — это инновационная наукоёмкая составляющая пособия. Может быть использовано при изучении и повторении соответствующих разделов математики.

Содержание

Предисловие

Письменная работа по математике ГКЭ 2004/2005 уч.г. имеет ряд особенностей. Она состоит из 10 разделов, в каждый из которых входит 4 задачи: 6 разделов по математическому анализу, 1 — по аналитической геометрии, 1 — по линейной алгебре, 2 — по обыкновенным дифференциальным уравнениям (один из которых — по линейным дифференциальным уравнениям и системам).

Студент на экзамене мог решать не все задачи подряд, а выбрать для решения задачи по определённой тематике и определённой трудности, о чём он мог судить по заголовкам разделов и указанным очкам. Любой студент имел возможность продемонстрировать своё умение в решении задач из разных разделов математики, изучаемых на первом и втором курсах.

На работу отводилось 4 часа, по 2 часа на каждую из двух частей, состоящую из 20 задач. После двух часов работы над первой частью был 30-минутный перерыв, после которого выдавалась вторая часть.

Составляли задачи доценты Л.И. Коваленко (ответственная), Л.Н. Домышева, В.В. Мартынов.

В данном пособии приводятся три варианта 52, 53, 54 с ответами, а один из них (№ 53) — с наиболее рациональными решениями всех задач. Некоторые задачи решаются несколькими способами. Перед решениями задач даются полезные рекомендации, приводятся основные формулы. Всё это может быть использовано при решении задач на аналогичную тему из других вариантов.

Рукопись к печати подготовил А.В. Полозов.

Условия задач. 2004/2005 учебный год

Вариант 2

Часть 1

I. Дифференцируемость функций одной переменной, производные высших порядков

1.② Найти $y''(1)$ функции $y(x)$, заданной неявно уравнением $4y-y^3+x+x^3=2$ и удовлетворяющей условию $y(1)=0$.

2.② Найти производную скалярного поля $u=x^2+\dfrac{y^2}{2}+z^2$ в направлении внешней нормали к поверхности $2x^2+y^2+2z^2=5$ в точке $(1;1;-1)$.

3.③ Найти в точке $x=0$ производные 6-го и 7-го порядков функции
$$y(x)=\sin\left(\frac{x^3}{3}+\frac{\pi}{4}\right).$$

4.③ Найти вторую производную функции $f(x)$ и исследовать $f''(x)$ на непрерывность в точке $x=0$, если
$$f(x)=\int_{-1}^{x^2} y(t)\,dt,\quad y(x)=x\sin\frac{1}{x},$$
$$x\in(-1;1)\setminus\{0\},\quad y(0)=0.$$

II. Исследование поведения функций одной переменной

5.② Найти асимптоты графика функции $f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{x^3-x}}{\sqrt{9x^2-1}}$.

6.② Построить график функции $y=ex^2\ln x$, $x\in(0,+\infty)$.

7.② Найти многочлен, приближающий функцию $f(x)=e^{x^2-1}$ в окрестности точки $x=1$ с точностью до $o((x-1)^2)$.

8.③ Вычислить предел $\lim\limits_{x\to+0}\left(2\operatorname{ch}\dfrac{1}{x}\right)^{x+\operatorname{sh}x}$.

III. Интегралы от функций одной переменной

9.① Найти интеграл $\int \ln^2 x\,dx$.

10.② Найти все значения параметра α, при которых сходится интеграл

$$\int_0^1 \frac{(x-x^2)^\alpha}{\ln^{1/3}(1+x)}\,dx.$$

11.② Исследовать на сходимость интеграл $\int_3^{+\infty} \frac{x\cos 4x}{x^2-5}\,dx$.

12.② Вычислить криволинейный интеграл $\int_\Gamma \frac{2dx}{y} + 3x\,dy$, где Γ — дуга параболы $y = x^2$, с началом в точке $A(2;4)$ и концом в точке $B(1;1)$.

IV. Функции двух переменных

13.② Исследовать на экстремум функцию $u = x^3 + xy - \frac{1}{6}\,y^2$.

14.② Методом Лагранжа указать точки, в которых функция $f = 8x + 4y - 1$ может иметь экстремум при условии $8x^2 - y^2 + 2 = 0$.

15.③ Исследовать на дифференцируемость в точке $(0;0)$ функцию $f = \operatorname{tg}\sqrt{|xy|}$.

16.③ Решить уравнение $u_{yy} + 2u_{xy} = 8x$, преобразовав его, приняв за новые независимые переменные ξ и η, $\xi = x$, $\eta = x - 2y$.

V. Ряды. Системы функций

17.② Исследовать на сходимость и равномерную сходимость на множестве E ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^n}\,, \quad E = [0;1).$$

18.③ Написать формулы для вычисления коэффициентов Фурье при разложении функции $f(x) = \frac{(x-4\pi)^4}{\pi^4}$, $x \in [3\pi; 5\pi]$ в ряд Фурье $\frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$. Не вычисляя коэффициенты Фурье, построить на отрезке $[-\pi; 6\pi]$ график суммы $S(x)$ этого ряда, указав, чему равна $S(x)$ при $x = 0$, $x = \pi$. Выяснить, сходится ли этот ряд равномерно на отрезке $[3\pi; 5\pi]$.

19.③ Исследовать, любую ли непрерывную функцию, обращающуюся в нуль на концах отрезка а) $[0; \pi]$, б) $[\pi; 3\pi]$, можно приблизить на заданном отрезке с любой степенью точности конечными линейными комбинациями функций системы $\{\sin kx\}$, $k = 1, 2, \ \ldots$, по норме пространства C.

20.③ Доказать, что функция $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{2^{(n-x)n}}$ определена и бесконечно дифференцируема при любом x.

Часть 2

VI. Кратные интегралы. Формулы Грина, Остроградского–Гаусса, Стокса

В задачах 21–24 система координат прямоугольная правая.

21.② Найти циркуляцию векторного поля $\vec{a} = \begin{pmatrix} \frac{x}{r} + 1 \\ \frac{y}{r} + x \end{pmatrix}$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, вдоль окружности $r = 2$, положительно ориентированной относительно области $r < 2$.

22.② Вычислить поверхностный интеграл

$$\iint_S (x^2 + y)\, dy\, dz + 2y\, dz\, dx + dx\, dy,$$

где S — внешняя сторона полной поверхности полушара $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 4$, $z \geqslant 0$.

23.③ Найти поток векторного поля $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ yz^3 \\ x^3 \end{pmatrix}$ через ориентированную внутренней нормалью цилиндрическую поверхность $x^2 + y^2 = R^2$, $y \geqslant 0$, $0 \leqslant z \leqslant R$.

24.③ Вычислить интеграл $\int_\Gamma (x^2 + z)\, dx + (x - z)\, dy + 2y\, dz$, где Γ — замкнутая ломаная $ABCA$ с вершинами $A(2; 0; 0)$,

$B(0;2;0)$, $C(0;0;2)$, положительно ориентированная относительно нормали $\overrightarrow{N} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ к плоскости $x+y+z=2$.

VII. Аналитическая геометрия

В задачах 25, 26, 28 система координат прямоугольная.

25.② Даны вершины треугольника $A(1;1)$, $B(3;5)$, $C(3;2)$. Составить уравнение биссектрисы внутреннего угла треугольника при вершине A.

26.② Вычислить расстояние между прямыми l_1, l_2, если

$$l_1: \begin{cases} x = -1+6t, \\ y = 4+3t, \\ z = 1-2t, \end{cases} \qquad l_2: \begin{cases} x = -4t, \\ y = 5-2t, \\ z = t. \end{cases}$$

27.② Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{a}t$ и параллельной прямой l, если

$$l: \begin{cases} (\vec{r}, \vec{n}_1) = D_1, \\ (\vec{r}, \vec{n}_2) = D_2, \end{cases} \qquad (\vec{a}, \vec{n}_1, \vec{n}_2) \neq 0.$$

28.① Составить уравнение касательной к кривой $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{4} = 1$ в точке $M_0\left(-10; \frac{8}{3}\right)$.

VIII. Линейная алгебра

29.② Найти общее решение системы уравнений $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1. \end{cases}$

30.② Линейное преобразование в базисе $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ имеет матрицу $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$. Найти матрицу A' этого преобразования в базисе $\vec{e}_1{}'$, $\vec{e}_2{}'$, если $\vec{e}_1{}' = \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$, $\vec{e}_2{}' = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$.

31.① Самосопряжённое преобразование в ортонормированном базисе $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ имеет матрицу $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. Найти ортонормированный базис, в котором матрица этого преобразования имеет диагональный вид.

32. ② Привести квадратичную форму $g = x_1^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2^2 + x_3^2$ с помощью метода Лагранжа или элементарных преобразований её матрицы к каноническому виду.

IX. Линейные дифференциальные уравнения и системы

33. ② Найти все действительные решения уравнения

$$y'' - 4y' + 5y = 16\sin^2\frac{x}{2}\,.$$

34. ③ Найти все действительные решения системы уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x + y - z, \\ \dot{y} = -6x - 4y + 3z, \\ \dot{z} = -2x + 2y - 3z, \end{cases} \qquad \begin{array}{r} \lambda_1 = -1, \\ \lambda_{2,3} = -4. \end{array}$$

35. ② Найти интегральную кривую уравнения

$$y\,dx = (2x + y^2 \ln y)\,dy,$$

проходящую через точку $(0; 1)$.

36. ③ Найти общее решение уравнения

$$(e^x - 1)y'' + 2y' - e^x y = e^x, \quad x > 0,$$

зная его частное решение $y_1 = -1$ и решение $y_0 = e^x + 1$ соответствующего однородного уравнения.

X. Дифференциальные уравнения n-го порядка. Положения равновесия. Вариационная задача

37. ② Решить уравнение

$$x(x^2 + y^2)\,dx + 2y(y\,dx - x\,dy) = 0, \quad x \neq 0.$$

38. ③ Найти решение уравнения

$$y''y + y'^2 = 2yy',$$

удовлетворяющее начальным условиям
$y(0) = y'(0) = -1.$

39. ③ Найти положения равновесия системы уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = 3y - \sin y, \\ \dot{y} = 2\left(\frac{1}{xy + x} - 1\right), \end{cases}$$

определить их характер и нарисовать фазовые траектории на плоскости (x, y) для соответствующей линеаризованной системы.

40.③ Решить вариационную задачу

$$J(y) = \int_1^2 \left(xy'^2 + 2yy' + \frac{4}{x}\, y^2 + 6y \right) dx \quad y(1) = 3, \quad y(2) = -1.$$

Вариант 3

Часть 1

I. Дифференцируемость функций одной переменной, производные высших порядков

1.② Найти $y''(0)$ функции $y(x)$, заданной неявно уравнением $x^5 + 4y = x + y^5 + 3$ и удовлетворяющей условию $y(0) = 1$.

2.② Найти производную скалярного поля $u = x^2 + \dfrac{y^2}{2} - z^2$ в точке $(1; -2; 2)$ в направлении радиуса-вектора $\vec{r}$ этой точки.

3.③ Найти в точке $x = 0$ производные 8-го и 9-го порядков функции

$$y(x) = \frac{1}{5}\, e^{\frac{1+x^2}{2}}.$$

4.③ Привести пример функции $f(x)$, дифференцируемой на интервале $(-2; 2)$, у которой производная разрывна в $x = -1$. Проанализировать, может ли функция, удовлетворяющая таким условиям, иметь в точке $x = -1$ производную второго порядка.

II. Исследование поведения функций одной переменной

5.② Найти асимптоты графика функции $f(x) = \dfrac{x^2 e^x - e^{2x}}{x - 1}$.

6.② Построить график функции $y = \dfrac{e \ln(-x)}{x}$, $x \in (-\infty; 0)$.

7.② Найти многочлен, приближающий функцию $f(x) = \ln \dfrac{x}{3x + 4}$ в окрестности точки $x = -2$ с точностью до $o((x + 2)^2)$.

8.③ Вычислить предел $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x(e^{\frac{1}{x}}-1)\right)^{x+\sin 2x}$.

III. Интегралы от функций одной переменной

9.① Найти интеграл $\int \dfrac{x^5}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$.

10.② Найти все значения параметра α, при которых сходится интеграл

$$\int_1^{+\infty}\left(\frac{x^3+x}{x-1}\right)^{\alpha}dx.$$

11.② Исследовать на сходимость интеграл $\int_1^{+\infty}\cos\frac{1}{x}\cdot\sin x\,dx$.

12.② а) Исследовать на потенциальность векторное поле

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}3x^2y+1\\ x^3\end{pmatrix};$$

б) Найти работу этого поля вдоль прямолинейного отрезка с началом в точке $A(5;0)$ и концом в точке $B(3;4)$.

IV. Функции двух переменных

13.② Исследовать на экстремум функцию $u=x^3+6xy+6y^2$.

14.② Методом Лагранжа указать точки, в которых функция $f=2x-y-3$ может иметь экстремум при условии $x^2-y^2=27$.

15.③ Исследовать на дифференцируемость в точке $(0;0)$ функцию $f=\operatorname{arctg}\left|x^2-\dfrac{y^2}{2}\right|$.

16.③ Решить уравнение $u_{xx}+6u_{xy}+9u_{yy}=2$, преобразовав его, приняв за новые независимые переменные ξ и η, $\xi=3x-y$, $\eta=x$.

V. Ряды. Системы функций

17.② Исследовать на сходимость и равномерную сходимость на множестве E ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{x}{\sqrt[3]{n}}\right)}{n+x},\quad E=[0;1].$$

18.③ Написать формулы для вычисления коэффициентов Фурье при разложении функции $f(x) = \frac{x^5}{8}$, $x \in (-1; 2)$ в ряд Фурье $\frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{2\pi nx}{3} + b_n \sin\frac{2\pi nx}{3}$. Не вычисляя коэффициенты Фурье, построить на отрезке $[-3; 5]$ график суммы $S(x)$ этого ряда, указав, чему равна $S(x)$ при $x = 3$, $x = 5$. Выяснить, сходится ли этот ряд равномерно на отрезке $[-3; 5]$.

19.③ Исследовать, любую ли непрерывную функцию можно приблизить с любой степенью точности конечными линейными комбинациями функций системы $\{\cos kx\}$, $k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$, по норме пространства C на отрезке а) $\left[-\frac{\pi}{2}\,; 0\right]$; б) $[\pi; 3\pi]$.

20.③ Доказать, что функция $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^{nx}}$ определена и бесконечно дифференцируема при $x > 0$.

Часть 2

VI. Кратные интегралы. Формулы Грина, Остроградского–Гаусса, Стокса

В задачах 21–24 система координат прямоугольная правая.

21.② Вычислить интеграл $\int_\Gamma (x^2 + y^2)\,dx + (x - y^2)\,dy$, где Γ — замкнутая ломаная $ABCDA$ с вершинами $A(1; 1)$, $B(3; 1)$, $C(3; 2)$, $D(1; 2)$, положительно ориентированная относительно конечной области, которую Γ ограничивает.

22.② Вычислить поверхностный интеграл

$$\iint_S (2xy + xz^2)\,dy\,dz - 3yz\,dx\,dy,$$

где S — внешняя сторона поверхности, являющейся границей области, ограниченной цилиндром $x^2 + y^2 = 1$, $x \geqslant 0$, $0 \leqslant z \leqslant 3$, и плоскостями: $x = 0$, $z = 0$, $z = 3$.

23.③ Найти поток векторного поля $\vec{a} = \begin{pmatrix} x^6 \\ z \\ z^2 \end{pmatrix}$ через ориентированную внешней нормалью коническую поверхность $z^2 = x^2 + y^2$ при $y \leqslant 0$, $0 \leqslant z \leqslant 1$.

24.③ Найти циркуляцию векторного поля $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2y \\ 2z \\ x \end{pmatrix}$ по контуру $\Gamma = S_1 \cap S_2$, $S_1\colon\ z = x^2 + y^2$, $S_2\colon\ x + y - z = 0$, ориентированному отрицательно относительно нормали $\overrightarrow{N} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ к плоскости S_2.

VII. Аналитическая геометрия

В задачах 25, 26, 28 система координат прямоугольная.

25.② Найти расстояние между прямыми l_1, l_2 на плоскости, если

$$l_1 : \begin{cases} x = 1 + t, \\ y = -2 + 2t, \end{cases} \quad l_2 = \begin{cases} x = 2 + t, \\ y = 1 + 2t. \end{cases}$$

26.② Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(1; 0; 2)$ перпендикулярно линии пересечения плоскостей

$$x + y - z + 2 = 0 \quad \text{и} \quad 4x - 3z + 3 = 0.$$

27.② Найти точку пересечения прямой $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{a}t$ с плоскостью $\vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{b}u + \vec{c}v$, $\vec{a}\vec{b}\vec{c} \neq 0$.

28.① Составить уравнение касательной к кривой $y^2 = 16x$ в точке $M_0(1; -4)$.

VIII. Линейная алгебра

29.② Указать значение параметра α, при котором система уравнений $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 = \alpha \end{cases}$ совместна, и выписать общее решение системы при этом значении α.

30.② Линейное преобразование в базисе $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ имеет матрицу $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Найти матрицу A' этого преобразования в базисе $\vec{e}_1{}'$, $\vec{e}_2{}'$, если $\vec{e}_1{}' = \vec{e}_1 - \vec{e}_2$, $\vec{e}_2{}' = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2$.

31.① Самосопряжённое преобразование в ортонормированном базисе $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ имеет матрицу $A = \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$. Найти ортонормированный базис, в котором матрица этого преобразования имеет диагональный вид.

32.② Привести квадратичную форму $g = x_1^2 - 5x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 10x_2x_3$ с помощью метода Лагранжа или элементарных преобразований её матрицы к каноническому виду.

IX. Линейные дифференциальные уравнения и системы

33.② Найти все действительные решения уравнения

$$y'' + 6y' + 9y = 2e^{-3x} + 9x + 6.$$

34.③ Найти все действительные решения системы уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = -x - 4y, \\ \dot{y} = x - y + z, \\ \dot{z} = 3y - z \end{cases}, \qquad \begin{matrix} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_{2,3} = -1 \pm i. \end{matrix}$$

35.② Найти интегральную кривую уравнения

$$(2x \cos x - y \operatorname{tg} x)\, dx - dy = 0,$$

проходящую через точку $(0; 0)$.

36.③ Решить уравнение

$$(x - 1)y'' + (1 - 2x)y' + xy = \frac{e^x}{x - 1}, \quad x > 1,$$

зная, что $y = e^x$ — решение соответствующего однородного уравнения.

X. Дифференциальные уравнения n-го порядка. Положения равновесия. Вариационная задача

37.② Решить уравнение

$$xy' - y = 3x^4 e^{-2\frac{y}{x}}.$$

38.③ Найти решение уравнения

$$x(yy'' - y'^2) = yy',$$

удовлетворяющее начальным условиям $y(1) = y'(1) = 1$.

39.③ Найти положения равновесия системы уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = \arcsin(y - 4x), \\ \dot{y} = e^x - 2e^{2x} + 1, \end{cases}$$

определить их характер и нарисовать фазовые траектории на плоскости (x, y) для соответствующей линеаризованной системы.

40.③ Решить вариационную задачу

$$J(y) = \int_0^{\pi} \left(y'^2 - 8xyy' + 10y\cos x\right) dx \quad y(\pi) = 1.$$

Вариант 4

Часть 1

I. Дифференцируемость функций одной переменной, производные высших порядков

1.② Найти $y''(0)$ функции $y(x)$, заданной неявно уравнением $2y + xy^3 + 2e^x = 0$ и удовлетворяющей условию $y(0) = -1$.

2.② Найти производную скалярного поля $u = x^2 + y^2 + \dfrac{z^2}{2}$ в направлении градиента поля $v = xy - z^2$ в точке $(3; 0; -2)$.

3.③ Найти в точке $x = 0$ производные 6-го и 7-го порядков функции

$$y(x) = \frac{1}{3 - x^3}.$$

4.③ Найти вторую производную функции $f(x)$ и исследовать $f''(x)$ на непрерывность в точке $x = 0$, если

$$f(x) = \int_{x^2}^{1} y(t)\,dt, \quad x \in (-1; 1), \quad y(x) = x \cos\frac{1}{x}, \quad x \in (-1; 1) \setminus \{0\}, \quad y(0) = 0.$$

II. Исследование поведения функций одной переменной

5.② Найти асимптоты графика функции $f(x) = \dfrac{x^2\sqrt{x^2 - x}}{x^2 - 4}$.

6.② Построить график функции $y = 2^{-1/x}$, $x \in (0; +\infty)$.

7.② Найти многочлен, приближающий функцию $f(x) = \dfrac{\ln(x-2)}{x-1}$ в окрестности точки $x = 3$ с точностью до $o((x-3)^2)$.

8.③ Вычислить предел $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x - \ln(1+x) - 3\cos x}{2x + \ln \operatorname{sh} x}$.

III. Интегралы от функций одной переменной

9.① Найти интеграл $\int x \ln^2 x\,dx$.

10.② Найти все значения параметра α, при которых сходится интеграл

$$\int_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^{\alpha} 2x\,dx.$$

11.② Исследовать на сходимость интеграл $\int_0^{+\infty} \dfrac{x \sin 2x}{4x^2 + 5}\,dx$.

12.② Вычислить криволинейный интеграл $\int_\Gamma 7y\sqrt{x}\,dx + 2(x^2 + y)\,dy$, где Γ — дуга параболы $y = 1 - x^2$ с началом в точке $A(1; 0)$ и концом в точке $B(0; 1)$.

IV. Функции двух переменных

13.② Исследовать на экстремум функцию $u = x^2 + y^3 + xy + x$.

14.② Методом Лагранжа указать точки, в которых функция $f = x - 4y - 2$ может иметь экстремум при условии $x^2 - 2y^2 + \frac{1}{7} = 0$.

15.③ Исследовать на дифференцируемость в точке $(0; 0)$ функцию $f = \operatorname{sh}\sqrt{|xy|}$.

16.③ Решить уравнение $u_{xx} - 2u_{xy} = 8(2x + y)$, преобразовав его, приняв за новые независимые переменные ξ и η, $\xi = y$, $\eta = 2x + y$.

V. Ряды. Системы функций

17.② Исследовать на сходимость и равномерную сходимость на множестве E ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^n + x^n}, \quad E = [0; +\infty).$$

18.③ Написать формулы для вычисления коэффициентов Фурье при разложении функции $f(x) = \pi^2 - (x - 2\pi)^2$, $x \in [\pi; 3\pi]$ в ряд Фурье $\frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$. Не вычисляя коэффициенты Фурье, построить на отрезке $[-2\pi; 4\pi]$ график суммы $S(x)$ этого ряда, указав, чему равна $S(x)$ при $x = 0$, $x = -\pi$. Выяснить, сходится ли этот ряд равномерно на отрезке $[\pi; 3\pi]$.

19.③ Исследовать, любую ли непрерывную функцию, обращающуюся в нуль на концах отрезка а) $[-\pi; 0]$, б) $[-\pi; \pi]$, можно приблизить на заданном отрезке с любой степенью точности конечными линейными комбинациями функций системы $\{\sin kx\}$, $k = 1, 2, \ \ldots$, по норме пространства C.

20.③ Доказать, что функция $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{e^{n(x-n)}}{\sqrt{n}}$ определена и бесконечно дифференцируема при любом x.

Часть 2

VI. Кратные интегралы. Формулы Грина, Остроградского–Гаусса, Стокса

В задачах 21–24 система координат прямоугольная правая.

21.② Найти циркуляцию векторного поля $\vec{a} = \begin{pmatrix} \frac{x}{r^2} - y \\ \frac{y}{r^2} + 2 \end{pmatrix}$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, вдоль окружности $r = 3$, положительно ориентированной относительно области $r < 3$.

22.③ Вычислить поверхностный интеграл

$$\iint_S (3x - z)\,dy\,dz + (y + 2z)\,dx\,dy,$$

где S — плоский треугольник с вершинами $(1;0;0)$, $(0;1;0)$, $(0;0;1)$, ориентированный нормалью $\overrightarrow{N} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

23.② Найти поток векторного поля $\vec{a} = \begin{pmatrix} xz \\ 3y + z \\ 0 \end{pmatrix}$ через ориентированную внешней нормалью поверхность $\frac{x^2}{4} + y^2 + z^2 = 1$.

24.③ Вычислить интеграл $\int_\Gamma y\,dx - z\,dy + (z^3 - 2x)\,dz$, где контур $\Gamma = S_1 \cap S_2$, S_1: $x^2 + y^2 = 1$, S_2: $3x + y + z = 1$, положительно ориентирован относительно нормали $\overrightarrow{N} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ к плоскости S_2.

VII. Аналитическая геометрия

В задачах 25, 26, 28 система координат прямоугольная.

25.② Даны две вершины $A(-6;2)$, $B(2;-2)$ треугольника ABC и точка $D(1;2)$ пересечения его высот. Составить уравнение стороны AC.

26.② Найти расстояние ρ между двумя параллельными прямыми l_1 и l_2:

$$l_1:\ \frac{x-5}{3} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-2}{2}, \quad l_2:\ \frac{x-4}{3} = \frac{y+3}{4} = \frac{z-1}{2}.$$

27.② Составить уравнение плоскости, проходящей через две точки $M_1(\vec{r}_1)$, $M_2(\vec{r}_2)$ и перпендикулярной плоскости $(\vec{r}-\vec{r}_0, \vec{n}_1, \vec{n}_2) = 0$, $[\vec{r}_1 - \vec{r}_2, [\vec{n}_1, \vec{n}_2]] \neq \vec{0}$.

28.① Составить уравнение касательной к кривой $xy = 2$ в точке $M_0(1; 2)$.

VIII. Линейная алгебра

29.② Найти общее решение системы уравнений $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 1. \end{cases}$

30.② Линейное преобразование в базисе $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ имеет матрицу $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Найти матрицу A' этого преобразования в базисе $\vec{e}_1'$, $\vec{e}_2'$, если $\vec{e}_1' = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2$, $\vec{e}_2' = \vec{e}_1 - \vec{e}_2$.

31.① Самосопряжённое преобразование в ортонормированном базисе $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ имеет матрицу $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Найти ортонормированный базис, в котором матрица этого преобразования имеет диагональный вид.

32.② Привести квадратичную форму $g = 2x_1^2 + 2x_2^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3$ с помощью метода Лагранжа или элементарных преобразований её матрицы к каноническому виду.

IX. Линейные дифференциальные уравнения и системы

33.② Найти все действительные решения уравнения $y'' - 2y' = 4x + 5\sin x$.

34.③ Найти все действительные решения системы уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x - 3y, \\ \dot{y} = x - 2z, \\ \dot{z} = -y + 2z, \end{cases}, \qquad \begin{matrix} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_{2,3} = 1. \end{matrix}$$

35.② Найти интегральную кривую уравнения

$$y^3\,dx = (4xy^2 - 6)\,dy,$$

проходящую через точку $(2; 1)$.

36.③ Найти общее решение уравнения

$$(1-x^2)y'' - xy' + y = 1, \quad 0 < x < 1,$$

зная два его решения $y_1 = 1$, $y_2 = 5x + 1$.

X. Дифференциальные уравнения n-го порядка. Положения равновесия. Вариационная задача

37.② Решить уравнение

$$y^2(x^2\,dy + 2xy\,dx) + x\,dy = y\,dx.$$

38.③ Найти решение уравнения

$$2xy'y'' = y'^2 + x^2,$$

удовлетворяющее начальным условиям
$y(1) = 0$, $y'(1) = 1$.

39.③ Найти положения равновесия системы уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = \operatorname{sh}(2xy - y + 1), \\ \dot{y} = \sqrt[4]{1 + 12x} - 1, \end{cases}$$

определить их характер и нарисовать фазовые траектории на плоскости (x, y) для соответствующей линеаризованной системы.

40.③ Решить вариационную задачу

$$J(y) = \int_{1/2}^{1} \big(x^3y'^2 - 3x^2yy' - 4y\big)\,dx, \quad y\left(\frac{1}{2}\right) = 9, \quad y(1) = \frac{3}{2}\,.$$

Ответы и решения. 2004/2005 учебный год

Вариант 2

1. $y'(1) = -1$, $y''(1) = -\frac{3}{2}$.

2. $\frac{\partial u}{\partial \vec{l}} = 3$.

3. $y^{(6)}(0) = -20\sqrt{2}$, $y^{(7)}(0) = 0$.

4. $f'(x) = 2x^3 \sin \frac{1}{x^2}$, $x \in (-1;1) \setminus \{0\}$, $f'(0) = 0$; $f''(x) = 6x^2 \sin \frac{1}{x^2} - 4\cos \frac{1}{x^2}$, $x \in (-1;1) \setminus \{0\}$, $f''(0) = 0$, $f''(x)$ в $x = 0$ разрывна.

5. $x = \frac{1}{3}$ при $x \to \frac{1}{3} + 0$, $x = -\frac{1}{3}$ при $x \to -\frac{1}{3} - 0$, $y = \frac{1}{3}$ при $x \to +\infty$, $y = -\frac{1}{3}$ при $x \to -\infty$.

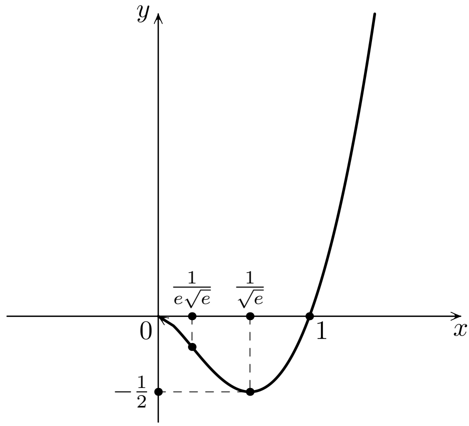

Рис. 1

6. $y' = 2ex\left(\ln x + \frac{1}{2}\right)$, $x > 0$, $y'' = 2e\left(\ln x + \frac{3}{2}\right)$, $x > 0$; Асимптот нет; $\lim\limits_{x\to+0} y = 0$, $\lim\limits_{x\to+0} y' = 0$; $y'\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = 0$, $y''\left(\frac{1}{e\sqrt{e}}\right) = 0$, $y\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = -\frac{1}{2}$ (лок. мин.), $y\left(\frac{1}{e\sqrt{e}}\right) = -\frac{3}{2e^2}$ (перегиб). График см. на рис. 1.

7. $f(x) = 1 + 2(x-1) + 3(x-1)^2 + o((x-1)^2)$.

8. e^2. | **9.** $x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x + C$. | **10.** $\alpha > -\frac{2}{3}$.

11. Сходится. | **12.** -15.

13. $A(0;0)$ — нет экстремума; $B(-1;-3)$ — точка строгого локального максимума.

14. $\lambda_1 = 1$, $A\left(-\frac{1}{2}\,;2\right)$; $\lambda_2 = -1$, $B\left(\frac{1}{2}\,;-2\right)$.

15. Недифференцируема.

16. $u_{\xi\eta} = -2\xi$, $u = x^2(2y-x) + \varphi(x-2y) + \psi(x)$, $\forall\,\varphi,\psi \in C^2$.

17. Сходится; сходится неравномерно, так как $u_n\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}}\right) = \dfrac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$, не выполнено необходимое условие равномерной сходимости.

18. $S(0) = S(4\pi) = f(4\pi) = 0$, $S(\pi) = S(3\pi) = f(3\pi) = 1$.

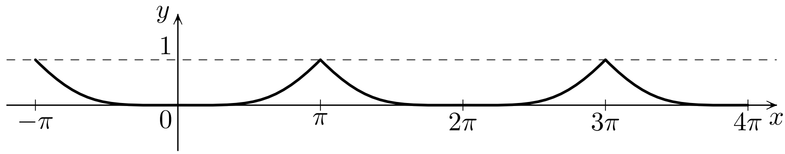

Рис. 2

Сходится равномерно (по теореме о равномерной сходимости ряда Фурье), $a_n = \frac{1}{\pi^5}\int_{3\pi}^{5\pi}(x-4\pi)^4\cos nx\,dx$, $n = 0$, $1, \ \ldots$, $b_n = 0$, $n = 1, 2, \ \ldots$, $l = \pi$. График см. на рис. 2.

19. а) Да; б) нет, $f = \cos\frac{x}{2}$.

20. $\forall\, x = x_0$ ряд сходится; при $x \leqslant d$, $\forall\, d$, сходится равномерно; и там же сходятся равномерно ряды для производных.

21. 4π. | **22.** $\frac{32}{3}\,\pi$. | **23.** $-\frac{\pi R^6}{8}$. | **24.** 10. | **25.** $y = x$.

26. $\frac{1}{\sqrt{5}}$. | **27.** $(\vec r - \vec r_0, \vec a, [\vec n_1, \vec n_2]) = 0$. | **28.** $5x + 12y + 18 = 0$.

29. $$\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix} = C_1\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\0\end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \quad C_i = \mathrm{const},\ i = 1,2.$$

30. $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; $A' = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

31. $\lambda_1 = 0$, $h_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\lambda_2 = 5$, $h_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

32. $g = \xi_1^2 + \xi_2^2 - \xi_3^2$, $\xi_1 = x_1 - 2x_2 + x_3$, $\xi_2 = x_2 + x_3$, $\xi_3 = x_2 - x_3$.

33. $y = C_1 e^{2x} \cos x + C_2 e^{2x} \sin x + \frac{8}{5} + \sin x - \cos x$, C_i — const, $i = 1, 2$.

34.
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-4t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} +$$
$$+ C_3 e^{-4t} \left(t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right), \ C_i \text{ — const}, \ i = 1, 2, 3.$$

35. $x = \frac{1}{2} y^2 \ln^2 y$.

36. $y = C_1(e^x + 1) + \dfrac{C_2}{e^x - 1} - 1$, C_i — const, $i = 1, 2$.

37. $x - \ln\left(1 + \dfrac{y^2}{x^2}\right) = C$, $C = \text{const}$. $Ce^x = 1 + \dfrac{y^2}{x^2}$.

38. $y = -e^x$.

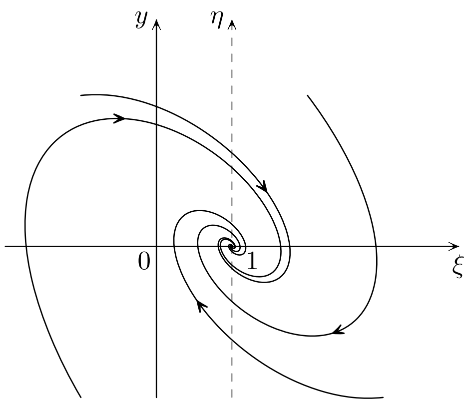

Рис. 3

39. $(1; 0)$, $\begin{cases} \dot{\xi} = 2\eta, \\ \dot{\eta} = -2\xi - 2\eta, \end{cases}$ $(\xi = x - 1,\ \eta = y)$, $\lambda_{1,2} = -1 \pm \sqrt{3}i$, устойчивый фокус, закручивание по часовой стрелке, $\xi = 1$, $\eta = 0$, $\begin{pmatrix} \dot\xi \\ \dot\eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ (см. рис. 3).

40. $y = \dfrac{4}{x^2} - x$; абсолютный минимум; уравнение Эйлера: $x^2y'' + xy' - 4y = 3x$.

Вариант 3

Часть 1

Для вычисления производной y' функции $y(x)$, заданной неявно уравнением $F(x, y) = 0$, дифференцируем по x тождество $F(x, y(x)) \equiv 0$ и из полученного равенства находим $y'(x)$.

1. Имеем

$$5x^4 + 4y' = 1 + 5y^4 \cdot y'. \tag{1}$$

Так как $y(0) = 1$, то из (1) следует $y'(0) = -1$. Дифференцируя тождество (1), получаем

$$20x^3 + 4y'' = 20y^3 \cdot y'^2 + 5y^4 \cdot y'', \quad y''(0) = \mathbf{-20}.$$

Производную дифференцируемой функции $u(x, y, z)$ по направлению вектора $\vec{l}$, $|\vec{l}| = 1$, можно вычислить по формуле

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{l}} = (\vec{l}, \operatorname{grad} u), \tag{2}$$

$\operatorname{grad} u = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix}$. Система координат прямоугольная.

2. $\vec{l} = \dfrac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$, $|\vec{r}| = \sqrt{1+4+4} = 3$, $\vec{l} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\operatorname{grad} u = \begin{pmatrix} 2x \\ y \\ -2z \end{pmatrix}$. В точке $M_0(1; -2; 2)$ имеем $\operatorname{grad} u(M_0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\dfrac{\partial u}{\partial \vec{l}} = \dfrac{1}{3}(2 + 4 - 8) = \mathbf{-\dfrac{2}{3}}$ (см. (2)).

Для вычисления в точке $x = 0$ производной $y^{(k)}$ функции $y(x)$ можно использовать разложение $y(x)$ по формуле Маклорена в точке $x = 0$ до $o(x^k)$, если такое разложение известно, $y = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n)$, откуда

$$y^{(k)}(0) = k!a_k \qquad (3)$$

3. $y(x) = \frac{1}{5}\sqrt{e}e^{\frac{x^2}{2}} =$

$$= \frac{1}{5}\sqrt{e}\left(1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2!\cdot 4}x^4 + \frac{1}{3!\cdot 8}x^6 + \frac{1}{4!\cdot 16}x^8 + o(x^9)\right).$$

Используя формулу (3), получаем

$$y^{(8)}(0) = 8!\,\frac{\sqrt{e}}{4!\cdot 80} = \boldsymbol{21\sqrt{e}}, \quad y^{(9)}(0) = \mathbf{0}.$$

Если функция $f(x)$ дифференцируема на интервале $(a;b)$ и точка $x_0 \in (a;b)$ является точкой разрыва производной $f'(x)$, то разрыв f' может быть только 2-го рода. Действительно, если существуют конечные односторонние пределы:

$$\lim_{x\to x_0+0} f'(x) = A \quad \text{и} \quad \lim_{x\to x_0-0} f'(x) = B,$$

то $A = B = f'(x_0)$, так как при $h = x - x_0$

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to +0}\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h\to +0} f'(\xi) = A,$$

$\xi = x_0 + \theta h$, $0 < \theta < 1$, аналогично $f'(x_0) = B$.

Функция $\psi(x)$, имеющая производную $\psi^{(n)}$, $n \geqslant 1$, $n \in \mathbb{N}$, в точке $x_0 \in (a,b)$, непрерывна в x_0 вместе с производными $\psi^{(k)}$, $0 \leqslant k \leqslant n-1$.

4. Рассмотрим при $x \in (-2;2)$ функцию

$$f(x) = \begin{cases} (x+1)^2 \sin\frac{1}{x+1}, & x \neq -1, \\ 0, & x = -1. \end{cases}$$

Имеем $f'(-1) = \lim\limits_{x+1\to 0} \dfrac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \lim\limits_{x+1\to 0}(x + 1)\sin\dfrac{1}{x+1} = 0$, $f'(x) = 2(x+1)\sin\dfrac{1}{x+1} - \cos\dfrac{1}{x+1}$ при $x \neq -1$, $f(x)$ дифференцируема на $(-2;2)$.

Так как не существует $\lim\limits_{x+1\to+0} f'(x)$ ($\lim\limits_{x+1\to-0} f'(x)$ тоже не существует), то точка $x=-1$ является точкой разрыва $f'(x)$.

У любой дифференцируемой на $(-2;2)$ функции, имеющей в точке $x=-1$ разрывную производную, не может в $x=-1$ существовать вторая производная, так как в противном случае первая производная в $x=-1$ была бы непрерывна.

При исследовании графика функции $f(x)$ на невертикальные асимптоты $y = k_j x + b_j$, $j = 1, 2$, надо вычислить k_j, b_j, если такие существуют:

$$k_1 = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}, \quad k_2 = \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x},$$

$$b_1 = \lim_{x\to+\infty}(f(x)-k_1x), \quad b_2 = \lim_{x\to-\infty}(f(x)-k_2x).$$

Иногда удобно получить асимптотические разложения $f(x)$:

$$f(x) = k_1x + b_1 + o(1), \quad x\to+\infty;$$

$$f(x) = k_2x + b_2 + o(1), \quad x\to-\infty.$$

Используется предельное соотношение при $\forall\,\alpha\in\mathbb{R}$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^\alpha}{e^x} = 0. \tag{4}$$

5. $x = 1$ — вертикальная асимптота, так как $\lim\limits_{x\to1} f(x) = \infty$. Асимптоты при $x\to+\infty$ нет, так как в силу (4)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{-e^{2x}}{x^2}\left(1-\frac{x^2}{e^x}\right)\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-1}\right] = -\infty.$$

$y = 0$ — горизонтальная асимптота при $x \to -\infty$,
так как

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x}{e^{-x}}\left(1-\frac{1}{x^2e^{-x}}\right)\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-1}\right] = 0.$$

6. Имеем $y(-1) = 0$.

$x = 0$ — вертикальная асимптота при $x \to -0$, так как

$$\lim_{x\to-0} y(x) = \lim_{x\to-0}\frac{e\ln(-x)}{x} = +\infty.$$

$y = 0$ — горизонтальная асимптота при $x \to -\infty$, так как

$$\lim_{x\to-\infty} y(x) = \lim_{x\to-\infty}\frac{e\ln(-x)}{x} = 0,$$

что следует из (4).

Вычисляем y', y''. Получаем

$$y' = \frac{e}{x^2}\,(1-\ln(-x)), \quad y'' = -\,\frac{2e}{x^3}\left(\frac{3}{2}-\ln(-x)\right).$$

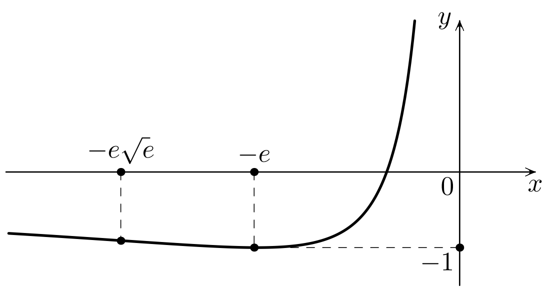

Рис. 4

x	$-\infty$		$-e^{\frac{3}{2}}$		$-e$		0
y	-0		$-\dfrac{3}{2\sqrt{e}}$		-1		$+\infty$
y'		$-$	$-\dfrac{1}{2e^2}$	$-$	0	$+$	
y''		$-$	0	$+$	$+$	$+$	

$x = -e$ — точка минимума, $x = -e\sqrt{e}$ — точка перегиба.
График $y(x)$ см. на рис. 4.

Пусть $f(x)$ — n раз дифференцируемая в точке x_0 функция.

Многочлен, приближающий функцию $f(x)$ в окрестности точки x_0 с точностью до $o((x-x_0)^n)$, единственен. Это многочлен Тейлора (Маклорена, если $x_0 = 0$).

7. Делаем замену переменной $t = x+2$, $x = t-2$. Функцию $\varphi(t) \equiv f(t-2)$ разлагаем по формуле Маклорена до $o(t^2)$. Получаем

$$\varphi(t) = \ln\frac{t-2}{3t-2} = \ln\frac{1-\frac{t}{2}}{1-\frac{3t}{2}} =$$

$$= \ln\left(1-\frac{t}{2}\right) - \ln\left(1-\frac{3t}{2}\right) = t + t^2 + o(t^2),$$

откуда $\boldsymbol{f(x) = x+2+(x+2)^2+o((x+2)^2)}$.

При вычислении $\lim\limits_{x\to x_0} u^v$ (x_0 может равняться $\pm\infty$) используем равенства:

$$u^v = e^{v\ln u}, \quad \lim_{x\to x_0} u^v = e^{\lim\limits_{x\to x_0}(v\ln u)}. \tag{5}$$

8. На основании (5) надо вычислить

$$\lim_{x\to+\infty}\left[(x+\sin 2x)\ln\left(x(e^{\frac{1}{x}}-1)\right)\right]. \tag{6}$$

Разложим $e^{\frac{1}{x}}$ по степеням $\frac{1}{x}$ до $o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ при $x\to+\infty$.

Получим $e^{\frac{1}{x}} = 1+\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ при $x\to+\infty$. Тогда при $x\to+\infty$

$$(x+\sin 2x)\ln(x(e^{\frac{1}{x}}-1)) = (x+\sin 2x)\ln\left(1+\frac{1}{2x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right) =$$

$$= x\left(1+\frac{\sin 2x}{x}\right)\left(\frac{1}{2x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right),$$

откуда следует, что предел (6) равен $\frac{1}{2}$. Искомый предел равен $\boldsymbol{\sqrt{e}}$.

9. Сделав подстановку $u = \sqrt{1+x^2}$, $x^2 = u^2 - 1$, $x\,dx = u\,du$, получим

$$\int \frac{x^5}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \int (u^2-1)^2 du = \int (u^4 - 2u^2 + 1)\,du =$$

$$= \frac{u^5}{5} - \frac{2}{3}\,u^3 + u + C,$$

C — любая постоянная.

При исследовании на сходимость несобственных интегралов от знакопостоянных функций пользуются следствием из признака сравнения: если функции $f(x)$, $g(x)$ положительны и непрерывны при $x \geqslant a$ и $f(x) \sim g(x)$ при $x \to +\infty$, то $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ и $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ сходятся или расходятся одновременно.

Аналогичные утверждения верны для несобственных интегралов других типов от знакопостоянных функций.

10. Обозначим данный интеграл через J:

$$J = \int_1^2 f(x)\,dx + \int_2^{+\infty} f(x)\,dx,$$

где $f(x) = \left(\dfrac{x^3+x}{x-1}\right)^{\alpha}$.

1) Исследование на сходимость $\int_1^2 f(x)\,dx$.

$f(x) \underset{x\to 1+0}{\sim} \dfrac{2^{\alpha}}{(x-1)^{\alpha}} \equiv g_1(x)$; $\int_1^2 g_1(x)\,dx$ сходится при $\alpha < 1$, расходится при $\alpha \geqslant 1$. То же самое верно для $\int_1^2 f(x)\,dx$.

2) Исследование на сходимость $\int_2^{+\infty} f(x)\,dx$.

$f(x) \underset{x\to +\infty}{\sim} \dfrac{x^{3\alpha}}{x^{\alpha}} = \dfrac{1}{x^{-2\alpha}} \equiv g_2(x)$; $\int_2^{+\infty} g_2(x)\,dx$ сходится при $-2\alpha > 1$, $\alpha < -\frac{1}{2}$, расходится при $\alpha \geqslant -\frac{1}{2}$. То же самое верно для $\int_2^{+\infty} f(x)\,dx$.

Следовательно, $\boldsymbol{J}$ **сходится при** $\boldsymbol{\alpha < -\frac{1}{2}}$**, расходится при** $\boldsymbol{\alpha \geqslant -\frac{1}{2}}$.

Несобственный интеграл с особенностью в точке $x = b$ расходится тогда и только тогда, когда не выполнено условие Коши, т.е.

$$\exists\,\varepsilon > 0: \quad \forall\,\eta \in [a;b) \quad \exists\,\eta' \in (\eta;b), \quad \exists\,\eta'' \in (\eta;b): \\ \left|\int_{\eta'}^{\eta''} f(x)\,dx\right| \geqslant \varepsilon.$$

11. $\lim\limits_{x\to+\infty} \cos\frac{1}{x} = 1$, $\cos\frac{1}{x} \geqslant \frac{1}{2}$ при $x \geqslant 1$; для $\forall\,\eta \in [1;+\infty)$ $\exists\,\eta' = 2\pi n > \eta$, $\exists\,\eta'' = 2\pi n + \pi$:

$$\left|\int_{\eta'}^{\eta''} \cos\frac{1}{x}\cdot\sin x\,dx\right| = \int_{2\pi n}^{2\pi n+\pi} \cos\frac{1}{x}\cdot\sin x\,dx > \\ > \frac{1}{2}\int_{2\pi n}^{2\pi n+\pi} \sin x\,dx = 1 = \varepsilon,$$

т.е. исследуемый интеграл **расходится**.

Достаточным условием потенциальности поля $\vec{a} = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$ с непрерывно дифференцируемыми компонентами в односвязной области $D \subset \mathbb{R}^2$ является выполнение в D равенства

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}\,. \tag{7}$$

Работа потенциального поля $\vec{a}$ вдоль $\overset{\frown}{AB} \subset D$ ($\overset{\frown}{AB}$ — кусочно-гладкая кривая) равна

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} \vec{a}\,d\vec{r} = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} P\,dx + Q\,dy = u(B) - u(A), \tag{8}$$

где u — потенциал поля $\vec{a}$, $P\,dx + Q\,dy = du$.

Так как работа потенциального в D поля $\vec{a}$ не зависит от пути, соединяющего в D точки $A \in D$ и $B \in D$, то можно находить работу поля $\vec{a}$, не используя потенциал, а выбирая наиболее удобный для вычисления интеграла (8) путь $\overset{\frown}{AB}$.

12. а) Так как $P = 3x^2y + 1$, $Q = x^3$, то выполнено условие (7) в любой точке $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 3x^2 = \frac{\partial P}{\partial y}\,.$$

Поле $\vec{a}$ потенциально.

б) **Первый способ.**

$$(3x^2y + 1)\,dx + x^3\,dy = d(x^3y + x), \quad u = x^3y + x + C.$$

Согласно (8)

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} \vec{a}\,d\vec{r} = u(B) - u(A) = 3^3 \cdot 4 + 3 - 5 = \mathbf{106}.$$

Второй способ. Взяв в качестве пути $\overset{\frown}{AB}$ ломаную ACB, $C(3;0)$ (см. рис. 5), получим

$$\int\limits_{\overset{\frown}{AB}} \vec{a}\,d\vec{r} = \int\limits_{\overset{\frown}{ACB}} (3x^2y + 1)\,dx + x^3\,dy =$$

$$= \int\limits_5^3 dx + \int\limits_0^4 3^3 dy = -2 + 27 \cdot 4 = \mathbf{106}.$$

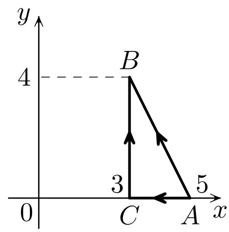

Рис. 5

При исследовании функции $u(x, y)$ на экстремум находим стационарные точки M_i. Далее выясняем, являются ли квадратичные формы $\Phi_i(dx, dy) = d^2u(M_i)$ знакопостоянными.

Для этого можно использовать критерий Сильвестра положительно определённой формы и следствие из него для отрицательно определённой.

Если ранг квадратичной формы в $\mathbb{R}^2$ равен двум и форма не знакопостоянная, то она является неопределённой.

Можно исследовать квадратичную форму Φ_i, приведя её к диагональному виду.

13. Находим du.

$$du = 3x^2\,dx + 6x\,dy + 6y\,dx + 12y\,dy = \\ = 3(x^2+2y)\,dx + 6(x+2y)\,dy. \quad (9)$$

Координаты стационарных точек находим из системы уравнений:

$$x^2+2y=0, \quad x+2y=0.$$

Имеем $x^2-x=0$, $x=0$, $x=1$; $M_1(0;0)$, $M_2\left(1;-\frac{1}{2}\right)$ — стационарные точки.

Находим d^2u, используя (9).

$$d^2u = 6x(dx)^2 + 12\,dx\,dy + 12(dy)^2.$$

Исследуем квадратичные формы $\Phi_i = d^2u(M_i)$.

Первый способ. $\Phi_1(dx,dy) = d^2u(M_1) = 12\,dx\,dy + 12(dy)^2$, $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}$, $\det A_1 = -36 \neq 0$, $\operatorname{rang} A_1 = 2$.

Φ_1 — не является знакопостоянной квадратичной формой, Φ_1 — неопределённая квадратичная форма, поэтому функция u в точке $M_1(0;0)$ экстремума не имеет.

$$\Phi_2(dx,dy) = d^2u(M_2) = 6(dx)^2 + 12\,dx\,dy + 12(dy)^2.$$

$A_2 = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 12 \end{pmatrix} = \|a_{ij}\|$, $i,j=1,\ 2$; $a_{11}=6>0$, $\det A_2 = 36 > 0$, поэтому Φ_2 — положительно определённая квадратичная форма (на основании критерия Сильвестра), следовательно, $\boldsymbol{u}$ **в точке** $\boldsymbol{M_2\left(1;-\frac{1}{2}\right)}$ **имеет строгий минимум**.

Второй способ. $\Phi_1(dx,dy) = 12\,dx\,dy + 12(dy)^2 = 12\left[\left(dy+\frac{dx}{2}\right)^2 - \frac{(dx)^2}{4}\right] = 12\xi_1^2 - 3\eta_1^2$, где $\xi_1 = \frac{dx}{2} + dy$, $\eta_1 = \frac{dx}{2}$; Φ_1 — неопределённая квадратичная форма, следовательно, функция u в точке $M_1(0;0)$ экстремума не имеет.

$$\Phi_2 = 6(dx)^2 + 12dx\,dy + 12(dy)^2 = \\ = 6((dx+dy)^2 + (dy)^2) = 6\xi_2^2 + 6\eta_2^2,$$

где $\xi_2 = dx + dy$, $\eta_2 = dy$; Φ_2 — положительно определённая квадратичная форма, следовательно, $\boldsymbol{u}$ **в точке** $\boldsymbol{M_2\left(1; -\frac{1}{2}\right)}$ **имеет строгий минимум**.

Для отыскания точек возможного экстремума функции $f(x, y)$ при условии $\varphi(x, y) = 0$ выписываем функцию Лагранжа $L = f + \lambda\varphi$ с неопределённым множителем Лагранжа λ, а далее находим стационарные точки для L, определяя множитель для каждой из них.

14. Выписываем функцию Лагранжа с множителем λ:

$$L = 2x - y - 3 + \lambda(x^2 - y^2 - 27);$$

$$dL = 2dx - dy + \lambda(2x\,dx - 2y\,dy) = 2(1 + \lambda x)\,dx - (1 + 2\lambda y)\,dy.$$

Имеем систему уравнений

$$1 + \lambda x = 0, \quad 1 + 2\lambda y = 0, \quad x^2 - y^2 = 27,$$

откуда находим $x = -\frac{1}{\lambda}$, $y = -\frac{1}{2\lambda}$, $\frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{4\lambda^2} = 27$, $\frac{1}{\lambda^2} = 36$, $\lambda^2 = \frac{1}{36}$; $\lambda_1 = \frac{1}{6}$, $\boldsymbol{x_1 = -6,\ y_1 = -3}$; $\lambda_2 = -\frac{1}{6}$, $\boldsymbol{x_2 = 6,\ y_2 = 3}$.

Приращение функции $f(x, y)$, дифференцируемой в точке $M_0(x_0; y_0)$, должно быть представимо в виде

$$\Delta f = f(x, y) - f(x_0, y_0) = A\Delta x + B\Delta y + \alpha,$$

где $A = f_x(M_0)$, $B = f_y(M_0)$, $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$, $\alpha = o(\rho)$ при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$, $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$,

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\alpha}{\rho} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\Delta f - f_x(M_0)\Delta x - f_y(M_0)\Delta y}{\rho} = 0. \quad (10)$$

15. Имеем $f_x(0, 0) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{arctg}(x^2)}{x} = 0$, аналогично находим $f_y(0, 0) = 0$; тогда

$$\frac{\alpha}{\rho} = \frac{\operatorname{arctg}\left|x^2 - \dfrac{y^2}{2}\right|}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Воспользовавшись оценкой $\operatorname{arctg} u \leqslant u$ при $u \geqslant 0$, получим

$$0 \leqslant \frac{\alpha}{\rho} \leqslant \frac{\left|x^2 - \frac{y^2}{2}\right|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leqslant \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{x^2+y^2},$$

откуда следует (10). **Функция $\boldsymbol{f(x)}$ дифференцируема в точке $\mathbf{(0;0)}$**.

При замене переменных в уравнениях с частными производными пользуемся правилом вычисления частных производных сложной функции.

16. Пересчитываем частные производные до второго порядка включительно искомой функции u, которую считаем дважды непрерывно дифференцируемой. Имеем

$$u_x = 3u_\xi + u_\eta, \quad u_y = -u_\xi,$$
$$u_{xx} = 9u_{\xi\xi} + 6u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}, \quad u_{yy} = u_{\xi\xi}, \quad u_{xy} = -3u_{\xi\xi} - u_{\eta\xi}.$$

Данное в условии уравнение переходит в такое

$$u_{\eta\eta} = 2.$$

Решая его, получаем

$$u_\eta = 2\eta + \varphi(\xi),$$
$$u = \eta^2 + \eta\varphi(\xi) + \psi(\xi) = \boldsymbol{x^2 + x\varphi(3x-y) + \psi(3x-y)},$$

где $\boldsymbol{\varphi}$, $\boldsymbol{\psi}$ — любые дважды непрерывно дифференцируемые функции.

При исследовании на равномерную сходимость на множестве E функционального ряда, который мажорируется при любом $x \in E$ одним и тем же числовым сходящимся рядом, пользуемся признаком Вейерштрасса.

С помощью признака Вейерштрасса устанавливается как равномерная, так и абсолютная сходимость ряда на множестве E.

17. Пользуясь неравенством $\ln(1+t) \leqslant t$, $t \geqslant 0$, получаем для $|u_n(x)|$, где $u_n(x)$ — общий член данного ряда, оценку при любом $x \in E$

$$|u_n(x)| = u_n(x) = \frac{\ln\left(1 + \frac{x}{\sqrt[3]{n}}\right)}{n+x} \leqslant \frac{x}{\sqrt[3]{n}(n+x)} \leqslant \frac{1}{n^{4/3}}\,, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{4/3}}$ сходится, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится на E абсолютно и равномерно.

Коэффициенты Фурье по тригонометрической системе

$$\frac{1}{2}\,, \quad \cos\frac{\pi n x}{l}\,, \quad \sin\frac{\pi n x}{l}\,, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

для функции $f(x)$, абсолютно интегрируемой на отрезке $[x', x'+2l]$, вычисляются по формулам:

$$\begin{gathered} a_0 = \frac{1}{l}\int_{x'}^{x'+2l} f\,dx, \quad a_n = \frac{1}{l}\int_{x'}^{x'+2l} f(x)\cos\frac{\pi n x}{l}\;dx, \\ b_n = \frac{1}{l}\int_{x'}^{x'+2l} f(x)\sin\frac{\pi n x}{l}\;dx, \quad n = 1, 2, \ldots, \end{gathered} \tag{11}$$

Если $f(x)$ — $2l$-периодическая, кусочно-непрерывно дифференцируемая на любом отрезке длины $2l$ функция, то в любой точке x сумма ряда Фурье такой функции равна $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$.

Вопрос о равномерной сходимости ряда Фурье решается или на основании соответствующей теоремы для рядов Фурье или теоремы о непрерывности суммы равномерно сходящегося функционального ряда с непрерывными членами.

18. Так как $l = \frac{3}{2}$, то по формулам (11):

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{12}\int_{-1}^{2} x^5 \cos\frac{2\pi n x}{3}\,dx, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \\ b_n &= \frac{1}{12}\int_{-1}^{2} x^5 \sin\frac{2\pi n x}{3}\,dx, \quad n = 1, 2, \ldots, \end{aligned} \tag{12}$$

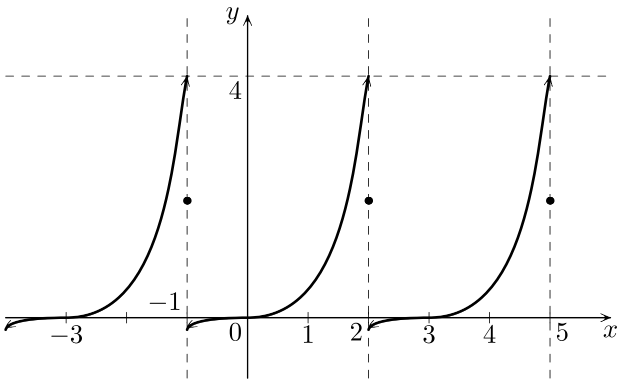

Рис. 6

$$\boldsymbol{S(3)} = S(0) = f(0) = \mathbf{0},$$

$$\boldsymbol{S(5)} = S(2) = \frac{f(2-0) + f(-1+0)}{2} = \frac{4 - \frac{1}{8}}{2} = \mathbf{\frac{31}{16}}.$$

Так как при $x = -1$ сумма ряда разрывна (также в $x = 2$, $x = 5$), а члены его — непрерывные на отрезке $[-3; 5]$ функции, то **сходимость ряда** на этом отрезке **неравномерная**. **График суммы ряда изображён на рис. 6**.

Вопрос о возможности приближения с любой степенью точности любой непрерывной функции конечными линейными комбинациями функций системы $\{\cos kx\}$, $k = 0, 1, \ldots$, по норме пространства C решается с помощью теоремы Фейера или приближения ломаными или указывается функция, для которой такое приближение невозможно.

19. а) Возьмём любую непрерывную на $\left[-\frac{\pi}{2};0\right]$ функцию $f(x)$. Построим на отрезке $[-\pi;\pi]$ непрерывную чётную функцию $f_1(x)$ такую, что

$$f_1(x)=f(x)\quad \forall\, x\in\left[-\frac{\pi}{2};0\right].$$

Ряд Фурье функции $f_1(x)$ по тригонометрической системе не содержит $\sin kx$, $k=1,\,2,\ \ldots$

Первый способ. К функции $f_1(x)$ применима теорема Фейера. Последовательность сумм Фейера $\{\sigma_n(x)\}$, $n=0$, $1,\ 2,\ \ \ldots,\ (\sigma_n=\frac{1}{n+1}(S_0+S_1+\ \ldots+S_n)$, S_n — сумма Фурье порядка n функции $f_1(x))$ равномерно сходится на $[-\pi,\pi]$ к $f_1(x)$, а следовательно, к $f(x)$ на $\left[-\frac{\pi}{2};0\right]$.

Второй способ. Приблизим $f_1(x)$ по норме пространства C графиками на $[-\pi;\pi]$ чётных, непрерывных, кусочно-непрерывно дифференцируемых функций. Ряд Фурье каждой такой функции сходится к ней равномерно.

Тем самым доказано, что $f(x)$ может быть приближена с любой степенью точности по норме $C_{\left[-\frac{\pi}{2};0\right]}$ конечными линейными комбинациями функций системы $\{\cos kx\}$, $k=$ $=0,\,1,\,2,\ \ldots$

Ответ: да.

б) Возьмём $f=x$. Пусть для $\forall\,\varepsilon>0$ существуют числа λ_k, $k=0,\,1,\ \ldots,\,n$, такие, что

$$\left\|x-\sum_{k=0}^{n}\lambda_k\cos kx\right\|_{C_{[\pi;3\pi]}}=\max_{x\in[\pi;3\pi]}\left|x-\sum_{k=0}^{n}\lambda_k\cos kx\right|<\varepsilon.$$

Тогда $\left|x-\sum\limits_{k=0}^{n}\lambda_k\cos kx\right|<\varepsilon\quad\forall\,x\in[\pi;3\pi]$. Взяв $x=\pi$, $x=3\pi$, получим оценки

$$-\varepsilon<\pi-\sum_{k=0}^{n}\lambda_k\cos k\pi<\varepsilon,\qquad -\varepsilon<3\pi-\sum_{k=0}^{n}\lambda_k\cos k\pi<\varepsilon,$$

которые приводят к неравенству $\pi < \varepsilon$, что не выполняется при взятом $\varepsilon < \pi$.

Ответ: нет; $f = x$ нельзя приблизить.

Вопрос о дифференцируемости суммы сходящегося ряда

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x), \tag{13}$$

$\varphi_n(x)$ — непрерывно дифференцируемые на $[a; b]$ функции, решается на основании теоремы о почленном дифференцировании функционального ряда. Если ряд из производных $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varphi_n'(x)$ равномерно сходится на $[a; b]$, то сумма f исходного ряда (13) непрерывно дифференцируема и

$$f' = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n' \quad \text{на} \quad [a; b].$$

20. Фиксируем любое $x > 0$. Исследуем на сходимость числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x), \quad \text{где} \quad \varphi_n(x) = n^2 \cdot 3^{-nx}. \tag{14}$$

Имеем $\varphi_n(x) > 0$, $\sqrt[n]{\varphi_n(x)} = (\sqrt[n]{n})^2 \cdot 3^{-x}$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, то

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\varphi_n(x)} = \lim_{n\to\infty} (\sqrt[n]{n})^2 \cdot 3^{-x} = 3^{-x} < 1.$$

Ряд (14) сходится по признаку Коши в предельной форме.

Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n'(x) = -\ln 3 \sum_{n=1}^{\infty} n^3 \cdot 3^{-nx}. \tag{15}$$

Имеем при $\forall\, x > \delta > 0$

$$|\varphi_n'(x)| = n^3 3^{-nx} \ln 3 < n^3 3^{-n\delta} \ln 3.$$

Так как
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^3 3^{-n\delta}\ln 3} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(\sqrt[n]{n}\right)^3(\ln 3)^{\frac{1}{n}}\cdot 3^{-\delta}\right] = 3^{-\delta} < 1,$$
то числовой ряд
$$\ln 3\sum_{n=1}^{\infty} n^3 3^{-n\delta}$$
сходится. Поэтому ряд (15) сходится равномерно при $x > \delta > 0$ (по признаку Вейерштрасса).

Поскольку $\delta > 0$ может быть выбрано сколь угодно малым, то доказана дифференцируемость $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\varphi_n(x)$ при всех $x > 0$,
$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n'(x) = -\ln 3\sum_{n=1}^{\infty} n^3 3^{-nx}.$$

Применяя к рядам, полученным при k-кратном дифференцировании ряда (14), те же рассуждения, доказываем существование при $x > 0$
$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\varphi^{(k)}(x) = (-1)^k\ln^k 3\sum_{n=1}^{\infty} n^{2+k}\cdot 3^{-nx}, \quad k\in\mathbb{N},$$
т.е. бесконечную дифференцируемость $f(x)$ при $x > 0$.

Часть 2

Вычислить криволинейный интеграл
$$\int_\Gamma P\,dx + Q\,dy$$
вдоль простого кусочно-гладкого контура Γ, являющегося границей конечной области G в $\mathbb{R}^2$, $P\in C^1(\overline{G})$, $Q\in C^1(\overline{G})$, можно с помощью формулы Грина
$$\int_\Gamma P\,dx + Q\,dy = \iint_G\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy,$$
при этом контур Γ ориентирован положительно относительно области G.

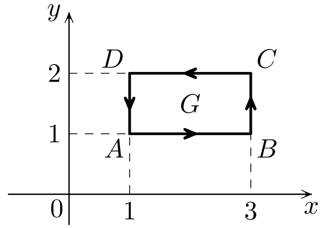

Рис. 7

21. Обозначим данный интеграл через J.

Первый способ. По формуле Грина имеем (см. рис. 7)

$$J = \iint\limits_G (1-2y)\,dx\,dy =$$

$$= \iint_G dx\,dy - \int_1^3 dx \int_1^2 2y\,dy = 2 - 2\cdot 3 = \mathbf{-4}.$$

Второй способ. Заметим, что $x^2dx - y^2dy = d\left(\frac{x^3-y^3}{3}\right)$. Поэтому на основании (8) заключаем, что

$$\int_\Gamma x^2dx - y^2dy = 0.$$

Вычислим интеграл от оставшихся слагаемых, беря x за параметр на горизонтальных отрезках AB, CD (см. рис. 7) и y — на вертикальных BC, DA.

Получим

$$\int\limits_{ABCDA} y^2\,dx + x\,dy = \int\limits_1^3 dx + \int\limits_1^2 3\,dy + \int\limits_3^1 4\,dx + \int\limits_2^1 dy =$$

$$= -3\int_1^3 dx + 2\int_1^2 dy = -6 + 2 = \mathbf{-4}.$$

Поверхностный интеграл

$$\iint_S P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy$$

по кусочно-гладкой границе S конечной области G в $\mathbb{R}^3$, $P, Q, R \in C^1(\overline{G})$, можно вычислить по формуле Остроградского–Гаусса

$$\iint_S P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy =$$

$$= \iiint_G \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz, \quad (16)$$

при этом граница S ориентирована внешней нормалью.

22. Обозначим интеграл, данный в условии, через J. Применим формулу (16) к интегралу J, при этом

$$P = 2xy + xz^2, \quad Q = 0, \quad R = -3yz.$$

Получим

$$J = \iiint_G (z^2 - y)\,dx\,dy\,dz,$$

где G — область, данная в условии.

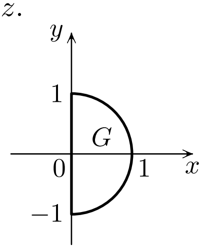

Рис. 8

Так как область G симметрична относительно плоскости $y = 0$, то

$$\iiint\limits_G y\,dx\,dy\,dz = 0;$$

$$J = \iiint\limits_G z^2\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_D dx\,dy \int\limits_0^3 z^2 dz = 9 \iint\limits_D dx\,dy = \frac{\mathbf{9}}{\mathbf{2}}\boldsymbol{\pi},$$

где $D = \{(x, y, z)\colon\ z = 0,\ x^2 + y^2 < 1,\ x > 0\}$ (см. рис. 8).

Пусть S — поверхность, имеющая явное представление

$$S = \{z = z(x, y),\ (x, y) \in \overline{D}\},$$

D — квадрируемая область в $\mathbb{R}^2$, $z(x, y) \in C^1(\overline{D})$ (условия на $z(x, y)$ могут быть ослаблены); S ориентирована единичной нормалью $\vec{n} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \cos\beta \\ \cos\gamma \end{pmatrix}$, α, β, γ — углы, образованные нормалью $\vec{n}$ с единичными ортами осей Ox, Oy, Oz соответственно, и на S задана непрерывная функция R. Тогда поверхностный интеграл

$$\iint_S R(x, y, z)\,dx\,dy = \iint_S R\cos\gamma\,ds$$

равен двойному интегралу

$$\iint_D R(x, y, z(x, y))\,dx\,dy, \tag{17}$$

если угол γ острый, и равен тому же интегралу (17) со знаком минус, если угол γ тупой.

Аналогично соответствующему двойному интегралу равен поверхностный интеграл

$$\iint_S P(x,y,z)\,dy\,dz = \iint_S P\cos\alpha\,ds$$

в случае явного представления поверхности S в виде $x = x(y,z)$ и интеграл $\iint_S Q(x,y,z)\,dz\,dx = \iint_S Q\cos\beta\,ds$ в случае явного представления поверхности S в виде $y = y(x,z)$.

23. Для вычисления потока J через поверхность S, данную в условии,

$$J = \iint_S (\vec{a}, d\vec{s}) = \iint_S x^6\,dy\,dz + z\,dz\,dx + z^2\,dx\,dy, \tag{18}$$

рассмотрим интегралы, входящие в правую часть равенства (18).

Так как поверхность S симметрична относительно плоскости $x = 0$ и функция $f = x^6$ чётная, имеем

$$\iint_S x^6\,dy\,dz = \iint_S x^6\cos\alpha\,ds = \\ = \iint_{S_{x\geqslant 0}} x^6\cos\alpha\,ds + \iint_{S_{x\leqslant 0}} x^6\cos\alpha\,ds = 0,$$

где $S_{x\geqslant 0}$, $S_{x\leqslant 0}$ — симметричные части поверхности S, расположенные при $x \geqslant 0$ и $x \leqslant 0$, при этом значения $\cos\alpha$ на $S_{x\geqslant 0}$ и $S_{x\leqslant 0}$ отличаются лишь знаком.

Вычислим интеграл

$$\iint_S z\,dz\,dx = \iint_S z\cos\beta\,ds = -\iint_{D_1} z\,dz\,dx, \tag{19}$$

где $D_1 = \{(x,y,z)\colon\ y = 0,\ |x| < z,\ 0 < z < 1\}$. Знак минус перед двойным интегралом в (19) ставим потому, что угол

β, который составляет $\vec{n}$ с $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, тупой ($\vec{n}$ — внешняя единичная нормаль к S).

Имеем, сводя двойной интеграл в формуле (19) к повторному (см. рис. 9),

$$\iint_S z\,dz\,dx = -\int_0^1 z\,dz \int_{-z}^{z} dx = -2\int_0^1 z^2\,dz = -\,\frac{2}{3}\,.$$

Вычислим последний интеграл в формуле (18), сведя его к двойному. Так как угол γ, который составляет нормаль $\vec{n}$ с $\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, тупой, то имеем

$$\iint_S z^2 dx\,dy = \iint_S z^2 \cos\gamma\,ds = -\iint_{D_2} (x^2 + y^2)\,dx\,dy, \qquad (20)$$

где $D_2 = \{(x, y, z)\colon\ z = 0,\ x^2 + y^2 < 1,\ y < 0\}$.

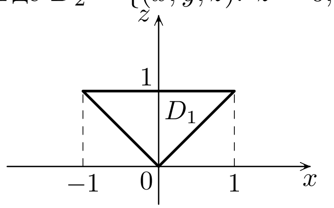

Рис. 9

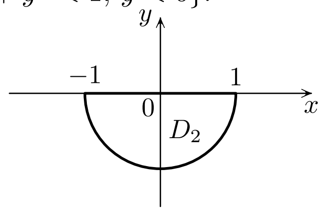

Рис. 10

Вводя полярные координаты на плоскости (x, y) и сводя двойной интеграл в формуле (20) к повторному (см. рис. 10), получаем

$$\iint_S z^2\,dx\,dy = -\int_0^1 r^3\,dr \int_{\pi}^{2\pi} d\varphi = -\,\frac{\pi}{4}\,.$$

Окончательно, $\boldsymbol{J = -\left(\frac{2}{3} + \frac{\pi}{4}\right)}$.

Циркуляцию векторного поля $\vec{a} = \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix}$ по положительно ориентированному кусочно-гладкому контуру Γ, являющемуся краем ориентированной кусочно-гладкой поверхности S, $S \subset G$, G — область в $\mathbb{R}^3$, $P, Q, R \in C^1(G)$, можно вычислить по формуле Стокса

$$\int_\Gamma \vec{a}\, d\vec{r} = \iint_S (\operatorname{rot} \vec{a}, \vec{n})\, ds,$$

при этом ориентация поверхности S, задаваемая нормалью $\vec{n}$, $|\vec{n}| = 1$, согласована с положительной ориентацией Γ по правилу правого винта (система координат прямоугольная правая).

Если S_0 — поверхность, имеющая явное представление

$$S_0 = \{z = z(x, y),\ (x, y) \in \overline{D}\},$$

D — квадрируемая область в $\mathbb{R}^2$, $z(x, y) \in C^1(\overline{D})$, $S_0 \subset G$, и на G задана непрерывная функция F, то поверхностный интеграл

$$\iint_{S_0} F(x, y, z)\, ds \tag{21}$$

равен двойному интегралу

$$\iint_D F(x, y, z(x, y))\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\, dx\, dy. \tag{22}$$

24. Применим формулу Стокса для вычисления циркуляции $J = \int_\Gamma \vec{a}\, d\vec{r}$, взяв за S часть плоскости S_2, лежащую внутри параболоида S_1, которую обозначим S_0.

$$\operatorname{rot} \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2y & 2z & x \end{vmatrix} = -2\vec{e}_1 - \vec{e}_2 - 2\vec{e}_3 = -\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$\vec{n} = \frac{\vec{N}}{|\vec{N}|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad (\operatorname{rot} \vec{a}, \vec{n}) = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Учитывая отрицательную ориентацию контура Г, имеем

$$J = \int_{\Gamma} \vec{a}\, d\vec{r} = -\iint_{S_0} (\operatorname{rot}\vec{a}, \vec{n})\, dS = \frac{1}{\sqrt{3}} \iint_{S_0} dS.$$

Согласно формулам (21), (22), при $F = 1$, $z(x, y) = x + y$, $z_x = z_y = 1$,

$$D = \{(x, y):\ x^2 + y^2 < x + y\} = \\ = \left\{(x, y):\ \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 < \frac{1}{2}\right\},$$

получим

$$J = \frac{1}{\sqrt{3}} \iint_{S_0} ds = \iint_{D} dx\, dy = \pi \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \boldsymbol{\frac{\pi}{2}}.$$

Расстояние между двумя параллельными прямыми на плоскости можно найти, вычислив расстояние от какой-нибудь точки одной прямой до другой прямой.

Расстояние h от точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямой $Ax + By + C = 0$, $A^2 + B^2 > 0$, в прямоугольной системе координат вычисляется по формуле

$$h = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}\,. \tag{23}$$

В пространстве расстояние ρ между параллельными прямыми l_1: $\vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{a}t$, l_2: $\vec{r} = \vec{r}_2 + \vec{a}t$, $\vec{a} \neq \vec{0}$, вычисляется по формуле

$$\rho = \frac{|[\vec{r}_2 - \vec{r}_1, \vec{a}]|}{|\vec{a}|}\,.$$

Расстояние между скрещивающимися прямыми l_3: $\vec{r} = \vec{r}_3 + \vec{a}_3 t$, l_4: $\vec{r} = \vec{r}_4 + \vec{a}_4 t$, $[\vec{a}_3, \vec{a}_4] \neq \vec{0}$, вычисляется по формуле

$$\rho = \frac{|(\vec{r}_4 - \vec{r}_3, \vec{a}_3, \vec{a}_4)|}{|[\vec{a}_3, \vec{a}_4]|}\,.$$

В задачах 25, 26, 28 система координат прямоугольная.

25. Перейдём от параметрических уравнений прямой l_2 к каноническому, а потом к общему уравнению:

$$l_2: \ \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{2}, \quad 2x - y - 3 = 0.$$

Возьмём точку $M_0(1;-2)$, лежащую на l_1, и вычислим расстояние h от M_0 до l_2 по формуле (23). Так как прямые параллельны, то расстояние между l_1 и l_2 равно

$$h = \frac{|2x_0 - y_0 - 3|}{\sqrt{5}} = \frac{|2+2-3|}{\sqrt{5}} = \boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{5}}}.$$

В прямоугольной системе координат уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно вектору $\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$, $A^2 + B^2 + C^2 > 0$, имеет вид

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \qquad (24)$$

Плоскости

$$A_k x + B_k y + C_k z + D_k = 0, \quad k = 1, 2,$$

при условии $\vec{q} = [\vec{n}_1, \vec{n}_2] \neq \vec{0}$, $\vec{n}_k = \begin{pmatrix} A_k \\ B_k \\ C_k \end{pmatrix}$, пересекаются, $\vec{q}$ — направляющий вектор их линии пересечения.

26. Вычислим компоненты вектора $\vec{q} = [\vec{n}_1, \vec{n}_2]$, где $\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ — векторы, перпендикулярные (соответственно) данным плоскостям. Имеем

$$\vec{q} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -3\vec{e}_1 - \vec{e}_2 - 4\vec{e}_3.$$

Тогда согласно (24) уравнение искомой плоскости будет

$$3(x-1) + y + 4(z-2) = 0, \quad \text{или} \quad \boldsymbol{3x + y + 4z - 11 = 0}.$$

В $\mathbb{R}^3$

$$(\vec{r} - \vec{r}_1, \vec{n}) = 0, \quad \vec{n} \neq \vec{0}, \tag{25}$$

— векторное уравнение плоскости, перпендикулярной вектору $\vec{n}$ и проходящей через точку $M_1(\vec{r}_1)$.

$$\vec{r} = \vec{r}_1 + u\vec{b} + v\vec{c}, \quad [\vec{b}, \vec{c}] \neq \vec{0},$$

— векторное параметрическое уравнение плоскости, параллельной неколлинеарным векторам $\vec{b}$, $\vec{c}$ и проходящей через точку $M_1(\vec{r}_1)$.

27. Запишем уравнение заданной плоскости в виде (25). Имеем $\vec{n} = [\vec{b}, \vec{c}]$,

$$(\vec{r} - \vec{r}_1, [\vec{b}, \vec{c}]) = 0. \tag{26}$$

Найдём значение параметра $t = t_2$, соответствующее точке пересечения данной прямой с плоскостью. Подставляем $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{a}t$ в уравнение (26). Получаем

$$(\vec{r}_0 + \vec{a}t - \vec{r}_1, [\vec{b}, \vec{c}]) = 0, \quad t_2 = \frac{(\vec{r}_1 - \vec{r}_0, \vec{b}, \vec{c})}{\vec{a}\vec{b}\vec{c}},$$

$\boldsymbol{\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{a}\,\dfrac{(\vec{r}_1 - \vec{r}_0, \vec{b}, \vec{c})}{\vec{a}\vec{b}\vec{c}}}$ — радиус-вектор точки пересечения.

Уравнение касательной в точке $M_0(x_0, y_0)$, принадлежащей эллипсу или гиперболе, заданным каноническими уравнениями, получается из уравнения кривой заменой одного из x на x_0 и одного из y на y_0.

Для параболы $y^2 = 2px$ уравнение касательной в точке $M_0(x_0, y_0)$, лежащей на параболе,

$$yy_0 = p(x + x_0). \tag{27}$$

28. Имеем $p = 8$. Согласно (27) имеем $-4y = 8(x + 1)$, т.е. $\boldsymbol{2x + y + 2 = 0}$ — уравнение касательной.

Для определения совместности системы

$$A\vec{x} = \vec{b} \tag{28}$$

и её решения выписываем расширенную матрицу A^*, состоящую из матрицы A и столбца $\vec{b}$. Совершая элементарные преобразования матрицы A^*, при этом работая лишь со строками матрицы A^*, упрощаем её и приводим к наиболее простому виду.

Значение параметра α, при котором система (28) совместна, определяем, исходя из требования, чтобы ранги матриц A и A^* совпадали (на основании теоремы Кронекера–Капелли).

29.

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -4 & 2 & \alpha \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & \alpha - 2 \end{array}\right).$$

Совпадение рангов $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} A^* = 2$ обеспечивается при $\alpha = 0$. Тогда

$$A^* \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad \begin{cases} x_1 = -x_3 + 2, \\ x_2 = 1. \end{cases}$$

Для однородной системы $A\vec{x} = \vec{0}$ имеем $\begin{cases} x_1 = -x_3, \\ x_2 = 0. \end{cases}$ Окончательно, $\alpha = 0$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $C = \forall\ \mathrm{const}$.

При переходе от базиса $\vec{e}$ к базису $\vec{e}\,'$ матрица перехода S — это матрица, состоящая из координатных столбцов векторов базиса $\vec{e}\,'$ по базису $\vec{e}$.

При замене базиса с матрицей перехода S матрица A линейного преобразования изменяется по закону

$$A' = S^{-1} A S. \tag{29}$$

Для вычисления матрицы A' можно вначале найти $B = AS$, а потом находить $S^{-1}B$, не вычисляя отдельно S^{-1}. Для этого совершаем элементарные преобразования матрицы $S \mid B$, работая с её строками, при этом преобразуем матрицу S к E. Получим

$$S \mid B \sim E \mid S^{-1}B. \qquad (30)$$

30. Матрица перехода от базиса $\vec{e}$ к базису $\vec{e}\,'$ — это матрица

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Вычисляем матрицу $B = AS$,

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрицу $S^{-1}B$ находим согласно (30)

$$S \mid B = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & \text{-}4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right) = E \mid S^{-1}B.$$

Тогда в соответствии с (29)

$$A' = S^{-1}AS = S^{-1}B = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-4} \\ \mathbf{0} & \mathbf{3} \end{pmatrix}.$$

Матрица линейного преобразования имеет диагональный вид в базисе из собственных векторов этого преобразования, при этом по главной диагонали в матрице стоят соответствующие собственные значения.

Существует ортонормированный базис из собственных векторов любого самосопряжённого преобразования.

Собственные векторы самосопряжённого преобразования, принадлежащие разным собственным значениям, ортогональны между собой.

31. Находим собственные значения данного самосопряжённого преобразования, решая характеристическое уравнение:

$$\det(A-\lambda E) = \begin{vmatrix} -4-\lambda & 5 \\ 5 & -4-\lambda \end{vmatrix} = (4+\lambda)^2 - 5^2 =$$
$$= (\lambda-1)(\lambda+9) = 0, \quad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -9.$$

Координаты ξ_1, ξ_2 собственных векторов, принадлежащих собственному значению λ, являются решением однородной системы уравнений с матрицей $A-\lambda E$. Имеем

$$\lambda_1 = 1, \quad A - E = \begin{pmatrix} -5 & 5 \\ 5 & -5 \end{pmatrix},$$
$$\xi_1 = \xi_2, \quad \vec{h}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\vec{e}'_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}};$$
$$\lambda_2 = -9, \quad A + 9E = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 5 \end{pmatrix},$$
$$\xi_1 = -\xi_2, \quad \vec{h}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\vec{e}'_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}}.$$

В базисе $\vec{e}'$ матрица A' заданного преобразования имеет диагональный вид $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -9 \end{pmatrix}$.

Квадратичную форму в $\mathbb{R}^n$ можно привести к каноническому виду методом Лагранжа (методом выделения квадратов), можно с помощью элементарных преобразований её матрицы.

Матрица квадратичной формы при переходе к другому базису меняется по закону

$$B' = S^T B S,$$

где B, B' — матрицы квадратичной формы в базисах $\vec{e}$ и $\vec{e}'$ соответственно. S — матрица перехода от базиса $\vec{e}$ к $\vec{e}'$, S^T — матрица, полученная из S транспонированием.

B, B' — симметричные матрицы.

32. Первый способ (метод выделения квадратов).

Выделим слагаемые с x_1. Среди них есть слагаемое с x_1^2. Дополняем эту сумму до полного квадрата за счёт слагаемых, не содержащих x_1. Получаем

$$g = (x_1 + 2x_2 + x_3)^2 - 9x_2^2 + 6x_2x_3.$$

Со слагаемыми, находящимися вне выделенного квадрата, поступаем аналогично. Получим

$$g = (x_1 + 2x_2 + x_3)^2 - (3x_2 - x_3)^2 + x_3^2 = \xi_1^2 - \xi_2^2 + \xi_3^2,$$

где $$\xi_1 = x_1 + 2x_2 + x_3, \quad \xi_2 = 3x_2 - x_3, \quad \xi_3 = x_3, \tag{31}$$

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \det S = 3 \neq 0.$$

Заметим, что если после выделения квадрата с x_1 осталось бы лишь слагаемое ax_2x_3, $a \neq 0$, то можно было бы ввести переменные ξ_1', ξ_2', ξ_3', полагая $x_2 = \xi_2' - \xi_3'$, $x_3 = \xi_2' + \xi_3'$ и беря за ξ_1' ту же сумму переменных, что в (31) обозначена как ξ_1.

Второй способ (метод элементарных преобразований матрицы).

Совершаем элементарные преобразования матрицы B квадратичной формы с помощью строк и аналогичные с помощью столбцов.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & 5 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -9 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = B'.$$

Заметим, что, если выписать матрицу $E \mid B$ и проводить с её строками те же операции, что со строками матрицы B, то в результате вместо E получим S^T, то есть будем иметь

$$E \mid B \sim S^T \mid B'.$$

Итак, $\boldsymbol{g = \xi_1^2 - \xi_2^2 + \xi_3^2}$.

При отыскании частного решения линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными вещественными коэффициентами и правой частью $f(x)$,

$$f(x) = Q(x)e^{\lambda x}, \quad \lambda = \mathrm{const}, \quad Q \text{ — многочлен},$$

удобно пользоваться правилами действия дифференциального оператора на функции, содержащие множитель $e^{\lambda x}$.

Если обозначить через $L(p)$ линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами, то

$$L(p)e^{\lambda x} = e^{\lambda x}L(\lambda),$$

$$L(p)(\varphi(x)e^{\lambda x}) = e^{\lambda x}L(p+\lambda)\varphi(x) \text{ — формула сдвига,} \quad (32)$$

где $\lambda = \mathrm{const}$, $\varphi(x)$ — достаточное число раз дифференцируемая функция.

Если правая часть f уравнения имеет вид

$$f = T(x)e^{\alpha x}\cos\beta x, \quad \alpha, \beta \text{ — вещественные числа,} \quad (33)$$

$T(x)$ — многочлен с вещественными коэффициентами, то удобно вначале найти частное решение $\tilde{y}$ уравнения с правой частью

$$\tilde{f}(x) = T(x)e^{(\alpha+i\beta)x}.$$

Тогда $y_0 = \operatorname{Re}\tilde{y}$ — частное решение уравнения с правой частью (33). Аналогично поступают в случае правой части f вида

$$f(x) = T(x)e^{\alpha x}\sin\beta x,$$

при этом частное решение уравнения $y_1 = \operatorname{Im}\tilde{y}$.

33. Выписываем характеристический многочлен для соответствующего однородного уравнения.

$$y'' + 6y' + 9y = 0$$

и находим его корни:

$$\lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0, \quad (\lambda+3)^2 = 0, \quad \lambda_{1,2} = -3.$$

Тогда $y = C_1 e^{-3x} + C_2 x e^{-3x} + y_0$ — общее решение исходного неоднородного уравнения, где y_0 — частное решение того же уравнения, C_1, C_2 — произвольные действительные постоянные.

Правую часть f уравнения можно представить в виде

$$f = f_1 + f_2, \quad f_1 = 2e^{-3x}, \quad f_2 = 9x + 6.$$

Вначале найдём частное решение y_{01} в случае правой части f_1. Имеем $\alpha = -3$ — корень характеристического многочлена кратности два, поэтому ищем частное решение y_{01} в виде

$$y_{01} = Ax^2 e^{-3x}, \quad A = \mathrm{const}\,.$$

Так как $L(p) = p^2 + 6p + 9 = (p+3)^2$, $L(p-3) = p^2$, то по формуле сдвига (см. (32))

$$L(p)(Ax^2e^{-3x}) = Ae^{-3x}L(p-3)x^2 = Ae^{-3x}p^2x^2 = 2Ae^{-3x}.$$

Следовательно,

$$2Ae^{-3x} = 2e^{-3x}, \quad A = 1, \quad y_{01} = x^2 e^{-3x}.$$

Найдём y_{02} — частное решение в случае правой части f_2. Имеем $y_{02} = ax + b$, a, b — постоянные, которые надо определить. Подставляем y_{02} в уравнение с правой частью f_2 и получаем

$$6a + 9ax + 9b \equiv 9x + 6, \quad a = 1,\ b = 0, \quad y_{02} = x.$$

Тогда $y_0 = y_{01} + y_{02} = x^2 e^{-3x} + x$.

Окончательно, $\boldsymbol{y = (C_1 + C_2 x)e^{-3x} + x^2 e^{-3x} + x}$, C_i — любые действительные постоянные, $i = 1, 2$.

Пусть дана нормальная линейная однородная система с постоянными вещественными коэффициентами

$$\dot{\vec{x}} = A\vec{x}, \quad A = \|a_{kj}\|, \quad k, j = 1, 2, 3. \tag{34}$$

Если числа $a \pm ib$, $b \neq 0$, являются корнями уравнения

$$\det(A - \lambda E) = 0 \tag{35}$$

и $\vec{h}$ — собственный вектор преобразования с матрицей A, принадлежащий собственному значению $a+ib$, то вектор $\vec{h}^*$ с комплексно сопряжёнными компонентами — собственный, принадлежащий собственному значению $a -$ $- ib$.

Решения системы (34):

$$\vec{x} = e^{(a+ib)t}\vec{h}, \quad \vec{x}^* = e^{(a-ib)t}\vec{h}^*$$

линейно независимы. Решения той же системы:

$$\operatorname{Re}\vec{x} = \frac{1}{2}(\vec{x} + \vec{x}^*), \quad \operatorname{Im}\vec{x} = \frac{1}{2i}(\vec{x} - \vec{x}^*)$$

тоже линейно независимы.

Если уравнение (35) имеет корни λ_1, λ_2, λ_3, причём $\lambda_2 = \lambda_3$, $\lambda_2 \neq \lambda_1$ и $\operatorname{rang}(A - \lambda_2 E) = 2$, то для λ_2 находим собственный вектор $\vec{h}_2$ и присоединённый $\vec{h}_3$, компоненты которого удовлетворяют неоднородной системе уравнений

$$(A - \lambda_2 E)\vec{\xi} = \vec{h}_2.$$

Решения системы (34):

$$\vec{y}_1 = e^{\lambda_2 t}\vec{h}_2 \quad \text{и} \quad \vec{y}_2 = e^{\lambda_2 t}(t\vec{h}_2 + \vec{h}_3)$$

линейно независимы.

34. Запишем данную систему уравнений в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}. \tag{36}$$

Числа λ_k, $k = 1, 2, 3$, являются корнями уравнения $\det(A-$ $- \lambda E) = 0$.

Компоненты собственного вектора $\vec{h}_k$, принадлежащего собственному значению λ_k, удовлетворяют однородной системе уравнений с матрицей

$$A - \lambda_k E.$$

Для $\lambda_1 = -1$ имеем

$$A - \lambda_1 E = A + E = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} \xi_2 = 0, \\ \xi_1 = -\xi_3, \end{cases} \qquad \vec{h}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Для $\lambda_2 = -1 + i$ имеем

$$A - \lambda_2 E = A + (1 - i)E = \begin{pmatrix} -i & -4 & 0 \\ 1 & -i & 1 \\ 0 & 3 & -i \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} i\xi_1 + 4\xi_2 = 0, \\ 3\xi_2 - i\xi_3 = 0, \end{cases} \qquad \vec{h}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -i \\ -3 \end{pmatrix}.$$

$\vec{x} = e^{(-1+i)t}\vec{h}_2$ — решение системы (36). Найдём $\operatorname{Re}\vec{x}$ и $\operatorname{Im}\vec{x}$.

$$\vec{x} = e^{(-1+i)t} \begin{pmatrix} 4 \\ -i \\ -3 \end{pmatrix} = e^{-t}(\cos t + i \sin t) \begin{pmatrix} 4 \\ -i \\ -3 \end{pmatrix} =$$

$$= e^{-t} \begin{pmatrix} 4\cos t \\ \sin t \\ -3\cos t \end{pmatrix} + ie^{-t} \begin{pmatrix} 4\sin t \\ -\cos t \\ -3\sin t \end{pmatrix}.$$

Фундаментальная система из трёх действительных решений системы (36):

$$\vec{x}_1 = e^{-t}\vec{h}_1, \quad \vec{x}_2 = \operatorname{Re}\vec{x}, \quad \vec{x}_3 = \operatorname{Im}\vec{x};$$

$\vec{y} = \sum\limits_{k=1}^{3} C_k \vec{x}_k$ (C_k — любые действительные постоянные, $k = 1,\ 2,\ 3$) — общее решение системы (36).

В итоге,

$$\boldsymbol{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 4\cos t \\ \sin t \\ -3\cos t \end{pmatrix} + {} + C_3 e^{-t} \begin{pmatrix} 4\sin t \\ -\cos t \\ -3\sin t \end{pmatrix}, \quad C_k \text{ — const}, \quad k = 1, 2, 3}.$$

Для того, чтобы решить линейные уравнения

$$y' + a(x)y = f_1(x), \tag{37}$$

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f_2(x), \tag{38}$$

$a(x)$, $a_i(x)$, $f_i(x)$, $i = 1,\ 2,$ — непрерывные функции на (α, β), надо вначале решить однородные уравнения, т.е. уравнения с $f_i = 0$, $i = 1,\ 2$.

В случае уравнения 2-го порядка, если известно решение $\tilde{y} \not\equiv 0$ однородного уравнения ($\tilde{y}$ находится или подбором или как разность двух известных решений неоднородного уравнения (38)), то применяем формулу Остроградского–Лиувилля $\begin{vmatrix} \tilde{y} & y \\ \tilde{y}' & y' \end{vmatrix} = Ce^{-\int a_1 dx}$, $c = {}$ $= \text{const}$. Имеем

$$\left(\frac{y}{\tilde{y}}\right)' = \frac{C}{\tilde{y}^2}\, e^{-\int a_1\, dx}, \tag{39}$$

откуда интегрированием получаем общее решение однородного уравнения.

Для получения общего решения уравнений (37), (38) надо найти (если оно заранее неизвестно) частное решение этих уравнений. Для этого применяем метод вариации постоянных.

В случае уравнения первого порядка (см. (37)) ищем частное решение в виде

$$y_0 = C_0(x)y_1,$$

где y_1 — любое нетривиальное решение однородного уравнения. Получаем

$$C_0'(x)y_1 = f_1(x), \tag{40}$$

откуда находим C_0', потом $C_0(x)$.

В случае уравнения второго порядка (см. (38)) ищем частное решение в виде

$$y_0 = C_1(x)\tilde{y}_1 + C_2(x)\tilde{y}_2,$$

где $\tilde{y}_1$, $\tilde{y}_2$ — линейно независимые решения однородного уравнения.

Для $C_i'(x)$, $i = 1, 2$, имеем систему уравнений

$$\begin{cases} C_1'\tilde{y}_1 + C_2'\tilde{y}_2 = 0, \\ C_1'\tilde{y}_1' + C_2'\tilde{y}_2' = f_2(x), \end{cases} \tag{41}$$

откуда находим C_i', потом C_i, $i = 1, 2$.

35. Запишем данное уравнение в виде

$$\frac{dy}{dx} + (\operatorname{tg} x)y = 2x\cos x. \tag{42}$$

Решаем однородное уравнение

$$\frac{dy}{dx} + (\operatorname{tg} x)y = 0, \quad \frac{dy}{y} = -\operatorname{tg} x\,dx = \frac{d(\cos x)}{\cos x},$$

$y = C_0 \cos x$ — общее решение однородного уравнения, C_0 — любая постоянная.

Ищем решение уравнения (42) в виде

$$y_0 = C_0(x)\cos x.$$

Согласно (40):

$$C_0'(x)\cos x = 2x\cos x, \quad C_0' = 2x, \quad C_0 = x^2 + C,$$

C — любая постоянная. Тогда $y = C\cos x + x^2\cos x$ — общее решение уравнения (42). Из условия $y(0) = 0$ находим $C = 0$. Следовательно, $\boldsymbol{y = x^2\cos x}$ — искомая интегральная кривая.

36. Согласно (39) имеем

$$\left(\frac{y}{e^x}\right)' = \frac{C}{e^{2x}}\, e^{\int \frac{2x-1}{x-1}\,dx} = C(x-1).$$

Тогда

$$\frac{y}{e^x} = \frac{C(x-1)^2}{2} + C_1,$$

$y = C_1e^x + C_2e^x(x-1)^2$ — общее решение однородного уравнения, где C_1, C_2 — любые постоянные.

Для получения решения неоднородного уравнения применяем метод вариации постоянных.

Согласно (41) имеем систему уравнений

$$\begin{cases} C_1'e^x + C_2'e^x(x-1)^2 = 0, \\ C_1'e^x + C_2'e^x[(x-1)^2 + 2(x-1)] = \dfrac{e^x}{(x-1)^2}, \end{cases}$$

из которой находим

$$C_2' = \frac{1}{2(x-1)^3}, \quad C_1' = -\frac{1}{2(x-1)}.$$

Тогда

$$C_2 = -\frac{1}{4(x-1)^2} + \tilde{C}_2, \quad C_1 = -\frac{1}{2}\ln|x-1| + \tilde{C}_1,$$

$$y = \tilde{C}_1e^x + \tilde{C}_2e^x(x-1)^2 - \frac{1}{4}\,e^x - \frac{1}{2}\,e^x\ln|x-1|, \quad \text{или}$$

$$\boldsymbol{y = C_1e^x + C_2e^x(x-1)^2 - \frac{1}{2}\,e^x\ln|x-1|},$$

C_1, C_2 — любые постоянные

Дифференциальное уравнение первого порядка решается, а уравнение более высокого порядка допускает понижение порядка, если можно уравнение преобразовать путём домножения на множитель в равенство производных или дифференциалов. Иногда часть уравнения преобразуется в производную некоторой функции. Такой вид уравнения может помочь найти нужную замену.

37. Делим обе части исходного уравнения на x^2. Получаем

$$\left(\frac{y}{x}\right)' = 3x^2 e^{-\frac{2y}{x}},$$

что можно представить в виде

$$\frac{1}{2}\left(e^{\frac{2y}{x}}\right)' = (x^3)',$$

откуда следует

$$e^{\frac{2y}{x}} = 2x^3 + C, \quad \boldsymbol{y = \frac{x}{2}\ln(2x^3 + C)},$$

C — любая постоянная.

38. Делим обе части исходного уравнения на y^2. Получаем

$$x\left(\frac{y'}{y}\right)' = \frac{y'}{y}.$$

Замена $u = \dfrac{y'}{y}$ приводит к уравнению

$$xu' - u = 0,$$

откуда $u = C_1 x$, $\dfrac{y'}{y} = C_1 x$.

Заметим, что указанная замена рекомендуется для любого однородного относительно y, y', y'' уравнения, каковым является исходное.

Из начальных условий определяем $C_1 = 1$. Далее имеем

$$\frac{y'}{y} = x, \quad (\ln|y|)' = \left(\frac{x^2}{2}\right)', \quad \ln|y| = \frac{x^2}{2} + C_2, \quad C_2 = -\frac{1}{2},$$

$$|y| = e^{\frac{x^2-1}{2}}, \quad \boldsymbol{y = e^{\frac{x^2-1}{2}}}.$$

Положения равновесия системы

$$\begin{cases} \dot{x} = f_1(x, y), \\ \dot{y} = f_2(x, y) \end{cases} \tag{43}$$

находятся как решения системы уравнений $f_i(x, y) = 0$, $i = 1, 2$.

Предполагается, что $f_1(x, y)$, $f_2(x, y)$ — действительные, дважды непрерывно дифференцируемые функции в области Ω в $\mathbb{R}^2$.

Если $(a;b)$ — положение равновесия системы (43), то делаем замену переменных

$$\xi = x - a, \quad \eta = y - b.$$

Для преобразованной системы дифференциальных уравнений исследуем положение равновесия $(0;0)$. Для этого систему линеаризуем. Если $(0;0)$ является либо узлом либо седлом либо фокусом для линеаризации

$$\dot{\vec{\xi}} = A\vec{\xi}, \tag{44}$$

$\vec{\xi} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$, $A = \|a_{ij}\|$, $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $i = 1,\ 2$, то для системы (43) точка $(a;b)$ — положение равновесия того же типа.

Если точка $(0;0)$ для системы (44) является **узлом**, то среди фазовых траекторий есть такие, которые принадлежат прямым, проходящим через $(0;0)$ в направлении собственных векторов преобразования с матрицей A. Остальные траектории — это кривые, которые касаются в пределе в точке $(0;0)$ прямой, направленной вдоль собственного вектора, принадлежащего меньшему по абсолютной величине собственному значению.

Если точка $(0;0)$ для системы (44) является **фокусом**, то направление закручивания фазовых траекторий этой системы определяется по знаку $\operatorname{Re}\lambda$ (λ — собственное значение) в сочетании с вектором скорости, который вычисляется по формулам (44) в какой-нибудь точке.

39. Определяем положения равновесия, решая систему уравнений

$$\begin{cases} \arcsin(y - 4x) = 0, \\ e^x - 2e^{2x} + 1 = 0. \end{cases}$$

Имеем $y = 4x$, $2u^2 - u - 1 = 0$, где $u = e^x$; $u = 1$, $x = 0$; $(0;0)$ — положение равновесия.

Линеаризуем исходную систему в окрестности точки

$(0;0)$. Получаем систему

$$\begin{cases} \dot{x} = -4x + y, \\ \dot{y} = -3x. \end{cases} \tag{45}$$

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \det \begin{pmatrix} -4-\lambda & 1 \\ -3 & -\lambda \end{pmatrix} = 0,$$

$$\lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0, \quad \lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = -3;$$

$$\lambda_1 = -1, \quad A + E = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad 3\xi_1 = \xi_2, \quad , \vec{h}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix};$$

$$\lambda_2 = -3, \quad A + 3E = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}, \quad \xi_1 = \xi_2, \quad , \vec{h}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$\vec{h}_1$ — направляющий вектор касательной в точке $(0;0)$ (при $t \to +\infty$), $(0;0)$ — устойчивый узел (см. рис. 11).

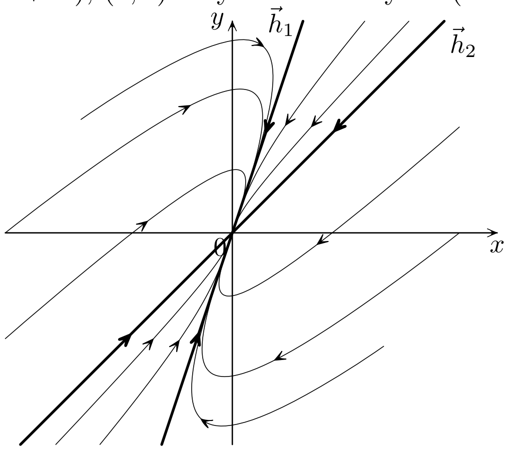

Рис. 11

Для уточнения общей картины поведения фазовых траекторий системы (45) перейдём к уравнению первого порядка

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x}{4x - y}.$$

Интегральные кривые этого уравнения можно изобразить, привлекая изоклины этого уравнения: $y' = 0 \Rightarrow x = 0$; $y' = \infty \Rightarrow y = 4x$; $y' = \frac{3}{4} \Rightarrow y = 0$ (см. рис. 11).

$(0;0)$ — устойчивый узел, фазовые траектории изображены на рис. 11.

Пусть дважды непрерывно дифференцируемая на $[\vec{a};\vec{b}]$ функция $y(x)$ является решением на $[a;b]$ вариационной задачи со свободным концом

$$J(y)=\int_a^b F(x,y,y')\,dx,\quad y(b)=\gamma \tag{46}$$

γ — заданное число, $F(x,y,p)$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция при $x\in[a;b]$, $(y,p)\in\mathbb{R}^2$.

Тогда $y(x)$ удовлетворяет уравнению Эйлера

$$F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}=0 \tag{47}$$

и условию на свободном конце

$$F_{y'}\Big|_{x=a}=0. \tag{48}$$

Для $\tilde{y}(x)$ — дважды непрерывно дифференцируемой на $[a;b]$ функции, удовлетворяющей условиям (46)–(48), первая вариация функционала J при любой $h\in C^1_{[a;b]}$, $h(b)=0$, равна нулю. Действительно,

$$\delta J(\tilde{y};h)=\int_a^b (F_{y'}h'+F_y\cdot h)\,dx=$$

$$=(F_{y'}\cdot h)\Big|_{x=a}^{x=b}+\int_a^b\left(F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}\right)h\,dx=0,$$

так как выполнены (47), (48), $h\in C^1_{[a;b]}, h(b)=0$.

40. Решим уравнение Эйлера:

$$F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}=-8xy'+10\cos x-\frac{d}{dx}(2y'-8xy)=0,$$

$$y''-4y=5\cos x. \tag{49}$$

Имеем

$$k^2-4=0,\quad k_1=2,\quad k_2=-2,\quad y=C_1e^{2x}+C_2e^{-2x}+y_0.$$

Так как в уравнение (49) не входит y', то можно искать y_0 в виде

$$y_0 = A\cos x.$$

Получаем, подставляя y_0 в (49),

$$-5A = 5, \quad A = -1, \quad y_0 = -\cos x,$$
$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} - \cos x$$

— общее решение уравнения (49). Необходимое условие (48) имеет вид

$$(2y' - 8xy)\Big|_{x=0} = 0, \quad y'(0) = 0.$$

Удовлетворяем краевым условиям. Имеем

$$y' = 2C_1 e^{2x} - 2C_2 e^{-2x} + \sin x,$$
$$\begin{cases} C_1 - C_2 = 0, \\ C_1 e^{2\pi} + C_2 e^{-2\pi} + 1 = 1 \end{cases}, \quad C_1 = C_2 = 0, \quad \tilde{y} = -\cos x.$$

Проверим, имеет ли функционал J экстремум на $\tilde{y}$.

Для любой $h \in C^1_{[0;\pi]}$, $h(\pi) = 0$, имеем

$$J(\tilde{y} + h) - J(\tilde{y}) = \delta J(\tilde{y}; h) + \int_0^\pi (h'^2 - 8xhh')\,dx, \quad \delta J = 0,$$
$$-\int_0^\pi 8xhh'\,dx = -4\int_0^\pi x\,d(h^2) = -4(xh^2)\Big|_0^\pi + \int_0^\pi 4h^2\,dx,$$

следовательно,

$$J(\tilde{y} + h) - J(\tilde{y}) = \int_0^\pi (h'^2 + 4h^2)\,dx \geqslant 0.$$

На $\tilde{y} = -\cos x$ функционал J имеет абсолютный минимум.

Вариант 4

1. $y'(0) = -\frac{1}{2}$, $y''(0) = \frac{1}{2}$.

2. $\dfrac{\partial u}{\partial \vec{l}} = -\frac{8}{5}$.

3. $y^{(6)}(0) = \frac{80}{3}$, $y^{(7)}(0) = 0$.

4. $f'(x) = -2x^3\cos\frac{1}{x^2}$, $x \in (-1;1)\setminus\{0\}$, $f'(0) = 0$; $f''(x) = -6x^2\cos\frac{1}{x^2} - 4\sin\frac{1}{x^2}$, $x \in (-1;1)\setminus\{0\}$, $f''(0) = 0$, $f''(x)$ в $x = 0$ разрывна.

5. $x = \pm 2$ — вертикальные асимптоты, $y = x - \frac{1}{2}$ при $x \to +\infty$, $y = -x + \frac{1}{2}$ при $x \to -\infty$.

6. $y' = \frac{2^{-\frac{1}{x}}\ln 2}{x^2}$, $x > 0$, $y'' = \frac{\ln 2 \cdot 2^{1-\frac{1}{x}}}{x^4}\left(\frac{\ln 2}{2} - x\right)$, $x > 0$; $y''\left(\frac{\ln 2}{2}\right) = 0$; $y = 1$ — горизонтальная асимптота при $x \to +\infty$. $y\left(\frac{\ln 2}{2}\right) = \frac{1}{2^{\frac{2}{\ln 2}}} = \frac{1}{e^2}$ (перегиб). График см. на рис. 12.

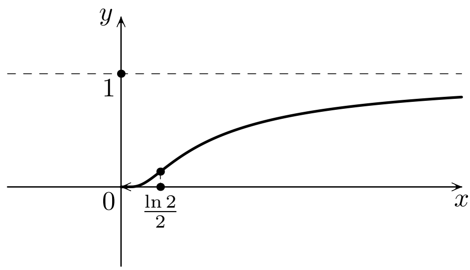

Рис. 12

7. $f(x) = \frac{x-3}{2} - \frac{(x-3)^2}{2} + o((x-3)^2)$.

8. $\frac{1}{3}$.

9. $\frac{x^2\ln^2 x}{2} - \frac{x^2\ln x}{x} + \frac{x^2}{4} + C$.

10. $-1 < \alpha < 1$.

11. Сходится.

12. $-\frac{2}{3}$.

13. $A\left(-\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}\right)$ — нет экстремума; $B\left(-\frac{3}{4}; \frac{1}{2}\right)$ — точка строгого локального минимума.

14. $\lambda_1 = \frac{7}{2}$, $A\left(-\frac{1}{7}; -\frac{2}{7}\right)$; $\lambda_2 = -\frac{7}{2}$, $B\left(\frac{1}{7}; \frac{2}{7}\right)$.

15. Недифференцируема.

16. $u_{\xi\eta} = -2\eta$, $u = -y(2x+y)^2 + \varphi(y) + \psi(2x+y)$, $\forall\, \varphi, \psi \in C^2$.

17. Сходится; сходится неравномерно, так как $u_n(n) = \frac{1}{2}$, не выполнено необходимое условие равномерной сходимости.

18. $S(0) = S(2\pi) = f(2\pi) = \pi^2$, $S(-\pi) = S(\pi) = f(\pi) = 0$.

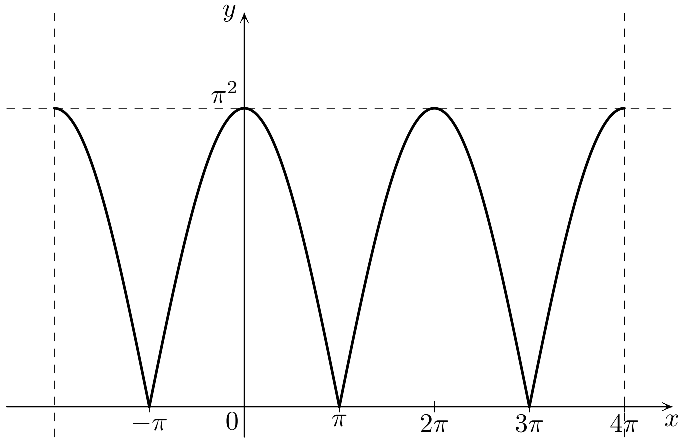

Рис. 13

Сходится равномерно на $[\pi; 3\pi]$ (по теореме о равномерной сходимости ряда Фурье), $a_n = \dfrac{1}{\pi}\int_{\pi}^{3\pi} f(x)\cos nx\,dx = 0$, $n = 0,\ 1,\ \ldots,\ b_n = 0,\ n = 1,\ 2,\ \ldots;\ l = \pi$.

График см. на рис. 13.

19. а) Да; б) нет, $f = \cos\frac{x}{2}$.

20. $\forall\, x = x_0$ ряд сходится; при $x \leqslant d$, $\forall\, d$, сходится равномерно; там же сходятся равномерно ряды для производных.

21. 9π. | **22.** $\frac{5}{6}$. | **23.** 8π.

24. 4π. | **25.** $x - 4y + 14 = 0$. | **26.** 3.

27. $(\vec r - \vec r_1, \vec r_2 - \vec r_1, [\vec n_1, \vec n_2]) = 0$. | **28.** $2x + y - 4 = 0$.

29. $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $C_i = \mathrm{const}$, $i = 1, 2$.

30. $S = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$; $A' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

31. $\lambda_1 = -1$, $h_1 = \frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\lambda_2 = 3$, $h_2 = \frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

32. $g = \xi_1^2 - \xi_2^2 + \xi_3^2$, $\xi_1 = \sqrt{2}(x_1 - x_2)$, $\xi_2 = x_2 + x_3$, $\xi_3 = x_2 - x_3$.

33. $y = C_1 + C_2 e^{2x} - x(x+1) + 2\cos x - \sin x$, C_i — const, $i = 1, 2$.

34. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^t \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3 e^t \left(t \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$,
C_i — const, $i = 1, 2, 3$.

35. $x = y^4 + \frac{1}{y^2}$.

36. $y = C_1 x + C_2 \sqrt{1 - x^2} + 1$, C_i — const, $i = 1, 2$.

37. $x^2 y - \frac{x}{y} = C$, $y = 0$, $C = \text{const}$.

38. $y = \frac{x^2 - 1}{2}$.

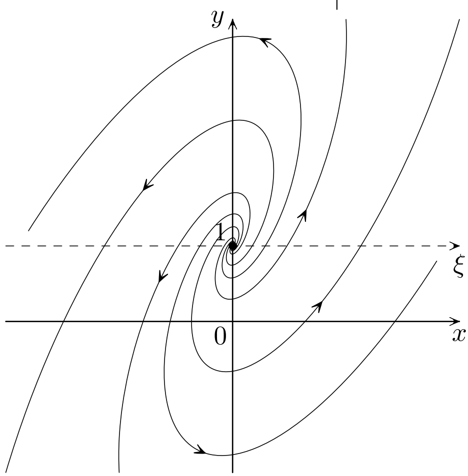

Рис. 14

39. $(0; 1)$, $\begin{cases} \dot{\xi} = 2\xi - \eta, \\ \dot{\eta} = 3\xi, \end{cases}$ $\xi = x$, $\eta = y - 1$, $\lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}i$, неустойчивый фокус, раскручивание против часовой стрелки, $\xi = 1$, $\eta = 0$, $\begin{pmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ (см. рис. 14).

40. $y = \frac{1}{2x} + \frac{1}{x^3}$; абсолютный минимум; уравнение Эйлера: $x^2 y'' + 3xy' - 3y = -\frac{2}{x}$.