Федеральное агентство по образованию
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
Московский физико-технический институт
(государственный университет)

Кафедра высшей математики

Серия «Инновационные технологии современного
математического образования»

МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ ПО РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ГОСУДАРСТВЕННОГО КВАЛИФИКАЦИОННОГО ЭКЗАМЕНА ПО МАТЕМАТИКЕ

2001-2007 гг.

Часть I

Учебно-методическое пособие

Составители М.В. Балашов, Г.Е. Иванов, А.Ю. Петрович,
Н.Ю. Петухова, М.И.Шабунин

Москва 2007

УДК 517.

Рецензент:
Доктор физико-математических наук *Тер-Крикоров А.М.*

Методическое пособие по решению задач государственного экзамена по математике в МФТИ. Ч. I. 2001-2007 гг.: Учебно-методическое пособие / Сост. М.В. Балашов, Г.Е. Иванов, А.Ю. Петрович, Н.Ю. Петухова, М.И.Шабунин.М.: МФТИ, 2007. 110 с.

УДК 517

Начиная с 2001/02 учебного года Государственный квалификационный экзамен по математике в МФТИ проводится в два этапа: письменная работа и устный экзамен. Объём письменной работы и требования по её выполнению установились не сразу. Несколько лет они были предметом обсуждения на кафедре высшей математики МФТИ. В настоящем пособии приведены варианты всех состоявшихся до настоящего времени письменных работ. Ко всем вариантам даны ответы, к некоторым — решения. Работа 2004/2005 учебного года выделена в отдельную вторую часть пособия ввиду большого количества задач в каждом варианте.

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов III курса МФТИ. Его целью является помощь студентам в подготовке к ГКЭ. Пособие будет полезно также студентам и преподавателям I–II курсов при изучении соответствующих разделов программы.

Содержание

Предисловие

Государственный квалификационный экзамен (ГКЭ) по математике проводится в Московском физико-техническом институте с 1998 года, когда была введена степень бакалавра как промежуточный этап в системе высшего образования. Тогда было решено проводить ГКЭ по математике и физике. Заключительный экзамен по физике проводился в МФТИ с первых лет его основания с некоторыми перерывами; теперь был введён заключительный экзамен и по математике. Этим подчёркивалось, что математика и физика являются основой фундаментального образования студентов Физтеха, и студенты, претендующие на степень бакалавра, должны подтвердить свою квалификацию в этих науках.

Сначала ГКЭ по математике проводился только в устной форме. Его сдавали студенты IV курса по полной программе высшей математики, изучаемой в течение трёх лет: математический анализ, аналитическая геометрия и линейная алгебра, дифференциальные уравнения, теория вероятностей, теория функций комплексного переменного, уравнения математической физики. В программу были включены также вопросы по вычислительной математике, которую студенты изучали на III курсе. Первоначально программа была очень обширна, поэтому в неё, естественно, были включены далеко не все вопросы, изучаемые в соответствующих курсах. Позже этот экзамен был перенесён на весенний семестр III курса.

Начиная с 2002 года, ГКЭ по математике проводится в 2 этапа: в письменной и устной форме. К этому времени ГКЭ переместился в зимнюю сессию III курса, так что впервые письменный ГКЭ сдавало уже шестое «поколение» студентов, претендующих на степень бакалавра. В программу экзамена теперь входят только математические предметы, изучаемые на первых двух курсах; исключены ТФКП, УМФ и вычислительная математика. Оставшиеся предметы представлены глубже, чем раньше.

Настоящее пособие содержит варианты письменных работ ГКЭ, проведённых с 2002 по 2007 годы. Некоторые из них приведены с решениями, большая часть остальных снабжена ответами.

Условия задач. 2001/2002 учебный год

Вариант 1

1. Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x - \sin x}{\ln(1+5x) - \ln(1-x)}$.

2. Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to 0} (1 + \operatorname{sh} 2x)^{\frac{1}{x}}$.

3. Найти y', если $y = (\sin x)^x$.

4. Найти $y^{(n)}$, если $y = x\sin^2 x$, $n > 1$.

5. Разложить функцию $y = e^{x^2-x}$ по формуле Тейлора в окрестности точки $x_0 = 0$ до $o(x^3)$.

6. Найти асимптоты и построить график функции

$$y = \sqrt{x^2 - x - 2}.$$

7. Найти асимптоты, точки экстремума, точки перегиба и построить график функции $y = \dfrac{(x+1)^3}{x^2}$.

8. Найти интеграл: $\int \dfrac{x^2\,dx}{\sqrt{3x^3+1}}$.

9. Найти интеграл: $\int \dfrac{3x+1}{x^2-x+1}\,dx$.

10. Найти $F'(x)$, если $F(x) = \int_{x^2}^{x} \sin^{10} t\,dt$.

11. Вычислить интеграл: $\int_0^1 x\,e^x\,dx$.

12. Вычислить интеграл: $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^3 x \cdot \cos^4 x\,dx$.

13. Найти все значения α, при которых сходится интеграл

$$\int_0^1 x^{\alpha} \sin x\,dx.$$

14. Найти все значения α, при которых сходится интеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{x\,dx}{(x^2+1)^{\alpha}}.$$

15. Разложить в ряд Тейлора по степеням x функцию $y = \ln(3+2x)$ и найти радиус сходимости ряда.

16. Сходится ли ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{\sqrt{1+n^5 x}}$ равномерно на множествах а) $E_1 = (0; 1)$;

б) $E_2 = (1; +\infty)$?

Ответ обосновать (признак, теорема, критерий).

17. Сходится ли интеграл $\int_0^{+\infty} x^3 e^{-\alpha x^4}\, dx$ равномерно по α на множествах

а) $E_1 = (0; 1)$;

б) $E_2 = (1; +\infty)$?

Ответ обосновать (признак, теорема, критерий).

18. Вычислить двойной интеграл $\iint_G (1-x)y\, dx\, dy$, если G — треугольник ABC такой, что $A(0,0)$, $B(1,0)$, $C(0,1)$.

19. Вычислить криволинейный интеграл $\int_\Gamma xy^2\, dx + x^2 y\, dy$, где Γ — отрезок с началом в точке $A(0,0)$ и концом в точке $B(1,1)$.

20. Вычислить поверхностный интеграл первого рода

$$\iint_\Sigma x^2\, dS,$$

где Σ — поверхность сферы радиуса R с центром в точке $(0,0,0)$.

21. Вычислить поверхностный интеграл второго рода

$$\iint_{\Sigma^+} x^2\, dx\, dy,$$

где Σ^+ — внешняя сторона сферы радиуса R с центром $(0,0,0)$.

22. а) Написать ряд Фурье функции $f(x) = x$ при $x \in [-\pi, \pi]$.

б) Построить график суммы этого ряда Фурье на $\mathbb{R}$.

в) Сходится ли этот ряд равномерно на $(-1,1)$? Ответ обосновать (признак, теорема, критерий).

г) Сходится ли этот ряд равномерно на $(-\pi, \pi)$? Ответ обосновать (признак, теорема, критерий).

23. Записать уравнение прямой, проходящей через точку $A(1; -2; 3)$ перпендикулярно плоскости $2x - 4y + 3z + 4 = 0$.

24. Определить тип поверхности второго порядка, заданной уравнением $x^2 + y^2 = 2z^2$.

25. Прямая l_1 проходит через точки $A_1(1; -1; 1)$ и $A_2(0; 3; 4)$, а прямая l_2 — через точки $B_1(-1; 1; -7)$ и $B_2(-4; 1; -6)$. Найти

а) угол между прямыми l_1 и l_2;

б) уравнение плоскости (в координатной форме), проходящей через точку $M(0; 0; 4)$ и параллельной прямым l_1 и l_2;

в) расстояние между прямыми l_1 и l_2.

26. Найти A^{-1}, если $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

27. Решить уравнение $e^{xy}(x\,dy + y\,dx) + x^2\,dx + \dfrac{dy}{\sqrt{y}} = 0$.

28. Найти общее решение уравнения $y'' + 4y = x$.

29. Числа 0, 2 и -1 — собственные значения матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

а) Найти соответствующие собственные векторы.

б) Найти общее решение линейной однородной системы дифференциальных уравнений

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}, \quad \text{где} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}.$$

Вариант 2

1. Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 5x + \sin 3x}{e^{2x} - e^{x}}$.

2. Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to 0} (1 + \operatorname{tg} 3x)^{\frac{1}{x}}$.

3. Найти y', если $y = x^{\cos x}$.

4. Найти $y^{(n)}$, если $y = x\cos^2 x$, $n > 1$.

5. Разложить функцию $y = \ln(1+x+x^2)$ по формуле Тейлора в окрестности точки $x_0 = 0$ до $o(x^3)$.

6. Найти асимптоты и построить график функции

$$y = \sqrt{|x^2 + x - 2|}.$$

7. Найти асимптоты, точки экстремума, точки перегиба и построить график функции $y = \dfrac{(1-x)^3}{x^2}$.

8. Найти интеграл: $\int \dfrac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^6}}$.

9. Найти интеграл: $\int \dfrac{x-1}{x^2+x+1}\,dx$.

10. Найти $F'(x)$, если $F(x) = \int_{1/x}^{x} \cos^8 t\,dt$.

11. Вычислить интеграл: $\int_0^1 \ln(1+x)\,dx$.

12. Вычислить интеграл: $\int_0^{2\pi} \sin^2 x\,dx$.

13. Найти все значения α, при которых сходится интеграл

$$\int_0^1 \frac{e^x-1}{x^\alpha}\,dx.$$

14. Найти все значения α, при которых сходится интеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^3\,dx}{(x^4+2)^\alpha}\,.$$

15. Разложить в ряд Тейлора по степеням x функцию $y = \dfrac{1}{3x+2}$ и найти радиус сходимости ряда.

16. Сходится ли ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{1+n^2x}}$ равномерно на множествах

а) $E_1 = (0;1)$;

б) $E_2 = (1;+\infty)$?

Ответ обосновать (признак, теорема, критерий).

17. Сходится ли интеграл $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-\alpha x^3}\,dx$ равномерно по α на множествах

а) $E_1 = (0;1)$;

б) $E_2 = (1;+\infty)$?

Ответ обосновать (признак, теорема, критерий).

18. Вычислить двойной интеграл $\iint_G (x-1)y\,dx\,dy$, если G — треугольник ABC такой, что $A(0,0)$, $B(1,0)$, $C(0,-1)$.

19. Вычислить криволинейный интеграл $\int_\Gamma x^3y^4\,dx + x^4y^3\,dy$, где Γ — отрезок с началом в точке $A(0,0)$ и концом в точке $B(1,2)$.

20. Вычислить поверхностный интеграл первого рода

$$\iint_{\Sigma} y^2\,dS,$$

где Σ — поверхность сферы радиуса 3 с центром в точке $(0,0,0)$.

21. Вычислить поверхностный интеграл второго рода

$$\iint_{\Sigma^+} y^2\,dx\,dy,$$

где Σ^+ — внешняя сторона сферы радиуса R с центром $(0,0,0)$.

22. а) Написать ряд Фурье функции $f(x) = 1 - x$ при $x \in$ $\in [-\pi, \pi]$.

б) Построить график суммы этого ряда Фурье на $\mathbb{R}$.

в) Сходится ли этот ряд равномерно на $(2,4)$? Ответ обосновать (признак, теорема, критерий).

г) Сходится ли этот ряд равномерно на $(-1,2)$? Ответ обосновать (признак, теорема, критерий).

23. Записать уравнение прямой, проходящей через точку $A(-1;3;4)$ перпендикулярно плоскости $3x-2y+5z-6=0$.

24. Определить тип поверхности второго порядка, заданной уравнением $x^2 - y^2 = 5$.

25. Прямая l_1 проходит через точки $A_1(1;-4;-1)$ и $A_2(3;6;5)$, а прямая l_2 — через точки $B_1(3;6;-5)$ и $B_2(-2;2;-6)$. Найти

а) угол между прямыми l_1 и l_2;

б) уравнение плоскости (в координатной форме), проходящей через точку $M(0;0;3)$ и параллельной прямым l_1 и l_2;

в) расстояние между прямыми l_1 и l_2.

26. Найти A^{-1}, если $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

27. Решить уравнение $\dfrac{x\,dy + y\,dx}{1+xy} + x\,dx + \dfrac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = 0$.

28. Найти общее решение уравнения $y'' + y = x^2$.

29. Числа 1, 2 и 3 — собственные значения матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

а) Найти соответствующие собственные векторы.
б) Найти общее решение линейной однородной системы дифференциальных уравнений

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}, \quad \text{где} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}.$$

Вариант 3

1. Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 2x}{\sqrt{1+x^2}-1}$.

2. Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to 0} (1+\operatorname{sh} 2x)^{\frac{1}{3x^2}}$.

3. Найти y', если $y = (\operatorname{tg} x)^x$.

4. Найти $y^{(n)}$, если $y = (3x+1)\cos x \cdot \sin x$, $n > 1$.

5. Разложить функцию $y = e^{x^2+2x}$ по формуле Тейлора в окрестности точки $x_0 = 0$ до $o(x^3)$.

6. Найти асимптоты и построить график функции

$$y = \sqrt{x^2+2x-3}.$$

7. Найти асимптоты, точки экстремума, точки перегиба и построить график функции $y = \dfrac{(x-1)^3}{x^2}$.

8. Найти интеграл: $\int \dfrac{x\,dx}{1+x^4}$.

9. Найти интеграл: $\int \dfrac{3x+2}{x^2+x+1}\,dx$.

10. Найти $F'(x)$, если $F(x) = \int_x^{x^2} e^{-t^4}\,dt$.

11. Вычислить интеграл: $\int_{-1}^{0} x\,e^{-x}\,dx$.

12. Вычислить интеграл: $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x\,dx$.

13. Найти все значения α, при которых сходится интеграл

$$\int_0^1 x^\alpha \ln(1+x^3)\,dx.$$

14. Найти все значения α, при которых сходится интеграл

$$\int_5^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\,dx}{(x+4)^\alpha}.$$

15. Разложить в ряд Тейлора по степеням x функцию $y = \ln(4-3x)$ и найти радиус сходимости ряда.

16. Сходится ли ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{2+n^3x}}$ равномерно на множествах

а) $E_1 = (0;1)$;

б) $E_2 = (1;+\infty)$?

Ответ обосновать (признак, теорема, критерий).

17. Сходится ли интеграл $\int_0^{+\infty} xe^{-\alpha x^2}\,dx$ равномерно по α на множествах

а) $E_1 = (0;1)$;

б) $E_2 = (1;+\infty)$?

Ответ обосновать (признак, теорема, критерий).

18. Вычислить двойной интеграл $\iint_G (x+1)y\,dx\,dy$, если G — треугольник ABC такой, что $A(0,0)$, $B(-1,0)$, $C(0,1)$.

19. Вычислить криволинейный интеграл $\int_\Gamma x^2y^3\,dx + x^3y^2\,dy$, где Γ — отрезок с началом в точке $A(0,0)$ и концом в точке $B(1,-2)$.

20. Вычислить поверхностный интеграл первого рода

$$\iint_\Sigma z^2\,dS,$$

где Σ — поверхность сферы радиуса 2 с центром в точке $(0,0,0)$.

21. Вычислить поверхностный интеграл второго рода

$$\iint_{\Sigma^+} z^2\,dx\,dy,$$

где Σ^+ — внешняя сторона сферы радиуса R с центром $(0,0,0)$.

22. а) Написать ряд Фурье функции $f(x) = \begin{cases} x, & -\pi \leqslant x \leqslant 0, \\ 0, & 0 < x \leqslant \pi. \end{cases}$

б) Построить график суммы этого ряда Фурье на $\mathbb{R}$.

в) Сходится ли этот ряд равномерно на $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$?

Ответ обосновать (признак, теорема, критерий).

г) Сходится ли этот ряд равномерно на $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$?

Ответ обосновать (признак, теорема, критерий).

23. Записать уравнение прямой, проходящей через точку $A(2; -1; 3)$ перпендикулярно плоскости

$$2x - 6y + 3z - 12 = 0.$$

24. Определить тип поверхности второго порядка, заданной уравнением $2x^2 + 3y^2 = 2z$.

25. Прямая l_1 проходит через точки $A_1(0; 3; 4)$ и $A_2(1; -1; 1)$, а прямая l_2 — через точки $B_1(-1; 1; -7)$ и $B_2(-2; 2; -6)$. Найти:

а) угол между прямыми l_1 и l_2;

б) уравнение плоскости (в координатной форме), проходящей через точку $M(6; 0; 0)$ и параллельной прямым l_1 и l_2;

в) расстояние между прямыми l_1 и l_2.

26. Найти A^{-1}, если $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

27. Решить уравнение $\dfrac{y\,dx - x\,dy}{y^2} + \sin x\,dx + \dfrac{dy}{4 + y^2} = 0$.

28. Найти общее решение уравнения $y'' - 4y = e^x$.

29. Числа 1, 2 и 5 — собственные значения матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

а) Найти соответствующие собственные векторы.

б) Найти общее решение линейной однородной системы дифференциальных уравнений

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}, \quad \text{где} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}.$$

Вариант 4

1. Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} 2x + 2\operatorname{tg} x}{e^x - 1}$.

2. Вычислить предел: $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$.

3. Найти y', если $y = x^{\sin x}$.

4. Найти $y^{(n)}$, если $y = (2x+1)\sin^2 3x$, $n > 1$.

5. Разложить функцию $y = \ln(1-x+x^2)$ по формуле Тейлора в окрестности точки $x_0 = 0$ до $o(x^3)$.

6. Найти асимптоты и построить график функции

$$y = \sqrt{|x^2 - 2x - 3|}.$$

7. Найти асимптоты, точки экстремума, точки перегиба и построить график функции $y = -\dfrac{(x+1)^3}{x^2}$.

8. Найти интеграл: $\int \dfrac{x^3\,dx}{1+2x^4}$.

9. Найти интеграл: $\int \dfrac{x-2}{x^2-x+1}\,dx$.

10. Найти $F'(x)$, если $F(x) = \int_{x^3}^{-x} \ln^2(1+t)\,dt$.

11. Вычислить интеграл: $\int_0^{1/2} \ln(1+2x)\,dx$.

12. Вычислить интеграл: $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^3 x \cdot \sin^5 x\,dx$.

13. Найти все значения α, при которых сходится интеграл

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{x^\alpha}\,dx.$$

14. Найти все значения α, при которых сходится интеграл

$$\int_2^{+\infty} \frac{x^2\,dx}{(x^3+3)^\alpha}.$$

15. Разложить в ряд Тейлора по степеням x функцию $y = \dfrac{1}{2x-3}$ и найти радиус сходимости ряда.

16. Сходится ли ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{1+n^3x}}$ равномерно на множествах

а) $E_1 = (0;1)$;

б) $E_2 = (1;+\infty)$?

Ответ обосновать (признак, теорема, критерий).

17. Сходится ли интеграл $\int_0^{+\infty} x^4 e^{-\alpha x^5}\,dx$ равномерно по α на множествах

а) $E_1 = (0;1)$;

б) $E_2 = (1;+\infty)$?

Ответ обосновать (признак, теорема, критерий).

18. Вычислить двойной интеграл $\iint_G (1+x)y\,dx\,dy$, если G — треугольник ABC такой, что $A(0,0)$, $B(-1,0)$, $C(0,-1)$.

19. Вычислить криволинейный интеграл $\int_\Gamma x^4y^5\,dx + x^5y^4\,dy$, где Γ — отрезок с началом в точке $A(0,0)$ и концом в точке $B(1,2)$.

20. Вычислить поверхностный интеграл первого рода

$$\iint_\Sigma (x^2+y^2)\,dS,$$

где Σ — поверхность сферы радиуса 1 с центром в точке $(0,0,0)$.

21. Вычислить поверхностный интеграл второго рода

$$\iint_{\Sigma^+} (x^2+y^2)\,dx\,dy,$$

где Σ^+ — внешняя сторона сферы радиуса R с центром $(0,0,0)$.

22. а) Написать ряд Фурье функции $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leqslant x \leqslant 0, \\ x, & 0 < x \leqslant \pi. \end{cases}$

б) Построить график суммы этого ряда Фурье на $\mathbb{R}$.

в) Сходится ли этот ряд равномерно на $(-\pi,\pi)$?

Ответ обосновать (признак, теорема, критерий).

г) Сходится ли этот ряд равномерно на $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$?

Ответ обосновать (признак, теорема, критерий).

23. Записать уравнение прямой, проходящей через точку $A(1;-2;3)$ перпендикулярно плоскости

$$4x - 3y + 5z - 15 = 0.$$

24. Определить тип поверхности второго порядка, заданной уравнением $3x^2 + 4y^2 = 2 + 5z^2$.

25. Прямая l_1 проходит через точки

$$A_1(1;-4;-1) \quad \text{и} \quad A_2(1;-1;1),$$

а прямая l_2 — через точки

$$B_1(-4;1;-6) \quad \text{и} \quad B_2(-2;2;-6).$$

Найти:

а) угол между прямыми l_1 и l_2;

б) уравнение плоскости (в координатной форме), проходящей через точку $M(0;3;0)$ и параллельной прямым l_1 и l_2;

в) расстояние между прямыми l_1 и l_2.

26. Найти A^{-1}, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

27. Решить уравнение $\dfrac{x\,dy + y\,dx}{1 + x^2y^2} + \cos^2 x\,dx + \dfrac{y\,dy}{\sqrt{4 + y^2}} = 0$.

28. Найти общее решение уравнения $y'' + 16y = x + e^x$.

29. Числа 1, 2 и -1 — собственные значения матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

а) Найти соответствующие собственные векторы.

б) Найти общее решение линейной однородной системы дифференциальных уравнений

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}, \quad \text{где} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}.$$

Ответы и решения. 2001/2002 г.

Вариант 1

1. Так как $\sin 3x - \sin x = 2x + o(x)$, $\ln(1+5x) - \ln(1-x) = 5x - [(-x) + o(x)] = 6x + o(x)$, то

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x - \sin x}{\ln(1+5x) - \ln(1-x)} = \lim_{x\to 0} \frac{2x + o(x)}{6x + o(x)} = \mathbf{\frac{1}{3}}.$$

2. $\lim\limits_{x\to 0}(1+\operatorname{sh} 2x)^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0}(1+2x+o(x))^{\frac{1}{x}} = \boldsymbol{e^2}$.

3. $\ln y = x \ln\sin x$, $\dfrac{y'}{y} = \ln\sin x + x\operatorname{ctg} x$,
$\boldsymbol{y' = (\sin x)^x(\ln\sin x + x\operatorname{ctg} x)}$.

4. $y = x\,\dfrac{1-\cos 2x}{2} = \dfrac{x}{2} - \dfrac{x}{2}\cos 2x$. Если $n > 1$, то $y^{(n)} = -\dfrac{x}{2}(\cos 2x)^{(n)} + n\left(-\dfrac{1}{2}\right)(\cos 2x)^{(n-1)} =$
$\boldsymbol{= -x\cdot 2^{n-1}\cos\left(2x + n\frac{\pi}{2}\right) - n2^{n-1}\cos\left(2x + (n-1)\frac{\pi}{2}\right)}$.

5. $y = 1 + x^2 - x + \dfrac{1}{2}(x^2-x)^2 + \dfrac{1}{6}(-x)^3 + o(x^3) = 1 - x + x^2 + \dfrac{1}{2}x^2 - x^3 - \dfrac{1}{6}x^3 + o(x^3) = \boldsymbol{1 - x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{7}{6}x^3 + o(x^3)}$.

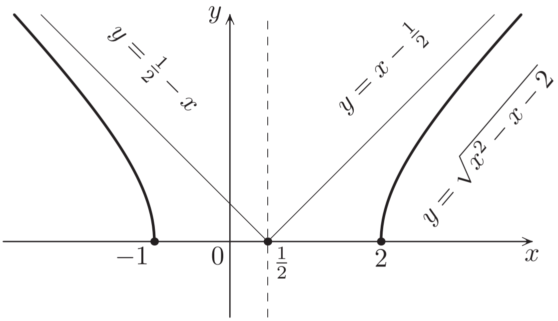

Рис. 1

6. Так как $x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}$, то $y = \sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}}$, $y - \left|x - \frac{1}{2}\right| = \dfrac{-\frac{5}{4}}{\sqrt{x^2-x-2} + \left|x - \frac{1}{2}\right|} \to 0$ при $x \to \infty$.

Следовательно, $y = x - \frac{1}{2}$ — асимптота при $x \to +\infty$, $y = \frac{1}{2} - x$ — асимптота при $x \to -\infty$. График симметричен относительно прямой $x = \frac{1}{2}$ и лежит ниже асимптоты (см. рис. 1).

7. $y = \dfrac{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}{x^2} = x + 3 + \dfrac{3x + 1}{x^2}$. Вертикальная асимптота — $x = 0$, причём $y \to +\infty$ при $x \to 0$. Наклонная асимптота — $y = x + 3$.

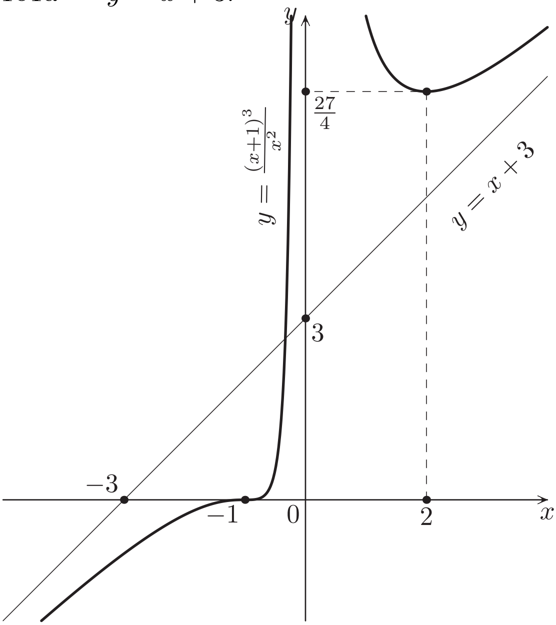

Рис. 2

График лежит выше асимптоты при $x > -\frac{1}{3}$ и ниже — при $x < -\frac{1}{3}$; при $x = -\frac{1}{3}$ график пересекает асимптоту.

$$y' = \frac{(x+1)^2(x-2)}{x^3}, \quad y'' = \frac{6(x+1)}{x^4}.$$

Точка $x = 2$ — точка минимума (при переходе через эту точку y' меняет знак с минуса на плюс), $y(2) = \frac{27}{4}$.

Точка $x = -1$ — точка перегиба (при переходе через эту точку y'' меняет знак), $y'(-1) = 0$ (см. рис. 2).

8. $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{3x^3+1}} = \frac{1}{9}\int \frac{d(3x^3+1)}{\sqrt{3x^3+1}} = \boldsymbol{\frac{2}{9}\sqrt{3x^3+1}+C}.$

9. $\displaystyle\int \frac{3x+1}{x^2-x+1}\,dx =$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}\,dx + \frac{5}{2}\int \frac{d\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} =$$

$$= \boldsymbol{\frac{3}{2}\ln(x^2-x+1)+\frac{5}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C}.$$

10. Если $\Phi(t)$ — первообразная для функции $f(t)$, то $F(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)\,dt = \Phi(\beta(x)) - \Phi(\alpha(x))$, откуда, используя правило дифференцирования сложной функции, получаем

$$F'(x) = f(\beta(x))\cdot\beta'(x) - f(\alpha(x))\alpha'(x).$$

В данном примере $f(t) = \sin^{10} t$, $\beta(x) = x$, $\alpha(x) = x^2$ и поэтому $\boldsymbol{F'(x) = \sin^{10} x - 2x\sin^{10} x^2}$.

11. $\int_0^1 xe^x\,dx = \int_0^1 x\,d(e^x) = xe^x\Big|_0^1 - \int_0^1 e^x\,dx = e-(e-1) = \mathbf{1}.$

12. $\int_{-\pi}^{-\pi} \sin^3 x\cos^4 x\,dx = 0$, так как подынтегральная функция является нечётной, а отрезок $[-\pi,\pi]$ симметричен относительно точки $x = 0$.

13. Так как $x^\alpha \sin x \sim x^{\alpha+1}$ при $x \to +0$, то интеграл сходится тогда и только тогда, когда $-(\alpha+1) < 1$, т.е. при $\boldsymbol{\alpha > -2}$.

14. Так как $\frac{x}{(x^2+1)^\alpha} \sim \frac{1}{x^{2\alpha-1}}$ при $x \to +\infty$, то интеграл сходится тогда и только тогда, когда $2\alpha - 1 > 1$, т.е. при $\boldsymbol{\alpha > 1}$.

15. $y = \ln 3 + \ln\left(1+\frac{2}{3}\,x\right) = \boldsymbol{\ln 3 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\frac{2}{3}\right)^n x^n,\ R = \frac{3}{2}}.$

16. Пусть $u_n(x) = \frac{n}{\sqrt{1+n^5x}}$.

а) Пусть $x \in E_1$, тогда если $x_n = \frac{1}{n^5}$, то $u_n(x_n) = \frac{n}{2} \to$ $\to \infty$ при $n \to \infty$. **Ряд сходится неравномерно на множестве $\boldsymbol{E_1}$ (критерий Коши)**.

б) Если $x \in E_2$, то $0 < u_n(x_n) \leqslant \frac{n}{\sqrt{1+n^5}} < \frac{1}{n^{3/2}}$. **Ряд сходится равномерно на множестве $\boldsymbol{E_2}$ (признак Вейерштрасса)**.

17. $J(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} x^3 e^{-\alpha x^4}\,dx = \frac{1}{4}\int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x^4}\,d(x^4) = \frac{1}{4}\int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\,dt.$

а) Пусть $\alpha \in E_1$. Для любого $\delta > 0$ возьмём $\xi'_\delta = \delta$, $\xi''_\delta = \delta + 1$, $\alpha_\delta = \frac{1}{\delta+1}$. Тогда

$$\int_{\xi'_\delta}^{\xi''_\delta} e^{-\alpha_\delta t}\,dt \geqslant \int_\delta^{\delta+1} e^{-\alpha_\delta \xi''_\delta}\,dt = \int_\delta^{\delta+1} e^{-1}\,dt = e^{-1} > 0.$$

Следовательно, интеграл **сходится неравномерно на множестве $\boldsymbol{E_1}$ (критерий Коши)**.

б) Пусть $\alpha \in E_2$. Тогда $e^{-\alpha t} \leqslant e^{-t}$ при всех $\alpha \in E_2$ и $t > 0$. Из сходимости интеграла $\int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt$ следует **равномерная сходимость интеграла $\boldsymbol{\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\,dt}$ на множестве $\boldsymbol{E_2}$ (признак Вейерштрасса)**.

18. $\iint\limits_G (1-x)y\,dx\,dy = \int\limits_0^1\left(\int\limits_0^{1-x} y\,dy\right)dx = \int\limits_0^1 (1-x)\left(\left.\frac{y^2}{2}\right|_{y=0}^{y=1-x}\right)dx =$ $= \frac{1}{2}\int\limits_0^1 (1-x)^3\,dx = -\frac{1}{8}\,(1-x)^4\Big|_0^1 = \boldsymbol{\frac{1}{8}}.$

19. $J = \int_\Gamma xy^2\,dx + x^2y\,dy = \int_\Gamma d\left(\frac{1}{2}\,x^2y^2\right)$. Пусть $u = \frac{1}{2}\,x^2y^2$, тогда $J = u(B) - u(A) = \frac{1}{2} - 0 = \boldsymbol{\frac{1}{2}}$.

20. $\iint_\Sigma x^2\,ds = \frac{1}{3}\iint_\Sigma (x^2+y^2+z^2)\,ds = \frac{R^2}{3}\iint_\Sigma ds = \frac{R^2}{3}\cdot 4\pi R^2 =$ $= \boldsymbol{\frac{4}{3}\,\pi R^4}$.

21. Пусть Σ_1^+ — верхняя сторона верхней полусферы x^2+y^2+ $+z^2 = R^2$, $z \geqslant 0$, Σ_2^+ и Σ_2^- — соответственно нижняя и верхняя стороны нижней полусферы $x^2+y^2+z^2 = R^2$, $z \leqslant 0$.

Тогда $\Sigma^+ = \Sigma_1^+ \cup \Sigma_2^+$,

$$\iint_{\Sigma_2^+} x^2\,dx\,dy = -\iint_{\Sigma_2^-} x^2\,dx\,dy = -\iint_{\Sigma_1^+} x^2\,dx\,dy,$$

откуда следует, что

$$\iint_{\Sigma^+} x^2\,dx\,dy = \iint_{\Sigma_1^+} x^2\,dx\,dy + \int_{\Sigma_2^+} x^2\,dx\,dy =$$
$$= \iint_{\Sigma_1^+} x^2\,dx\,dy - \int_{\Sigma_1^+} x^2\,dx\,dy = \mathbf{0}.$$

22. Пусть $\tilde{f}(x)$ — сумма ряда Фурье функции $f(x)$. Тогда $\tilde{f}(x)$ — периодическая функция с периодом 2π, причём

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} x, & x \in (-\pi, \pi), \\ 0, & \text{при } x = \pm\pi. \end{cases}$$

Ряд Фурье сходится равномерно к $f(x)$ на интервале $(-1, 1)$, так как функция $f'(x)$ непрерывна на отрезке $[-1, 1]$.

Так как f — нечётная функция, то ряд Фурье для неё имеет вид

$$\tilde{f}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx,$$

где $\quad b_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} x \sin nx\,dx =$

$$= \frac{2}{\pi}\left[x\left(-\frac{\cos nx}{n}\right)\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi} \cos nx\,dx\right] = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}.$$

Следовательно,

$$\tilde{f}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin nx.$$

Ряд для $\tilde{f}(x)$ сходится неравномерно на $(-\pi, \pi)$, так как в противном случае функция $\tilde{f}(x)$ была бы непрерывна.

23. Вектор $\vec{a} = (2, -4, 3)$ перпендикулярен плоскости $2x - 4y + 3z + 1 = 0$, поэтому уравнение прямой, параллельной вектору $\vec{a}$ и проходящей через точку $A(1,-2,3)$, можно записать в виде

$$\boldsymbol{\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-4}=\frac{z-3}{3}}.$$

24. Поверхность, заданная уравнением $x^2+y^2=2z^2$, — **прямой круговой конус**.

25. а) Вектор $\vec{a}=(-1,4,3)$ параллелен прямой l_1, а вектор $\vec{b}=(-3,0,1)$ параллелен прямой l_2.

Угол φ между прямыми l_1 и l_2 определяется из условия $\cos\varphi=\dfrac{(\vec{a},\vec{b})}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\dfrac{6}{\sqrt{26}\cdot\sqrt{10}}=\dfrac{3}{\sqrt{65}}$, откуда находим

$$\boldsymbol{\varphi=\arccos\frac{3}{\sqrt{65}}}.$$

б) Плоскость, проходящая через точку $M(0,0,4)$ и параллельная прямым l_1 и l_2, задаётся уравнением $(\vec{r},\vec{a}_1,\vec{a}_2)=0$, где $\vec{r}=(x,y,z-4)$, т.е. уравнением $\begin{vmatrix} x & y & z-4\\ -1 & 4 & 3\\ -3 & 0 & 1\end{vmatrix}=0$, которое можно записать в виде $4x-8y+12(z-4)=0$, или $\boldsymbol{x-2y+3z-12=0}$.

в) Пусть ρ — расстояние между прямыми l_1 и l_2, тогда $\rho=\dfrac{|(\overrightarrow{A_1B_1},\vec{a},\vec{b})|}{|[\vec{a},\vec{b}]|}$, где $\overrightarrow{A_1B_1}=(-2,2,-8)$, $(\overrightarrow{A_1B_1},\vec{a},\vec{b})=\begin{vmatrix} -2 & 2 & -8\\ -1 & 4 & 3\\ -3 & 0 & 1\end{vmatrix}=-3\cdot 38-6=-120$, $[\vec{a},\vec{b}]=(4,-8,12)$, $|[\vec{a},\vec{b}]|=4\sqrt{1+4+9}=4\sqrt{14}$. Следовательно, $\rho=\dfrac{120}{4\sqrt{14}}=\boldsymbol{\dfrac{30}{\sqrt{14}}}$.

26. $\det A=-2$, $A^{-1}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}3 & -1\\ -2 & 0\end{pmatrix}=\boldsymbol{\begin{pmatrix}-\frac{3}{2} & \frac{1}{2}\\ 1 & 0\end{pmatrix}}$.

27. Уравнение можно записать в виде $d(e^{xy}) + d\left(\frac{x^3}{3}\right) + d(2\sqrt{y}) = 0$, откуда $\boldsymbol{e^{xy} + \frac{x^3}{3} + 2\sqrt{y} = C}$.

28. Общее решение однородного уравнения имеет вид $\tilde{y} = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x$, а $y_0 = \frac{x}{4}$ — частное решение неоднородного уравнения. Следовательно, общее решение исходного уравнения имеет вид $\boldsymbol{y = C_1\sin 2x + C_2\cos 2x + \frac{x}{4}}$.

29. а) Собственный вектор $\vec{h}_1$ матрицы A, соответствующий собственному значению $\lambda_1 = 0$, определяется системой уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = 0, \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 - x_3 = 0, \end{cases}$$

откуда $x_1 = x_3$, $x_2 = 0$. Следовательно, можно взять $\vec{h}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Аналогично, если $\lambda_2 = 2$, $\vec{h}_2$ — соответствующий собственный вектор, то из системы уравнений

$$\begin{cases} -x_1 - 2x_2 - x_3 = 0, \\ -x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 - 3x_3 = 0 \end{cases}$$

следует, что $x_2 + 2x_3 = 0$. Поэтому можно взять $x_3 = 1$, тогда $x_1 = 3$, $x_2 = -2$, $\vec{h}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Наконец, если $\lambda_3 = -1$, $\vec{h}_3$ — соответствующий собственный вектор, то из системы уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 - x_3 = 0, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 = 0 \end{cases}$$

следует, что $2x_2 + x_3 = 0$. В качестве $\vec{h}_3$ можно взять вектор $\vec{h}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

б) Общее решение системы дифференциальных уравнений $\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{x_1} \\ \boldsymbol{x_2} \\ \boldsymbol{x_3} \end{pmatrix} = \boldsymbol{C_1} \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix} + \boldsymbol{C_2 e^{2t}} \begin{pmatrix} \mathbf{3} \\ \mathbf{-2} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix} + \boldsymbol{C_3 e^{-t}} \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{-2} \end{pmatrix}.$$

Вариант 2

1. 8. | **2.** e^3. | **3.** $y' = x^{\cos x}\left(-\sin x \cdot \ln x + \frac{\cos x}{x}\right)$.

4. $y^{(n)} = x \cdot 2^{n-1} \cos\left(2x + \frac{\pi n}{2}\right) + n2^{n-2} \cos\left(2x + (n-1)\,\frac{\pi}{2}\right)$.

5. $x + \frac{x^2}{2} - \frac{2}{3}\,x^3 + o(x^3)$.

6. Асимптоты: $y = x + \frac{1}{2}$ $(x \to +\infty)$, $y = -x - \frac{1}{2}$ $(x \to -\infty)$; график симметричен относительно прямой $x = -\frac{1}{2}$.

7. Асимптоты: $x = 0$, $y = 3 - x$, $x = -2$ — точка минимума, $y(-2) = \frac{27}{4}$;

$x = 1$ — точка перегиба; $y' = -\frac{(x-1)^2(x+2)}{x^3}$, $y'' = \frac{6(1-x)}{x^4}$.

8. $\frac{1}{3}\arcsin x^3 + C$. | **9.** $\frac{1}{2}\ln(x^2 + x + 1) - \sqrt{3}\,\mathrm{arctg}\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C$.

10. $F'(x) = \cos^8 x + \frac{1}{x^2}\cos^8 \frac{1}{x}$.

11. $2\ln 2 - 1$. **12.** π. **13.** $\alpha < 3$. **14.** $\alpha > 1$.

15. $y = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^n}{2^{n+1}}\,x^n$, $R = \frac{2}{3}$.

16. а) Да; б) Нет. **17.** а) Да; б) Нет. **18.** $-\frac{1}{8}$.

19. 4 **20.** 108π. **21.** 0.

22. а) $1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2(-1)^n}{n}\sin nx$; б) $S(x)=\begin{cases} f(x), & x\in(-\pi,\pi),\\ 1, & x=\pm\pi.\end{cases}$
в) нет; г) да.

23. $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-3}{-2}=\dfrac{z-4}{5}$. **24.** Гиперболический цилиндр.

25. а) $\arccos\dfrac{4}{\sqrt{30}}$; б) $x-2y+3z-9=0$; в) $\dfrac{30}{\sqrt{14}}$.

26. $A^{-1}=\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{2}\\ 1 & -\frac{3}{2}\end{pmatrix}$. | **27.** $\ln|1+xy|+\dfrac{x^2}{2}+\arcsin y=C$.

28. $y=C_1\sin x+C_2\cos x+x^2-2$.

29. $\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=C_1e^t\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}+C_2e^{2t}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+C_3e^{3t}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$.

Вариант 3

1. 4. | **2.** $e^{1/3}$. | **3.** $y'=(\operatorname{tg}x)^x\left(\ln\operatorname{tg}x+\dfrac{x}{\sin x\cos x}\right)$.

4. $y^{(n)}=(3x+1)\cdot 2^{n-1}\sin\left(2x+\frac{\pi n}{2}\right)+$
$+3n\cdot 2^{n-2}\sin\left(2x+(n-1)\frac{\pi}{2}\right)$.

5. $1+x+3x^2+\frac{10}{3}x^3+o(x^3)$.

6. Асимптоты: $y=x+1$ $(x\to+\infty)$, $y=-x-1$ $(x\to-\infty)$; график симметричен относительно прямой $x=-1$.

7. Асимптоты: $x=0$, $y=x-3$, $x=-2$ — точка максимума, $y(-2)=-\frac{27}{4}$;
$x=1$ — точка перегиба; $y'=\dfrac{(x-1)^2(x+2)}{x^3}$, $y''=\dfrac{6(x-1)}{x^4}$.

8. $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x^2+C$. | **9.** $\frac{3}{2}\ln(x^2+x+1)+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$.

10. $F'(x)=2xe^{-x^8}-e^{-x^4}$. | **11.** -1. | **12.** π. | **13.** $\alpha>-4$.

14. $\alpha>\frac{3}{2}$. **15.** $y=\ln 4-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n}{n4^n}x^n$, $R=\frac{4}{3}$.

16. а) Нет; б) Да. **17.** а) Нет; б) Да.

18. $\frac{1}{8}$. | **19.** $-\frac{8}{3}$ | **20.** $\frac{64}{3}\pi$. | **21.** 0.

22. а) $-\frac{\pi}{4}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2}{\pi(2n+1)^2}\cos(2n+1)x$;

б) $S(x)=\begin{cases} f(x), & x\in(-\pi,\pi),\\ -\frac{\pi}{2}, & x=\pm\pi;\end{cases}$ в) да; г) нет.

23. $\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{-6}=\frac{z-3}{3}$. **24.** Эллиптический параболоид.

25. а) $\arccos\frac{8}{\sqrt{78}}$; б) $x-2y+3z-6=0$; в) $\frac{30}{\sqrt{14}}$.

26. $A^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{3}{2}\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. | **27.** $\frac{x}{y}-\cos x+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{y}{2}=C$.

28. $y=C_1e^{2x}+C_2e^{-2x}-\frac{1}{3}e^x$.

29. $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=C_1e^t\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}+C_2e^{2t}\begin{pmatrix}1\\-2\\-3\end{pmatrix}+C_3e^{5t}\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}$.

Вариант 4

1. 4. | **2.** $e^{-1/2}$. | **3.** $y'=x^{\sin x}\left(\ln x\cdot\cos x+\frac{\sin x}{x}\right)$.

4. $y^{(n)}=-(2x+1)\,\frac{6^n}{2}\cos\left(6x+\frac{\pi n}{2}\right)-$
$-n\cdot 6^{n-1}\cos\left(6x+(n-1)\,\frac{\pi}{2}\right)$.

5. $-x+\frac{x^2}{2}+\frac{2}{3}x^3+o(x^3)$.

6. Асимптоты: $y=x-1$ ($x\to+\infty$), $y=1-x$ ($x\to-\infty$); график симметричен относительно прямой $x=1$.

7. Асимптоты: $x=0$, $y=-x-3$, $x=2$ — точка максимума, $y(2)=-\frac{27}{4}$; $x=-1$ — точка перегиба;

$$y'=-\frac{(x+1)^2(x-2)}{x^3},\quad y''=-\frac{6(x+1)}{x^4}.$$

8. $\frac{1}{8}\ln(1+2x^4)+C$. | **9.** $\frac{1}{2}\ln(x^2-x+1)-\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C$.

10. $F'(x)=-\ln^2(1-x)-3x^2\ln^2(1+x^3)$. | **11.** $\ln 2-\frac{1}{2}$.

12. 0. | **13.** $\alpha<\frac{3}{2}$. | **14.** $\alpha>1$. | **15.** $y=-\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{3^{n+1}}x^n$, $R=\frac{3}{2}$.

16. а) Нет; б) Да. **17.** а) Да; б) Нет.

18. $-\frac{1}{8}$. **19.** $\frac{32}{5}$ **20.** $\frac{8}{3}\,\pi$. **21.** 0.

22. а) $\frac{\pi}{4} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx - \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2}{\pi(2n+1)^2} \cos(2n+1)x$;

б) $S(x) = \begin{cases} f(x), & x \in (-\pi, \pi), \\ \frac{\pi}{2}\,, & x = \pm\pi; \end{cases}$ в) нет; г) да.

23. $\frac{x-1}{4} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-3}{5}$.

24. Однополостный гиперболоид.

25. а) $\arccos \frac{3}{\sqrt{65}}$; б) $x - 2y + 3z + 6 = 0$; в) $\frac{30}{\sqrt{14}}$.

26. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

27. $\operatorname{arctg}(xy) + \frac{1}{2}\,x + \frac{\sin 2x}{4} + \sqrt{4+y^2} = C$.

28. $y = C_1 \sin 4x + C_2 \cos 4x + \frac{x}{16} + \frac{1}{17}\,e^x$.

29. $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = C_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3 e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Условия задач. 2002/2003 учебный год

Вариант 1

1. Найти y', если $y = (\operatorname{sh} x)^{\operatorname{tg} x}$.

2. Вычислить пределы

а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\cos x}{e^{2x^2} - \operatorname{ch} x}$;

б) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(x \sin\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}$.

3. При каких n существует $f^{(n)}(0)$, если $f(x) = e^{|x|} - \operatorname{tg}|x|$?

4. Пусть функция $f(x)$ непрерывна и ограничена на $[0; +\infty)$, пусть $f(x) \neq 0$ $\forall x \geqslant 0$. Верно ли, что

а) существует $\max\limits_{x\in[0;+\infty)} f(x)$;

б) $f(x)$ не меняет знак на $[0; +\infty)$;

в) существует $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$;

г) $f(x)$ равномерно непрерывна на $[0; +\infty)$?

5. а) Разложить в ряд Тейлора по степеням x функцию $f(x) = \operatorname{arctg}\dfrac{x^2}{4}$.

б) Найти радиус сходимости указанного ряда.

6. Для функции $f(x) = \dfrac{(x+1)^2}{x-1}$

а) найти асимптоты;

б) найти точки экстремума;

в) найти $f''(x)$ и точки перегиба;

г) построить график.

7. Найти интеграл $\displaystyle\int \frac{\sin x\, dx}{\sqrt{1+\cos^2 x}}$.

8. Вычислить интеграл $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{x\, dx}{x^2 + 2x + 5}$.

9. Найти все значения α, при которых сходятся интегралы

а) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin x^2}{x^\alpha}\, dx$;

б) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x^2}{x^\alpha}\, dx$.

10. Сходится ли ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{nx^2}{n^3+x^3}$ равномерно на множестве $(0;1)$?

11. Записать интеграл $\iint_G f(x,y)\,dx\,dy$ как повторный в порядке (r,φ), где $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, область G задана неравенствами $x^2+y^2-2y<0$, $x>y$.

12. Вычислить криволинейный интеграл

$$\oint_C (\cos y\,dx + x(1-\sin y)\,dy),$$

где C — окружность $x^2+y^2=1$, ориентированная по часовой стрелке.

13. Вычислить поверхностный интеграл 1 рода

$$\iint_\Sigma z\,dS,$$

где Σ — часть поверхности конуса $z^2=x^2+y^2$, $0<z<h$.

14. Вычислить поверхностный интеграл 2 рода

$$\iint_\Sigma z^2(x+1)\,dy\,dz,$$

где Σ — внутренняя сторона сферы $x^2+y^2+z^2=R^2$.

15. а) Построить график суммы ряда Фурье функции $f(x)=x^2$, $x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ по системе $\{\sin(2k+1)x\}_{k=0}^{\infty}$.

б) Сходится ли этот ряд равномерно на $[-\pi;\pi]$?

в) Полна ли система $\{\sin(2k+1)x\}_{k=0}^{\infty}$ в пространстве $C\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$?

16. Найти угол между прямой $\dfrac{x-1}{2}=y-2=\dfrac{z+5}{3}$ и плоскостью $2x-3y+z=7$.

17. Написать уравнение, задающее множество точек, равноудаленных от прямых $l_1:\ x=0,\ z=1$ и $l_2:\ y=0,\ z=-1$. Определить тип поверхности второго порядка, образованной этими точками.

18. Пусть $A=\begin{Vmatrix} 3/5 & 4/5 \\ 4/5 & -3/5 \end{Vmatrix}$.

а) Найти A^{-1}.

б) Является ли преобразование, заданное матрицей A в ОНБ,

1) самосопряжённым, 2) ортогональным?

в) Найти собственные числа и собственные векторы этого преобразования.

г) Найти общее решение линейной однородной системы дифференциальных уравнений

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}, \quad \text{где} \quad \vec{x}(t) = \begin{Vmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Vmatrix}.$$

19. Найти общее решение уравнения

а) $xy' - 2y = x^2$;

б) $y'' + y = \sin x$.

20. Для вариационной задачи

$$\int_1^2 \left((y')^2 + \frac{2y^2}{x^2} \right) dx, \quad y(1) = 2, \quad y(2) = 1$$

а) написать уравнение Эйлера; б) найти экстремаль.

21. Найти вероятности событий A и B, если справедлива система

$$\begin{cases} P(A + \overline{B}) = 2/3, \\ P(\overline{A} + B) = 5/6, \\ P(A + B) = 2/3. \end{cases}$$

22. Найти $\mathrm{M}\,\xi^2$, если характеристическая функция

$$\varphi_\xi(t) = e^{-it-2t^2}.$$

Вариант 2

1. Найти y', если $y = (\cos x)^{\operatorname{arctg} x}$.

2. Вычислить пределы

а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sh} 2x - \sin 2x}{\operatorname{tg} x - \operatorname{arctg} x}$;

б) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(x \operatorname{tg} \dfrac{1}{x} \right)^{x^2}$.

3. При каких n существует $f^{(n)}(0)$, если

$$f(x) = |x|^3 e^x - \sin^3|x|?$$

4. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $[0;+\infty)$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, пусть $f(x) \neq 0\ \forall x \geqslant 0$. Верно ли, что

а) существует $\max\limits_{x\in(0;1)} f(x)$;

б) существует число $x_0 > 0$ такое, что $f(x)$ монотонна на $(x_0;+\infty)$;

в) функция $\dfrac{1}{f(x)}$ ограничена на $[0;+\infty)$;

г) функция $\dfrac{1}{f(x)}$ равномерно непрерывна на $[0;+\infty)$?

5. Разложить в ряд Тейлора по степеням x функцию $f(x) = \ln(9+x^2)$ и найти радиус сходимости ряда.

6. Для функции $f(x) = \dfrac{(x-1)^2}{x+1}$

а) найти асимптоты;

б) найти точки экстремума;

в) найти $f''(x)$ и точки перегиба;

г) построить график.

7. Найти интеграл $\int \dfrac{\operatorname{ch} x\, dx}{\sqrt{1-\operatorname{sh}^2 x}}$.

8. Вычислить интеграл $\int_{-1/2}^{0} \dfrac{x\,dx}{2x^2+2x+1}$.

9. Найти все значения α, при которых сходятся интегралы

а) $\int_0^1 x^\alpha \sin\frac{1}{x}\ dx$;

б) $\int_1^{+\infty} x^\alpha \sin\frac{1}{x}\ dx$.

10. Сходится ли ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n+x^4}{n^4+x^4}$ равномерно на множестве $(1;+\infty)$?

11. Записать интеграл $\iint_G f(x,y)\,dx\,dy$ как повторный в порядке (φ, r), где $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, область G задана неравенствами $x^2+y^2-2x < 4$, $x+y > 0$.

12. Вычислить криволинейный интеграл

$$\oint_C ((y+e^{-y})\,dx - xe^{-y}\,dy),$$

где C — окружность $x^2+y^2=1$, ориентированная по часовой стрелке.

13. Вычислить поверхностный интеграл 1 рода

$$\iint_\Sigma \frac{z}{\sqrt{1+2z}}\,dS,$$

где Σ — часть поверхности эллиптического параболоида $2z=x^2+y^2$, $x^2+y^2<R^2$.

14. Вычислить поверхностный интеграл 2 рода

$$\iint_\Sigma (3x^2y+y^3)\,dz\,dx,$$

где Σ — внешняя сторона сферы $x^2+y^2+z^2=R^2$.

15. а) Построить график суммы ряда Фурье функции $f(x)=\frac{\pi^2}{4}-x^2$, $x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ по системе $\{\sin 2kx\}_{k=1}^{\infty}$.

б) Сходится ли этот ряд равномерно на $[-\pi;\pi]$?

в) Полна ли система $\{\sin 2kx\}_{k=1}^{\infty}$ в пространстве $C\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$?

16. Найти угол между прямой $x-2=\frac{y-5}{4}=\frac{z-1}{2}$ и плоскостью $x-4y+2z=1$.

17. Написать уравнение, задающее множество точек, равноудаленных от плоскости $z=0$ и точки $(0;0;1)$. Определить тип поверхности второго порядка, образованной этими точками.

18. Пусть $A=\begin{Vmatrix} 3/5 & 4/5 \\ -4/5 & 3/5 \end{Vmatrix}$.

а) Найти A^{-1}.

б) Является ли преобразование, заданное матрицей A в ОНБ,

1) самосопряжённым, 2) ортогональным?

в) Найти собственные числа и собственные векторы этого преобразования.

г) Найти общее решение линейной однородной системы дифференциальных уравнений

$$\frac{d\vec{x}}{dt}=A\vec{x},\quad \text{где}\quad \vec{x}(t)=\begin{Vmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Vmatrix}.$$

19. Найти общее решение уравнения

а) $y' - 2xy = xe^{x^2}$;

б) $y'' - 3y' + 2y = e^x$.

20. Для вариационной задачи

$$\int_1^2 \left(\frac{(y')^2}{x^2} - \frac{2y^2}{x^4}\right) dx, \quad y(1) = 1, \quad y(2) = 4$$

а) написать уравнение Эйлера; б) найти экстремаль.

21. Найти вероятности событий A и B, если справедлива система

$$\begin{cases} P(\overline{A} + \overline{B}) = 3/4, \\ P(\overline{A} + B) = 3/4, \\ P(\overline{A}\ \overline{B}) = 1/4. \end{cases}$$

22. Найти $\mathrm{M}\,\xi^2$, если характеристическая функция

$$\varphi_\xi(t) = e^{it - t^2/2}.$$

Вариант 3

1. Найти y', если $y = (\ln x)^{\arcsin x}$.

2. Вычислить пределы

а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arctg} 2x - \operatorname{sh} 2x}{e^{2x^3} - \cos x^2}$;

б) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right)^x$.

3. При каких n существует $f^{(n)}(0)$, если

$$f(x) = \cos|x| + \sin^5|x|?$$

4. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $[0; +\infty)$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, пусть $f(x) \neq 0\ \forall x \geqslant 0.$ Верно ли, что

а) существует $\max\limits_{x\in[0;+\infty)} f(x)$;

б) существует число $x_0 > 0$ такое, что $f(x)$ монотонна на $[0; x_0]$;

в) функция $\dfrac{1}{f(x)}$ не ограничена на $[0; +\infty)$;

г) функция $\dfrac{1}{f(x)}$ равномерно непрерывна на $(0; 1)$?

5. Разложить в ряд Тейлора по степеням x функцию $f(x) = \int_0^x \operatorname{sh} t^2\, dt$ и найти радиус сходимости ряда.

6. Для функции $f(x) = \dfrac{(x-2)^2}{x-1}$

а) найти асимптоты;

б) найти точки экстремума;

в) найти $f''(x)$ и точки перегиба;

г) построить график.

7. Найти интеграл $\int \dfrac{dx}{x\cos^2(\ln x)}$.

8. Вычислить интеграл $\int_{-1}^0 \dfrac{(x+1)\,dx}{x^2+4x+5}$.

9. Найти все значения α, при которых сходятся интегралы

а) $\int_{-\infty}^0 e^{\alpha x} \sin e^x\, dx$;

б) $\int_0^{+\infty} e^{\alpha x} \sin e^x\, dx$.

10. Сходится ли ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{xn}{x^3n^3+1}$ равномерно на множестве $(0;1)$?

11. Записать интеграл $\iint_G f(x,y)\,dx\,dy$ как повторный в порядке (φ, r), где $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, область G задана неравенствами $x^2+y^2-2y<0$, $x^2+y^2>2$.

12. Вычислить криволинейный интеграл

$$\oint_C \left((y + \operatorname{arctg} y)\,dx + \frac{x\,dy}{1+y^2} \right),$$

где C — окружность $x^2+y^2=1$, ориентированная против часовой стрелки.

13. Вычислить поверхностный интеграл 1 рода

$$\iint_\Sigma \sqrt{1+x^2+y^2}\,dS,$$

где Σ — часть поверхности гиперболического параболоида $z = xy$, $x^2+y^2<R^2$.

14. Вычислить поверхностный интеграл 2 рода

$$\iint_\Sigma (x^2+z^3)\,dx\,dy,$$

где Σ — внешняя сторона сферы
$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

15. а) Построить график суммы ряда Фурье функции $f(x) = \frac{\pi^2}{4} - x^2$, $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ по системе $\{\cos(2k+1)x\}_{k=0}^{\infty}$.

б) Сходится ли этот ряд равномерно на $[-\pi; \pi]$?

в) Полна ли система $\{\cos(2k+1)x\}_{k=0}^{\infty}$ в пространстве $C\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$?

16. Найти угол между прямой $\frac{x-4}{3} = \frac{y-3}{4} = z+1$ и плоскостью $4x - 3y - z = 5$.

17. Написать уравнение, задающее множество точек $M(x; y; z)$ таких, что расстояние от точки M до плоскости $z = 0$ в два раза больше расстояния от M до точки $(0; 0; 1)$. Определить тип поверхности второго порядка, образованной этими точками.

18. Пусть $A = \begin{Vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -3 \end{Vmatrix}$.

а) Найти A^{-1}.

б) Является ли преобразование, заданное матрицей A в ОНБ,
1) самосопряжённым, 2) ортогональным?

в) Найти собственные числа и собственные векторы этого преобразования.

г) Найти общее решение линейной однородной системы дифференциальных уравнений

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}, \quad \text{где} \quad \vec{x}(t) = \begin{Vmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Vmatrix}.$$

19. Найти общее решение уравнения
а) $(x^2+1)y' - 2xy = x^2 + 1$; б) $y'' + 2y' + y = e^{-x}$.

20. Для вариационной задачи

$$\int_1^2 \left(x(y')^2 + \frac{4y^2}{x} \right) dx, \quad y(1) = 4, \quad y(2) = 1$$

а) написать уравнение Эйлера; б) найти экстремаль.

21. Найти вероятности событий A и B, если справедлива система

$$\begin{cases} P(\overline{A}+B)=2/3, \\ P(\overline{A}\ \overline{B})=1/6, \\ P(A+\overline{B})=5/6. \end{cases}$$

22. Найти $\mathrm{M}\,\xi^2$, если характеристическая функция

$$\varphi_\xi(t)=e^{-2it-2t^2}.$$

Ответы и решения. 2002/2003 г.

Вариант 1

1. $y' = \left(e^{\operatorname{tg} x \ \ln \operatorname{sh} x}\right)' = (\operatorname{tg} x \ \ln \operatorname{sh} x)' \cdot e^{\operatorname{tg} x \ \ln \operatorname{sh} x} =$

$$= \left(\operatorname{cth} x \ \operatorname{tg} x + \frac{\ln \operatorname{sh} x}{\cos^2 x}\right)(\operatorname{sh} x)^{\operatorname{tg} x}.$$

2. а) При $x \to 0$ имеем

$$\frac{\ln \cos x}{e^{2x^2} - \operatorname{ch} x} = \frac{\ln\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)}{1 + 2x^2 + o(x^2) - \left(1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)} =$$

$$= \frac{-\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{\frac{3}{2}x^2 + o(x^2)} = \frac{-\frac{1}{2} + o(1)}{\frac{3}{2} + o(1)} \to -\frac{1}{3}.$$

Поэтому $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln \cos x}{e^{2x^2} - \operatorname{ch} x} = -\frac{1}{3}$;

б) $\left(x \sin \frac{1}{x}\right)^{x^2} = \exp\left(x^2 \ln\left(x \sin \frac{1}{x}\right)\right)$; при $x \to \infty$ имеем:

$$x^2 \ln\left(x \sin \frac{1}{x}\right) = x^2 \ln\left(x\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{6x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)\right) =$$

$$= x^2 \ln\left(1 - \frac{1}{6x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) = x^2\left(-\frac{1}{6x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \to -\frac{1}{6}.$$

Поэтому $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x \sin \frac{1}{x}\right)^{x^2} = e^{-1/6}$.

3. При $x \to 0$ имеем

$$f(x) = 1 + |x| + \frac{x^2}{2} + \frac{|x|^3}{6} + o(x^3) - \left(|x| + \frac{|x|^3}{3} + o(x^3)\right) =$$

$$= 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{|x|^3}{6} + o(x^3).$$

Отсюда в силу единственности разложения по формуле Тейлора получаем следующие значения односторонних производных: $f'_{\pm}(0) = 0$, $f''_{\pm}(0) = 1$, $f'''_{+}(0) = -1$, $f'''_{-}(0) = 1$. Так как $f'_{+}(0) = f'_{-}(0)$, $f''_{+}(0) = f''_{-}(0)$, $f'''_{+}(0) \neq f'''_{-}(0)$, то $f'(0)$ и $f''(0)$ существуют, а $f'''(0)$ не существует. Итак, $f^{(n)}(0)$ существует при $n < 3$.

4. а) Нет. Например, для $f(x) = 1 + x$.
б) Да. По теореме о промежуточном значении.
в) Нет. Например, для $f(x) = 1 + \sin^2 x$.
г) Нет. Например, для $f(x) = 1 + x^2$.

5. Поскольку $(\operatorname{arctg} t)' = \dfrac{1}{1+t^2} = \sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k t^{2k}$, то $\operatorname{arctg} t = \operatorname{arctg} 0 + \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^k t^{2k+1}}{2k+1}$. Подставляя $t = \dfrac{x^2}{4}$, получаем $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^k x^{4k+2}}{4^{2k+1}(2k+1)}$. Так как $\dfrac{1}{R_{\text{сх}}} = \lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[4k+2]{\left|\dfrac{(-1)^k}{4^{2k+1}(2k+1)}\right|} = \dfrac{1}{2}$, то $R_{\text{сх}} = 2$.

6. а) Так как $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \infty$, то $x = 1$ — вертикальная асимптота. Поскольку $k = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$, $b = \lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x) - kx) = 3$, то $y = kx + b = x + 3$ — наклонная асимптота при $x \to \pm\infty$.
б) $f'(x) = \dfrac{(x+1)(x-3)}{(x-1)^2}$;

x	$(-\infty; -1)$	$(-1; 1)$	$(1; 3)$	$(3; +\infty)$
$f'(x)$	$+$	$-$	$-$	$+$

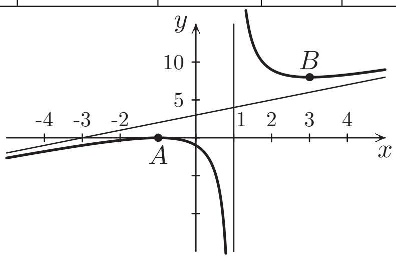

Рис. 3

в) $f''(x) = \dfrac{8}{(x-1)^3}$;

г) $A(-1;0)$ — max; $B(3;8)$ — min; перегибов нет.

7. $\displaystyle\int \frac{\sin x\,dx}{\sqrt{1+\cos^2 x}} \overset{t=\cos x}{=} -\int \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = -\ln\left(t+\sqrt{1+t^2}\right)+C =$
$= -\ln(\cos x + \sqrt{1+\cos^2 x}) + C.$

8. $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{x\,dx}{x^2+2x+5} = \int_{-1}^{0} \frac{(x+1)dx}{(x+1)^2+4} - \int_{-1}^{0} \frac{dx}{(x+1)^2+4} =$
$\displaystyle = \frac{1}{2}\ln\left((x+1)^2+4\right)\Big|_{-1}^{0} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2}\Big|_{-1}^{0} = \frac{1}{2}\ln\frac{5}{4} -$
$\displaystyle - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{1}{2}.$

9. а) Так как $\dfrac{\sin x^2}{x^\alpha} \sim \dfrac{1}{x^{\alpha-2}}$ при $x \to 0$, то интеграл сходится при $\alpha - 2 < 1$, т.е. при $\alpha < 3$.

б) Поскольку $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x^2}{x^\alpha}\,dx = \int_1^{+\infty} \frac{d\sin x^2}{2x^{\alpha+1}}$, то интеграл сходится по признаку Дирихле при $\alpha + 1 > 0$, т.е. при $\alpha > -1$. При $\alpha \leqslant -1$ интеграл расходится по критерию Коши.

10. Так как $\dfrac{nx^2}{n^3+x^3} \leqslant \dfrac{n}{n^3+x^3} \leqslant \dfrac{1}{n^2}$ при $x \in (0;1)$ и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ сходится, то в силу признака Вейерштрасса исходный ряд сходится равномерно на $(0;1)$.

11. $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}} r\,dr \int_{\arcsin(r/2)}^{\pi/4} f\,d\varphi.$

12. Пусть G — единичный круг. Контур C лежит на границе G и ориентирован отрицательно относительно G. В силу формулы Грина получаем

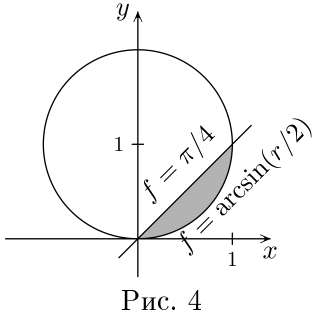

Рис. 4

$$\oint_C \cos y\,dx + x(1-\sin y)\,dy =$$
$$= \oint_{\partial G^-} (d(x\cos y) + x\,dy) =$$
$$= \oint_{\partial G^-} x\,dy = -\iint_G dx\,dy = -\mu(G) = -\pi.$$

13. В качестве параметров на поверхности Σ используем полярные координаты:

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad z = r; \qquad r \in [0; h], \quad \varphi \in [0; 2\pi].$$

Тогда

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 = 2,$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2 = r^2,$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial y}{\partial \varphi} + \frac{\partial z}{\partial r}\frac{\partial z}{\partial \varphi} = 0,$$

$$\iint\limits_{\Sigma} z\,dS = \iint\limits_{\substack{r\in[0;h],\\ \varphi\in[0;2\pi]}} r\sqrt{EG - F^2}\,dr\,d\varphi = \int\limits_0^h \sqrt{2}r^2\,dr \int\limits_0^{2\pi} d\varphi = \frac{2\sqrt{2}\pi}{3}\,h^3.$$

14. Разобъём сферу Σ на две полусферы:

$$\Sigma^+ = \{(x, y, z) \in \Sigma : x > 0\}, \qquad \Sigma^- = \{(x, y, z) \in \Sigma : x < 0\}.$$

Согласно условию задачи полусферы Σ^+, Σ^- ориентированы полем внутренних нормалей. Пусть $G = \{(y, z) :\ y^2 + z^2 \leqslant R^2\}$ — проекция полусфер Σ^+, Σ^- на плоскость (x, y). Поскольку на полусфере Σ^+ внутренние нормали образуют тупой угол с осью Ox и $x = \sqrt{R^2 - y^2 - z^2}$, а на полусфере Σ^- внутренние нормали образуют острый угол с осью Ox и $x = -\sqrt{R^2 - y^2 - z^2}$, то

$$\iint_{\Sigma^+} z^2(x+1)\,dy\,dz = -\iint_G z^2\left(1 + \sqrt{R^2 - y^2 - z^2}\right) dydz,$$

$$\iint_{\Sigma^-} z^2(x+1)\,dy\,dz = \iint_G z^2\left(1 - \sqrt{R^2 - y^2 - z^2}\right) dydz.$$

Следовательно, искомый поверхностный интеграл

$$\Phi = \iint_{\Sigma^+} z^2(x+1)\,dy\,dz + \iint_{\Sigma^-} z^2(x+1)\,dy\,dz =$$

$$= -2\iint_G z^2\sqrt{R^2 - y^2 - z^2}\,dy\,dz.$$

Переходя к полярным координатам $y = r\cos\varphi$, $z = r\sin\varphi$, получаем

$$\Phi = -2 \iint\limits_{\substack{r\in[0;R],\\ \varphi\in[0;2\pi]}} r^2\sin^2\varphi\sqrt{R^2-r^2}\; r\,dr\,d\varphi =$$

$$= -2\int\limits_0^R r^2\sqrt{R^2-r^2}\; r\,dr \int\limits_0^{2\pi}\sin^2\varphi\,d\varphi \overset{t=R^2-r^2}{=} \int\limits_{R^2}^{0}(R^2-t)\sqrt{t}\,dt\cdot\pi =$$

$$= \pi\left(\frac{2}{3}R^2t^{3/2} - \frac{2}{5}t^{5/2}\right)\Bigg|_{R^2}^{0} = -\frac{4\pi}{15}R^5.$$

15. а) Продолжим график функции $f(x) = x^2$, $x \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ симметрично относительно прямой $x = \frac{\pi}{2}$, нечётно и 2π-периодично. Ряд Фурье продолженной функции будет состоять только из $\sin(2k+1)x$. Сумма этого ряда будет совпадать с продолженной функцией.

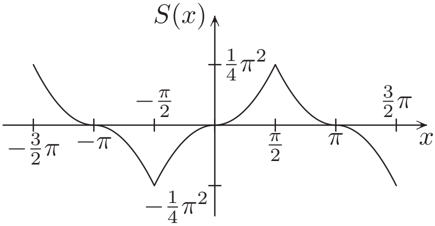

Рис. 5

б) Так как продолженная функция непрерывна и 2π-периодична, а её производная кусочно-непрерывна на периоде, то ряд сходится равномерно на $[-\pi;\pi]$.

в) Рассмотрим функцию $f \in C\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ такую, что $f(0) \neq 0$. Так как линейная комбинация функций $\sin(2k+1)x$ равна нулю при $x = 0$, то функцию f нельзя приблизить линейной комбинацией функций $\sin(2k+1)x$ с точностью $\varepsilon = \frac{|f(0)|}{2}$ относительно нормы $C\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$. Поэтому система $\{\sin(2k+1)x\}_{k=0}^{\infty}$ не полна в пространстве $C\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

16. Направляющий вектор прямой $\vec{a} = (2, 1, 3)$, нормальный вектор плоскости $\vec{n} = (2, -3, 1)$. Поэтому синус угла между прямой и плоскостью равен косинусу угла между векторами $\vec{a}$ и $\vec{n}$, т.е. $\dfrac{(\vec{a}, \vec{n})}{|\vec{a}|\ |\vec{n}|} = \dfrac{4}{14} = \dfrac{2}{7}$. Следовательно, искомый угол равен $\arcsin\dfrac{2}{7}$.

17. Расстояние от точки (x, y, z) до прямой l_1 равно

$$\sqrt{x^2 + (z-1)^2};$$

расстояние от точки (x, y, z) до прямой l_2 равно

$$\sqrt{y^2 + (z+1)^2}.$$

Поэтому искомое уравнение имеет вид $x^2 + (z-1)^2 = y^2 + (z+1)^2$, т.е. $4z = x^2 - y^2$. Это уравнение задает гиперболический параболоид.

18. Используя формулу вычисления обратной к матрице $A = \begin{Vmatrix} a & b \\ c & d \end{Vmatrix}$, имеем

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{Vmatrix} d & -b \\ -c & a \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 3/5 & 4/5 \\ 4/5 & -3/5 \end{Vmatrix}.$$

Так как в ОНБ матрица преобразования симметрическая, то преобразование самосопряжённое. Поскольку $A^{-1} = A^T$, то матрица ортогональна и преобразование, заданное в ОНБ этой матрицей, ортогонально. Собственные числа найдем из характеристического уравнения $|A - \lambda E| = 0$, собственные векторы — из условий $(A - \lambda_i E)h_i = \vec{0}$, $h_i \neq \vec{0}$:

$$\lambda_1 = -1, \quad h_1 = \begin{Vmatrix} 1 \\ -2 \end{Vmatrix}; \qquad \lambda_2 = 1, \quad h_2 = \begin{Vmatrix} 2 \\ 1 \end{Vmatrix}.$$

Общее решение системы дифференциальных уравнений имеет вид: $\vec{x}(t) = C_1 h_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 h_2 e^{\lambda_2 t} = C_1 e^{-t} \left\| \begin{matrix} 1 \\ -2 \end{matrix} \right\| + C_2 e^{t} \left\| \begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix} \right\|$.

19. а) Так как данное уравнение является уравнением Эйлера, то сделаем замену $x = \pm e^t$. Уравнение примет вид $y'_t - 2y = e^{2t}$. Характеристическое уравнение имеет один корень $\lambda = 1$. Поскольку правая часть уравнения имеет вид $e^{\mu t}$, где $\mu = 2$ является корнем характеристического уравнения кратности 1, то имеет место резонанс, и частное решение неоднородного уравнения следует искать в виде $y_{\text{част}} = ate^{2t}$. Подставляя его в дифференциальное уравнение, получаем $a = 1$. Поэтому $y = te^{2t} + y_{\text{одн}} = te^{2t} + Ce^{2t} = (\ln|x| + C)x^2$.

б) Характеристическое уравнение $\lambda^2 + 1 = 0$ имеет корни $\lambda = \pm 1$. Поэтому $y_{\text{одн}} = C_1 \sin x + C_2 \cos x$. Так как правая часть уравнения $\sin x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$ является линейной комбинацией функций $e^{\mu x}$, для которых $\mu = \pm 1$ являются корнями характеристического уравнения кратности 1, то частное решение неоднородного уравнения будем искать в виде $y_{\text{част}} = x(a\cos x + b\sin x)$. Подставляя его в дифференциальное уравнение, получаем $a = -\frac{1}{2}$, $b = 0$. Следовательно, $y = y_{\text{част}} + y_{\text{одн}} = -\frac{1}{2}\, x\cos x + C_1 \sin x + C_2 \cos x$.

20. а) Подставляя в уравнение Эйлера $F'_y - \frac{d}{dx} F'_{y'} = 0$ функцию $F = (y')^2 + \dfrac{2y^2}{x^2}$, получаем уравнение $\dfrac{4y}{x^2} - 2y'' = 0$, т.е. $x^2 y'' - 2y = 0$.

б) Выполняя замену $x = e^t$, получаем дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами, для которого характеристическое уравнение $\lambda(1-\lambda) - 2 = 0$ имеет корни $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 2$. Поэтому $y = C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t} = \dfrac{C_1}{x} +$

$+ C_2 x^2$. Используя заданные краевые условия, находим $C_1 = 2$, $C_2 = 0$. Поэтому допустимая экстремаль $y_0 = \dfrac{2}{x}$.

21. Рассмотрим полную систему несовместных событий

$$C_1 = A \cdot \overline{B}, \quad C_2 = \overline{A} \cdot B, \quad C_3 = A \cdot B, \quad C_4 = \overline{A} \cdot \overline{B}.$$

Тогда $P(A+\overline{B}) = 1 - P(C_2)$, $P(\overline{A}+B) = 1 - P(C_1)$, $P(A+ + B) = 1 - P(C_4)$, $P(C_1) + P(C_2) + P(C_3) + P(C_4) = 1$. Отсюда и из условий задачи получаем $P(C_2) = \frac{1}{3}$, $P(C_1) = = \frac{1}{6}$, $P(C_4) = \frac{1}{3}$, $P(C_3) = \frac{1}{6}$. Следовательно, $P(A) = = P(C_1) + P(C_3) = \frac{1}{3}$, $P(B) = P(C_1) + P(C_3) = \frac{1}{2}$.

22. Раскладывая функцию $\varphi_\xi(t) = e^{-it-2t^2}$ по формуле Маклорена, получаем $\varphi_\xi(t) = 1 - it - \frac{5}{2}\,t^2 + o(t^2)$ при $t \to 0$. Отсюда и из формулы $\varphi_\xi(t) = 1 + it\,\mathrm{M}\,\xi - \dfrac{t^2}{2}\,\mathrm{M}\,\xi^2 + o(t^2)$ при $t \to 0$ в силу единственности разложения по формуле Тейлора получаем $\mathrm{M}\,\xi^2 = 5$.

Вариант 2

1. $y' = (\cos x)^{\operatorname{arctg} x} \left(-\operatorname{tg} x \ \operatorname{arctg} x + \dfrac{\ln \cos x}{1+x^2} \right)$.

2. а) 4; б) $e^{1/3}$. **3.** $n < 4$.

4. а) Нет; б) Нет; в) Да; г) Да.

5. $f(x) = \ln 9 + \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^k x^{2k+2}}{9^{k+1}(k+1)} = \ln 9 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{k+1} x^{2k}}{9^k k}$,

$R_{\text{сх}} = 3$.

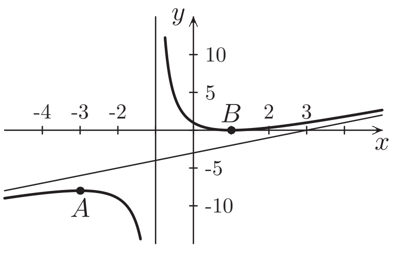

Рис. 6

6. а) $x = -1$,

б) $A(-3; -8)$ — max; $B(1; 0)$ — min;

в) $f''(x) = \dfrac{8}{(x+1)^3}$;

г) $y = x - 3$, график на рис. 6; перегибов нет.

7. $\arcsin(\operatorname{sh} x) + C$.

8. $\frac{\ln 2}{4} - \frac{\pi}{8}$.

9. а) $\alpha > -2$; б) $\alpha < 0$.

10. Нет.

11. $\int_{-\pi/4}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} fr\,dr$.

12. π.

13. $\frac{\pi}{4} R^4$.

14. $\frac{8\pi}{5} R^5$.

15. Ряд сходится неравномерно, система не полна. График на рис. 7

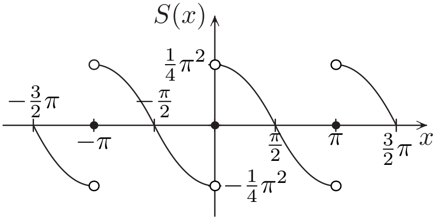

Рис. 7

16. $\arcsin \frac{11}{21}$.

17. $2z - 1 = x^2 + y^2$;
эллиптический параболоид.

18. $A^{-1} = \begin{Vmatrix} 3/5 & -4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{Vmatrix}$;

Преобразование ортогональное, не самосопряжённое.

$$\lambda_1 = \frac{3}{5} + i\,\frac{4}{5}\,, \quad h_1 = \begin{Vmatrix} i \\ 1 \end{Vmatrix}; \qquad \lambda_2 = \frac{3}{5} - i\,\frac{4}{5}\,, \quad h_1 = \begin{Vmatrix} -i \\ 1 \end{Vmatrix};$$

$$\vec{x}(t) = e^{3t/5}\left(C_1 \begin{Vmatrix} -\sin\frac{4}{5}\,t \\ \cos\frac{4}{5}\,t \end{Vmatrix} + C_2 \begin{Vmatrix} \cos\frac{4}{5}\,t \\ \sin\frac{4}{5}\,t \end{Vmatrix}\right).$$

19. а) $y = e^{x^2}(x^2/2 + C)$; б) $y = -xe^x + C_1e^x + C_2e^{2x}$.

20. а) $x^2y'' - 2xy' + 2y = 0$; б) $y_0 = x^2$.

21. $P(A) = 1/2$, $P(B) = 1/2$.

22. $\mathrm{M}\,\xi^2 = 2$.

Вариант 3

1. $y' = (\ln x)^{\arcsin x}\left(\dfrac{\arcsin x}{x\ln x} + \dfrac{\ln(\ln x)}{\sqrt{1-x^2}}\right).$

2. а) -4; б) $e^{-1/2}$. **3.** $n < 5$.

4. а) Нет; б) Нет; в) Да; г) Да.

5. $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{x^{4k+3}}{(2k+1)!(4k+3)}$, $R_{\text{сх}} = +\infty$.

6. а) $x = 1$,

б) $A(0;-4)$ — max; $B(2;0)$ — min;

в) $f''(x) = \dfrac{2}{(x-1)^3}$;

г) $y = x - 3$; перегибов нет. График на рис. 6.

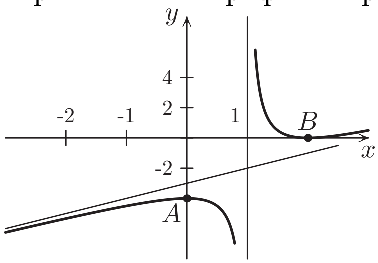

Рис. 8

7. $\operatorname{tg}(\ln x) + C$. **8.** $\frac{1}{2}\ln\frac{5}{2} - \operatorname{arctg} 2 + \frac{\pi}{4}$.

9. а) $\alpha > -1$; б) $\alpha < 1$; **10.** Нет.

11. $\int_{\pi/4}^{3\pi/4} d\varphi \int_{\sqrt{2}}^{2\sin\varphi} fr\,dr$; **12.** $-\pi$.

13. $\pi\left(R^2 + \dfrac{R^4}{2}\right)$. **14.** $\frac{4\pi}{5} R^5$.

15. Ряд сходится равномерно, система не полна.

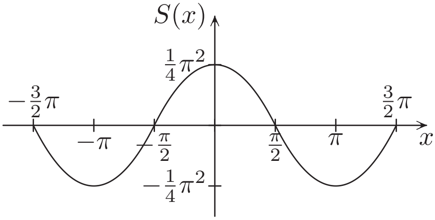

Рис. 9

16. $\arcsin \frac{1}{26}$.

17. $4x^2 + 4y^2 + 3(z - 4/3)^2 = 4/3$; эллипсоид.

18. $A^{-1} = \begin{Vmatrix} 3/4 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{Vmatrix}$;

Преобразование самосопряжённое, не ортогональное.

$$\lambda_1 = -4, \quad h_3 = \begin{Vmatrix} 1 \\ -2 \end{Vmatrix}; \qquad \lambda_2 = 1, \quad h_2 = \begin{Vmatrix} 2 \\ 1 \end{Vmatrix};$$

$$\vec{x}(t) = C_1 e^{-4t} \begin{Vmatrix} 1 \\ -2 \end{Vmatrix} + C_2 e^t \begin{Vmatrix} 2 \\ 1 \end{Vmatrix}.$$

19. а) $y = (x^2 + 1)(\operatorname{arctg} x + C)$; б) $y = \frac{x^2}{2} e^{-x} + (C_1 + C_2 x)e^{-x}$.

20. а) $x^2 y'' + xy' - 4y = 0$; б) $y_0 = \frac{4}{x^2}$.

21. $P(A) = 2/3$, $P(B) = 1/2$.

22. $\mathrm{M}\,\xi^2 = 8$.

Условия задач. 2003/2004 учебный год

Вариант 1

1. Функция $f(x)$ вещественной переменной x задана степенным рядом $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$. а) Найти множество точек, в которых ряд сходится. б) Вычислить $f'(1/3)$ и $f(1/3)$.

2. При каких n существует $f^{(n)}(0)$, где

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \geqslant 0, \\ \operatorname{ch} x - x^2, & x < 0. \end{cases}$$

3. Вычислить пределы

а) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^3} \left(\int_0^x e^{t^2}\, dt - x \right)$,

б) $\lim\limits_{x \to 0} (1+x)^{\frac{x^2}{\operatorname{arctg} x - x}}$.

4. Верно ли, что условию

$$\exists L > 0 \quad \forall x_1, x_2 \in [0, +\infty) \quad |f(x_1) - f(x_2)| \leqslant L \cdot |x_1 - x_2|$$

удовлетворяет функция

а) $f(x) = \sqrt{x}$,

б) $f(x) = e^{\sin x}$?

5. Функцию $f(x) = \frac{1}{x}$ разложить в ряд Тейлора по степеням $(x-2)$ и найти радиус сходимости полученного ряда.

6. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $u = x + 2y$ на множестве $x^2 + y^2 = 1$, а также точки, в которых эти значения достигаются.

7. Найти интеграл $\int \frac{x\, dx}{1 - \cos x}$.

8. Найти интеграл $\int_0^1 \frac{x\, dx}{x^2 - 2x + 2}$.

9. При каких $\alpha \in \mathbb{R}$ сходится интеграл

а) $\int_0^{1/2} \frac{\sin x\, dx}{x^\alpha \ln^2 x}$,

б) $\int_2^{+\infty} \frac{\sin x\, dx}{x^\alpha \ln^2 x}$.

10. Сходится ли ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{e^{-k^2x}}{kx}$ равномерно на множестве $(0,1)$?

11. В выражении $(\cos\varphi+\sin\varphi)\,\dfrac{\partial z}{\partial r}+\dfrac{1}{r}\,(\cos\varphi-\sin\varphi)\,\dfrac{\partial z}{\partial\varphi}$ перейти от переменных (r,φ) к переменным $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$.

12. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int_C (y + e^{-y})\,dx - (2y + xe^{-y})\,dy.$$

где окружность $C = \{x^2+y^2 = 1\}$ пробегается против хода часовой стрелки.

13. Найти поверхностный интеграл

$$\iint_S x^2\,dS, \quad \text{где} \quad S = \{x^2 + y^2 = 1,\ 0 \leqslant z \leqslant 1\}.$$

14. Найти поверхностный интеграл $\iint_S z\,dx\,dy$, где S — нижняя в смысле направления оси Oz сторона поверхности $\{x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ z \geqslant 0\}$.

15. Тригонометрический ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k \cos 2kx$ таков, что $a_k \geqslant 0$ для всех k, и он сходится для всех x. Верно ли, что

а) этот ряд является рядом Фурье какой-либо непрерывной функции,

б) ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k^2$ сходится?

в) полна ли система $\{\cos 2kx\}_{k=0}^{\infty}$ в $C[1,2]$?

16. Найти в ортонормированном базисе угол между прямой $\{x+y+z+1 = 0,\ \ 2x+y+3z = 0\}$ и плоскостью $x+2y+ z = 0$.

17. Линейное преобразование $\varphi(\vec{x}) = A\vec{x}$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ задано в базисе векторов $(1,0)$, $(0,1)$ матрицей $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

а) Найти базис, в котором матрица преобразования φ имеет диагональный вид, а также выписать этот вид.

б) Вычислить A^k для натуральных k.

в) Найти общее решение системы $\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}$.

18. Определить тип поверхности второго порядка, заданной уравнением $xy + z = 0$.

19. а) Найти все непрерывные функции $y(x)$, для которых выполнено равенство $y(x) = x + \int_0^x y(t)\,dt$.

б) Найти общее решение уравнения $y'' + y = 2\sin^2(x/2)$.

20. Для вариационной задачи

$$J(y) = \int_0^1 e^{y'}\,dx, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1,$$

а) найти стационарные точки функционала,

б) определить тип экстремума функционала.

21. Подпространство L_1 есть линейная оболочка векторов $(4, 2, 1)$, $(2, -1, -5)$, $(-1, 4, 0)$, а подпространство L_2 есть линейная оболочка векторов $(-2, 3, 1)$, $(5, 3, 13)$, $(7, 0, 12)$. Найти размерность подпространств $L_1 + L_2$ и $L_1 \bigcap L_2$.

22. Вероятности получить оценку отлично у экзаменаторов A и B равны 0.7 и 0.2 соответственно. Вероятности попасть на экзамене к A и B равны 0.2 и 0.8 соответственно. Найти вероятность того, что студент сдавал экзамен экзаменатору B, если известно, что он получил оценку отлично.

Вариант 2

1. Функция $f(x)$ вещественной переменной x задана степенным рядом $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} x^{2k+1}}{2k+1}$.

а) Найти множество точек, в которых ряд сходится.

б) Вычислить $f'(1/\sqrt{3})$ и $f(1/\sqrt{3})$.

2. При каких n существует $f^{(n)}(0)$, где

$$f(x) = \begin{cases} 3\sin x, & x \geqslant 0, \\ 3\,\mathrm{sh}\,x - x^3, & x < 0. \end{cases}$$

3. Вычислить пределы

а) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2}\left(\int_0^x \sqrt{1+\sin t}\,dt - x\right)$, б) $\lim\limits_{x\to 0} (1-x)^{\frac{\mathrm{tg}\,x - x}{x^4}}$.

4. Верно ли, что условию

$$\exists L > 0 \quad \forall x_1, x_2 \in (0, +\infty) \quad |f(x_1) - f(x_2)| \leqslant L \cdot |x_1 - x_2|$$

удовлетворяет функция а) $f(x) = 1/x$, б) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$?

5. Функцию $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$ разложить в ряд Тейлора по степеням $(x-3)$, и найти радиус сходимости полученного ряда.

6. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $u = 2x + y$ на множестве $x^2 + y^2 = 1$, а также точки, в которых эти значения достигаются.

7. Найти интеграл $\int \dfrac{x\,dx}{1+\cos x}$.

8. Найти интеграл $\int_{-1}^{0} \dfrac{(x+2)\,dx}{x^2+2x+2}$.

9. При каких $\alpha \in \mathbb{R}$ сходится интеграл
а) $\int_0^{1/2} \dfrac{\cos x\,dx}{x^\alpha \ln^3 x}$,
б) $\int_2^{+\infty} \dfrac{\cos x\,dx}{x^\alpha \ln^3 x}$.

10. Сходится ли ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{1+k^4 x}}$ равномерно на множестве $(1, +\infty)$?

11. В выражении $r\,\dfrac{\partial z}{\partial r}$ перейти от переменных (r, φ) к переменным $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$.

12. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int_C (2x + ye^x)\,dx + (x + e^x)\,dy.$$

где окружность $C = \{x^2 + y^2 = 1\}$ пробегается против хода часовой стрелки.

13. Найти поверхностный интеграл

$$\int\!\!\int_S |z|\,dS, \quad \text{где} \quad S = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}.$$

14. Найти поверхностный интеграл $\iint_S (z-1)\,dx\,dy$, где S — внешняя сторона поверхности $\{x^2 + y^2 = z^2,\ 0 \leqslant z \leqslant 1\}$.

15. Тригонометрический ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \sin kx$ таков, что $a_k \geqslant 0$ для всех k и он сходится для всех x. Верно ли, что

а) этот ряд является рядом Фурье какой-либо непрерывной функции,

б) ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k^2$ сходится?

в) полна ли система $\{\sin kx\}_{k=1}^{\infty}$ в $C[1,2]$?

16. Найти в ортонормированном базисе угол между прямой $\frac{x-1}{3} = \frac{y}{4} = z$ и плоскостью

$$\{(x,y,z) \mid (x,y,z) = \lambda(1,0,1) + \mu(2,1,1),\ \lambda,\mu \in \mathbb{R}\}.$$

17. Линейное преобразование $\varphi(\vec{x}) = A\vec{x}$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$, задано в базисе векторов $(1,0)$, $(0,1)$ матрицей $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

а) Найти базис, в котором матрица преобразования φ имеет диагональный вид, а также выписать этот вид.

б) Вычислить A^k для натуральных k.

в) Найти общее решение системы $\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}$.

18. Определить тип поверхности второго порядка, заданной уравнением $z^2 = xy$.

19. а) Найти все непрерывные функции $y(x)$, для которых выполнено равенство $y(x) = e^{-x} + \int_0^x y(t)\,dt$.

б) Найти общее решение уравнения $y'' + y = 2\cos^2(x/2)$.

20. Для вариационной задачи $J(y) = \int_0^1 \ln y'\,dx$, $y(0) = 0$, $y(1) = 1$,

а) найти стационарные точки функционала,

б) определить тип экстремума функционала.

21. Подпространство L_1 есть линейная оболочка векторов $(1,1,1)$, $(-2,-2,-2)$, $(4,4,4)$, а подпространство L_2 есть линейная оболочка векторов $(3,2,1)$, $(2,1,1)$, $(5,3,2)$. Найти размерность подпространств $L_1 + L_2$ и $L_1 \bigcap L_2$.

22. Вероятности успеть на занятия вовремя, если едешь на электричке и маршрутке, равны 0.7 и 0.8 соответственно.

Известно, что студенты пользуются электричкой в среднем в 3 раза чаще, чем маршруткой. Предполагая, что студент ехал на электричке или маршрутке, найти вероятность того, что он ехал на электричке, при условии, что он приехал на занятия вовремя.

Вариант 3

1. Функция $f(x)$ вещественной переменной x задана степенным рядом $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{x^{2k+1}}{2k+1}$.

а) Найти множество точек, в которых ряд сходится.

б) Вычислить $f'(1/2)$ и $f(1/2)$.

2. При каких n существует $f^{(n)}(0)$, где

$$f(x) = \begin{cases} 2\operatorname{tg} x, & x \geqslant 0, \\ -x^2 - 2\ln(1-x), & x < 0. \end{cases}$$

3. Вычислить пределы

а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^3}\left(\int_0^x \dfrac{\sin t}{t}\, dt - x\right)$, б) $\lim\limits_{x\to 0} (1+x)^{\frac{x}{\sqrt{\cos x} - 1}}$.

4. Является ли равномерно непрерывной на множестве $[1, +\infty)$ функция

а) $f(x) = 1/x$, б) $f(x) = x\sin x$?

5. Функцию $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ разложить в ряд Тейлора по степеням $(x+2)$ и найти радиус сходимости полученного ряда.

6. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $u = x - 2y$ на множестве $x^2 + y^2 = 1$, а также точки, в которых эти значения достигаются.

7. Найти интеграл $\int \dfrac{2x\,dx}{\operatorname{ch} 2x - 1}$.

8. Найти интеграл $\int_0^1 \dfrac{x\,dx}{x^2 + 6x + 10}$.

9. При каких $\alpha \in \mathbb{R}$ сходится интеграл

а) $\int_3^{+\infty} \dfrac{\ln(e^x + 2)\,dx}{(\sqrt{1+x^3} - 2)^{\alpha}}$,

б) $\int_2^{+\infty} \dfrac{\sin x \cos x\,dx}{x^{\alpha}\ln x}$.

10. Сходится ли ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \ln\left(1+\dfrac{x^2}{k^2}\right)$ равномерно на множестве $(1,+\infty)$?

11. В выражении $r\cos 2\varphi\,\dfrac{\partial z}{\partial r} - \sin 2\varphi\,\dfrac{\partial z}{\partial \varphi}$ перейти от переменных (r,φ) к переменным $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$.

12. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int_C (y + \cos x + e^y)\,dx + xe^y\,dy.$$

где окружность $C = \{x^2+y^2 = 1\}$ пробегается против хода часовой стрелки.

13. Найти поверхностный интеграл $\iint_S x^2\,dS$, где

$$S = \{x^2 + y^2 = z^2,\ 0 \leqslant z \leqslant 1\}.$$

14. Найти поверхностный интеграл $\iint_S (x+y+z)\,dz\,dx$, где S — внешняя сторона границы тела

$$\{x \geqslant 0, \quad y \geqslant 0, \quad z \geqslant 0, \quad x+y+z \leqslant 1\}.$$

15. Тригонометрический ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k \cos kx$ таков, что $a_k \geqslant 0$ для всех k и он сходится для всех x. Верно ли, что

а) этот ряд является рядом Фурье какой-либо непрерывной функции,

б) ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k^2$ сходится?

в) Полна ли система $\{\cos kx\}_{k=0}^{\infty}$ в $C[1,2]$?

16. Найти в ортонормированном базисе угол между прямой, проходящей через точки $(1,0,1)$, $(2,1,4)$, и плоскостью

$$x + y + 2z = 0.$$

17. Линейное преобразование $\varphi(\vec{x}) = A\vec{x}$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$, задано в базисе векторов $(1,0)$, $(0,1)$ матрицей $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

а) Найти базис, в котором матрица преобразования φ имеет диагональный вид, а также выписать этот вид.

б) Вычислить A^k для натуральных k.

в) Найти общее решение системы $\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}$.

18. Определить тип поверхности второго порядка, заданной уравнением $xy = 1$.

19. а) Найти все непрерывные функции $y(x)$, для которых выполнено равенство $y(x) = \sin x + \int_0^x y(t)\,dt$.

б) Найти общее решение уравнения $y'' - y = e^x$.

20. Для вариационной задачи $J(y) = \int_0^1 (y')^3\,dx$, $y(0) = 0$, $y(1) = 1$,

а) найти стационарные точки функционала,

б) определить тип экстремума функционала.

21. Подпространство L_1 есть линейная оболочка векторов $(1,2,3)$, $(0,1,1)$, $(4,4,4)$, а подпространство L_2 есть линейная оболочка векторов $(4,3,1)$, $(1,1,0)$, $(5,3,2)$. Найти размерность подпространств $L_1 + L_2$ и $L_1 \bigcap L_2$.

22. Вероятности завалить экзамен, если сдаешь его экзаменаторам А и Б равны 0.2 и 0.8 соответственно. Вероятности попасть на экзамене к А и Б равны 0.3 и 0.7 соответственно. Найти вероятность того, что студент сдавал экзамен экзаменатору Б, если известно, что он его завалил.

Вариант 4

1. Функция $f(x)$ вещественной переменной x задана степенным рядом $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^k x^k}{k}$.

а) Найти множество точек, в которых ряд сходится.

б) Вычислить $f'(1/4)$ и $f(1/4)$.

2. При каких n существует $f^{(n)}(0)$, где

$$f(x) = \begin{cases} x + \operatorname{arctg} x, & x \geqslant 0, \\ 2\sin x, & x < 0. \end{cases}$$

3. Вычислить пределы

а) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2}\left(\int_0^x \frac{\ln(1+t)}{t}\,dt - x\right)$, б) $\lim\limits_{x\to 0} (1-x)^{\frac{x^2}{\arcsin x - x}}$.

4. Является ли равномерно непрерывной на множестве $[1, +\infty)$ функция

а) $f(x) = \sin\sqrt{x}$, б) $f(x) = xe^{\sin x}$?

5. Функцию $f(x) = \frac{1}{5-x}$ разложить в ряд Тейлора по степеням $(x+1)$ и найти радиус сходимости полученного ряда.

6. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $u = -x + 2y$ на множестве $x^2 + y^2 = 1$, а также точки, в которых эти значения достигаются.

7. Найти интеграл $\int \frac{2x\,dx}{\operatorname{ch} 2x + 1}$.

8. Найти интеграл $\int_{-1}^{0} \frac{(x-1)\,dx}{x^2 - 6x + 10}$.

9. При каких $\alpha \in \mathbb{R}$ сходится интеграл

а) $\int_0^{1/2} \frac{\ln(e^x + x^2)\,dx}{(\sqrt{1+x^2} - 1)^\alpha}$, б) $\int_0^{1/2} \frac{\sin(1/x)\,dx}{x^\alpha \ln x}$.

10. Сходится ли ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} e^{-k\sin x}$ равномерно на множестве $(0, \pi/4)$?

11. В выражении $\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2$ перейти от переменных (r, φ) к переменным $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$.

12. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int_C (y - e^x)\,dx + 2x\,dy,$$

где окружность $C = \{x^2 + y^2 = 1\}$ пробегается против хода часовой стрелки.

13. Найти поверхностный интеграл $\iint_S \frac{dS}{\sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}}$, где $S = \{x^2 + y^2 = z, \quad z \leqslant 1\}$.

14. Найти поверхностный интеграл $\iint_S (x^4 + y^4 + z^4)\,dy\,dz$, где S — внутренняя сторона сферы $\{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

15. Тригонометрический ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k \cos(2k+1)x$ таков, что $a_k \geqslant 0$ для всех k и он сходится для всех x. Верно ли, что а) этот ряд является рядом Фурье какой-либо непрерывной функции,

б) ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k^2$ сходится?

в) полна ли система $\{\cos(2k+1)x\}_{k=0}^{\infty}$ в $C[1,2]$?

16. Найти в ортонормированном базисе угол между прямой $\frac{x}{2} = \frac{y+1}{3} = z - 1$ и плоскостью $x + y + z = 0$.

17. Линейное преобразование $\varphi(\vec{x}) = A\vec{x}$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$, задано в базисе векторов $(1,0)$, $(0,1)$ матрицей $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

а) Найти базис, в котором матрица преобразования φ имеет диагональный вид, а также выписать этот вид.

б) Вычислить A^k для натуральных k.

в) Найти общее решение системы $\frac{d\vec{x}}{dt} = A\vec{x}$.

18. Определить тип поверхности второго порядка, заданной уравнением $x^2 + y^2 = x + y + z$.

19. а) Найти все непрерывные функции $y(x)$, для которых выполнено равенство $y(x) = 1 - x + \int_0^x y(t)\,dt$.

б) Найти общее решение уравнения $y'' - y = \operatorname{sh} x$.

20. Для вариационной задачи $J(y) = \int_0^1 \operatorname{ch} y'\,dx$, $y(0) = 0$, $y(1) = 1$,

а) найти стационарные точки функционала,

б) определить тип экстремума функционала.

21. Подпространство L_1 есть линейная оболочка векторов $(1,1,1)$, $(4,2,1)$, $(2,0,-1)$, а подпространство L_2 есть линейная оболочка векторов $(-2,3,1)$, $(1,4,1)$, $(5,-2,-1)$. Найти размерность подпространств $L_1 + L_2$ и $L_1 \bigcap L_2$.

22. Вероятность поступить в аспирантуру Калтеха (США) после окончания физтеха и мехмата МГУ равны 0.8 и 0.2 соответственно. Вероятности закончить физтех и мехмат МГУ равны 0.5 и 0.5 соответственно. Найти вероятность того, что аспирант Калтеха, закончивший физтех или мехмат, — выпускник мехмата МГУ.

Ответы и решения. 2003/2004 г.

Вариант 1

1. а) По признаку Даламбера радиус сходимости ряда равен 1. На границе круга сходимости в точке $x = 1$ ряд расходится как гармонический, в точке $x = -1$ ряд сходится по признаку Дирихле (ряд Лейбница). Итак, множество сходимости $[-1, 1)$.
б) Внутри круга сходимости ряд можно дифференцировать и
$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x^{k-1} = \frac{1}{1-x}\,.$$
С учётом равенства $f(0) = 0$ получаем, что $f(x) = -\ln(1-x)$ при $x \in (-1, 1)$. Отсюда $f'(1/3) = 3/2$, $f(1/3) = \ln(3/2)$.

2. При $x \geqslant 0$ получаем разложение
$$f(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + o(x^6),$$
при $x < 0$
$$f(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + o(x^6).$$
Отсюда $f^{(n)}(0)$ существует при $n \leqslant 5$ и не существует при $n = 6$.

3. а) Применяя правило Лопиталя, получаем, что предел равен
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - 1}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1 + x^2 + o(x^2) - 1}{3x^2} = \frac{1}{3}\,.$$
б) Предел равен
$$\exp\left(\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \ln(1+x)}{\operatorname{arctg} x - x}\right) = \exp\left(\lim_{x\to 0} \frac{x^3 + o(x^3)}{-\frac{1}{3}\,x^3 + o(x^3)}\right) = e^{-3}.$$

4. а) Неверно. Допустим, найдется $L > 0$. Тогда взяв $x_1 = 0$ и $x_2 = t > 0$, получим $\sqrt{t} \leqslant Lt$, что неверно при $t < 1/L^2$.
б) Верно. Поскольку $|f'(x)| = |\cos x e^{\sin x}| \leqslant e$, то по теореме Лагранжа о среднем для любых $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$ существует $\xi \in (x_1, x_2)$, для которого

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |f'(\xi)| \cdot |x_1 - x_2| \leqslant e \cdot |x_1 - x_2|,$$

т.е. $L = e$.

5. а) Поскольку $f(x) = \frac{1}{2}\,\dfrac{1}{1 + (x-2)/2}$, то

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \, \frac{(x-2)^k}{2^{k+1}}\,.$$

б) Радиус найдем из условия сходимости $\left|\dfrac{x-2}{2}\right| < 1$ для геометрической прогрессии, т.е. $R = 2$.

6. Запишем функцию Лагранжа $L = x + 2y + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$, заметим, что условие полного ранга в этой задаче выполнено.

$$0 = L'_x = 1 + 2\lambda x, \qquad 0 = L'_y = 2 + 2\lambda x,$$

откуда $x = -1/(2\lambda)$, $y = -1/\lambda$. Подставляя эти соотношения в уравнение связи, находим следующие стационарные точки функции Лагранжа $\lambda = \sqrt{5}/2$, $x = -1/\sqrt{5}$, $y = -2/\sqrt{5}$ и $\lambda = -\sqrt{5}/2$, $x = 1/\sqrt{5}$, $y = 2/\sqrt{5}$. Поскольку $d^2L = 2\lambda(dx^2 + dy^2)$, то при $\lambda = \sqrt{5}/2$ выполнено неравенство $d^2L > 0$ и точка $(-1/\sqrt{5}, -2/\sqrt{5})$ — минимум; при $\lambda = -\sqrt{5}/2$ выполнено неравенство $d^2L < 0$ и точка $(1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5})$ — максимум.

7. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{1 - \cos x} = \int \frac{x\,dx}{2\sin^2(x/2)} = -x \operatorname{ctg} \frac{x}{2} + 2\int \operatorname{ctg} \frac{x}{2}\, d\left(\frac{x}{2}\right) =$

$\displaystyle= -x \operatorname{ctg} \frac{x}{2} + 2\int \frac{\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\, d\left(\frac{x}{2}\right) = -x \operatorname{ctg} \frac{x}{2} + 2\ln\left|\sin\frac{x}{2}\right| + C.$

8. $\int_0^1 \frac{x\,dx}{x^2-2x+2} = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x-2+2\,dx}{x^2-2x+2} = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{d(x^2-2x+2)}{x^2-2x+2} + {}$ $+\int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^2+1} = \frac{1}{2}\ln|x^2-2x+2|\,\big|_0^1 + \operatorname{arctg}(x-1)\,\big|_0^1 = {}$ $= -\frac{1}{2}\ln 2 + \frac{\pi}{4}$.

9. а) В окрестности нуля $\frac{\sin x}{x^\alpha \ln^2 x} \sim \frac{1}{x^{\alpha-1}\ln^2 x}$, интеграл от последней функции табличный и сходится при $\alpha - 1 \leqslant 1$, т.е. при $\alpha \leqslant 2$. При других α он расходится.

б) $\int \sin x\,dx$ — ограниченная функция, а $\frac{1}{x^\alpha \ln^2 x}$ монотонно убывает при $\alpha \geqslant 0$, т.е. по признаку сходимости Дирихле интеграл сходится при $\alpha \geqslant 0$. При $\alpha < 0$ подынтегральная функция бесконечно большая на $\bigcup_{k\geqslant 1}[2\pi k + {}$ $+\pi/6, 2\pi k + \pi/3]$ и не выполняется критерий Коши сходимости интеграла.

10. Пусть $x_k = \frac{1}{k^2} \in (0,1)$, тогда $u_k(x_k) = ke^{-1} \not\to 0$ и по отрицанию критерия Коши равномерной сходимости ряд не сходится равномерно.

11. $z_r = z_x x_r + z_y y_r = z_x \cos\varphi + z_y \sin\varphi$, $\quad z_\varphi = z_x x_\varphi + z_y y_\varphi = {}$ $= -z_x r\sin\varphi + z_y r\cos\varphi$. Подставляя эти соотношение в выражение и сокращая, получим $z_x + z_y$.

12. Отметим, что $\int_C e^{-y}\,dx - (2y + xe^{-y})\,dy = 0$, т.к. $(e^{-y})'_y = {}$ $= -e^{-y} = (-2y - xe^{-y})'_x$. Поэтому интеграл равен $\int_C y\,dx = \pi$, т.е. площади круга, ограниченного контуром C (формула Грина).

13. Выберем параметризацию поверхности $u = z$, $v = \varphi$, $z \in {}$ $\in [0,1]$, $\varphi \in [0, 2\pi)$, $r(z,\varphi) = (\cos\varphi, \sin\varphi, z)$. Корень из первой квадратичной формы поверхности равен 1, и интеграл равен

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \cos^2\varphi\,dz = \pi.$$

14. Единичная нормаль к S есть $n(x,y,z) = -(x,y,z)$. Добавим к S поверхность $G = \{x^2 + y^2 \leqslant 1,\ z = 0\}$, согласованно ориентированную с S, т.е. с нормалью $n = (0,0,1)$.

Пусть V — тело с границей $\partial V = S \cup G$. Применяя формулу Гаусса–Остроградского для V и учитывая равенство $\iint_G z\,dx\,dy = 0$, получаем, что интеграл равен

$$\iint\limits_{S\cup G} z\,dx\,dy = -\iint\limits_{(S\cup G)^+} z\,dx\,dy = -\iiint\limits_{V} dx\,dy\,dz = -\mu V = -\frac{2}{3}\,\pi.$$

15. а) При $x = 0$ ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k \cos 2kx = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ сходится по условию, т.к. $a_k \geqslant 0$, то $|a_k \cos 2kx| \leqslant a_k$, и ряд сходится равномерно по признаку Вейерштрасса. Следовательно, этот ряд является рядом Фурье своей суммы, которая непрерывна в силу его равномерной сходимости.

б) Т.к. сумма ряда — функция непрерывная, то она является и функцией из $RL_2([-\pi,\pi])$, поэтому в силу неравенства Бесселя $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k^2 < +\infty$, т.е. ряд сходится.

в) Система не полна. Действительно, любая функция вида $y_k = \cos 2kx$ имеет график, симметричный относительно прямой $x = \pi/2$, $\pi/2 \in [1,2]$. Поэтому приблизить по системе y_k в равномерной метрике можно лишь функции с симметричным относительно прямой $x = \pi/2$ графиком.

16. Пусть $n_1 = (1,1,1)$, $n_2 = (2,1,3)$, $n_3 = (1,2,1)$. Направляющий вектор прямой $a = [n_1, n_2] = (-2,-1,-1)$. Угол между прямой и плоскостью $\varphi = \arcsin \dfrac{|(a, n_3)|}{|a|\cdot|n_3|} = \arcsin \dfrac{5}{6}$.

17. а) Решая характеристическое уравнение $|A - \lambda E| = 0$, получаем $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 1$. Находя собственные векторы h_i из соотношений $(A - \lambda_i E)h_i = 0$, $i = 1,2$, получаем $h_1 = (1,1)^T$, $h_2 = (1,-1)^T$. Итак, в базисе h_1, h_2 матрица имеет вид $A_h = \mathrm{diag}\{3,1\}$.

б) Пусть $S = (h_1 \vdots h_2)$, $S^{-1} = \frac{1}{2}\,S$. Тогда $A = S^{-1}A_hS$ и поэтому

$$A^k = S^{-1}A_hS \cdot \ldots \cdot S^{-1}A_hS = S^{-1}A_h^kS = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3^k+1 & 3^k-1 \\ 3^k-1 & 3^k+1 \end{pmatrix}.$$

в) $\vec{x}(t) = C_1h_1e^{3t} + C_2h_2e^t$, $C_{1,2} \in R$.

18. Делая замену $x = -x_1 + y_1$, $y = x_1 + y_1$, $z = z_1$, получаем $z_1 = x_1^2 - y_1^2$, т.е. поверхность — гиперболический параболоид.

19. а) Т.к. $y(\cdot)$ непрерывна, то функция $x + \int_0^x y(t)\,dt$ непрерывно дифференцируема и $y'(x) = 1 + y(x)$, причем $y(0) = 0$. Отсюда $y(x) = e^x - 1$.
б) Решение однородного уравнения $y_0 = C_1\cos x + C_2\sin x$. Частное решение неоднородного уравнения, отвечающее в правой части 1 есть $y_1 = 1$. Для функции $-\cos x$ в правой части имеет место резонанс, поэтому частное решение ищем в виде $y_2 = ax\cos x + bx\sin x$. Подставляя y_2 в уравнение и находя коэффициенты, получаем, что $a = 0$, $b = -1/2$. Итого $y = C_1\cos x + C_2\sin x + 1 - \frac{1}{2}\,x\sin x$.

20. а) Уравнение Эйлера–Лагранжа $-\frac{d}{dt}\,L_{y'} + L_y = 0$ для $L = e^{y'}$ дает $-y''e^{y'} = 0$, откуда $y'' = 0$, $y = ax + b$ и с учётом краевых условий $y_0 = x$ — экстремаль.
б) Пусть $h(\cdot) \in C^1([0,1])$, $h(0) = h(1) = 0$. Тогда

$$\Delta J = J(y_0 + h) - J(y_0) = \int_0^1 (e^{1+h'} - e)\,dx = e\int_0^1 (e^{h'} - 1)\,dx.$$

Так как $e^x \geqslant 1 + x$ для всех x, то $e^{h'(x)} - 1 \geqslant 1 + h'(x) - 1 = h'(x)$, откуда $\Delta J \geqslant e\int_0^1 h'(x)\,dx = 0$. Следовательно, $y_0 = x$ есть глобальный слабый минимум.

21. Поскольку

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -5 \\ -1 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 97,$$

то $\dim L_1 = 3$ и значит $\dim(L_1 + L_2) = 3$. Отсюда же следует, что $\dim L_1 \cap L_2 = \dim L_2$. Поскольку

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 13 \\ 7 & 0 & 12 \end{vmatrix} = 0,$$

и ранг последней матрицы 2, то $\dim L_1 \cap L_2 = 2$.

22. Пусть событие A — попасть к А на экзамен, $P(A) = 0.2$. Пусть событие B — попасть к В на экзамен, $P(B) = 0.8$. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 1$, т.е. A и B — полная система событий. Пусть событие E состоит в получении оценки отлично. Тогда по условию $P(E|A) = 0.7$, $P(E|B) = 0.2$. По формуле Байеса

$$P(B|E) = \frac{P(E|B)P(B)}{P(E|A)P(A) + P(E|B)P(B)} = \frac{8}{15}\,.$$

Вариант 2

1. а) $[-1, 1]$; б) $-\frac{3}{4}, -\frac{\pi}{6}$. | **2.** $n \leqslant 6$. | **3.** а) $\frac{1}{4}$; б) $e^{-\frac{1}{3}}$.

4. а) нет; б) да. | **5.** $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^k (x-3)^k}{4^{k+1}}$, $R = 4$.

6. Минимум $-\sqrt{5}$ в точке $\dfrac{1}{\sqrt{5}}(-2, -1)$;
максимум $\sqrt{5}$ в точке $\dfrac{1}{\sqrt{5}}(2, 1)$.

7. $x \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 2 \ln |\cos \frac{x}{2}| + C$. **8.** $\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \ln 2$.

9. а) $\alpha \leqslant 1$; б) $\alpha \geqslant 0$. **10.** Да.

11. $xz_x + yz_y$. **12.** π. **13.** 2π. **14.** $\frac{\pi}{3}$.

15. а) Нет $(a_k = \frac{1}{\sqrt{k}})$; б) нет; в) да. | **16.** $\arcsin \sqrt{\frac{2}{39}}$.

17. а) $f_1 = (1, -1)^T$, $f_2 = (1, 1)^T$, $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$;

б) $A^k = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3^k + (-1)^k & 3^k + (-1)^{k+1} \\ 3^k + (-1)^{k+1} & 3^k + (-1)^k \end{pmatrix}$;

в) $\vec{x} = C_1 e^{-t} f_1 + C_2 e^{3t} f_2$.

18. Конус.
19. а) $y = \operatorname{ch} x$; б) $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + 1 + \frac{1}{2} x \sin x$.
20. а) $y = x$; б) max. | **21.** 3 и 0. | **22.** $\frac{21}{29}$.

Вариант 3

1. а) $(-1, 1)$; б) $\frac{4}{3}$, $\frac{1}{2} \ln 3$. | **2.** $n \leqslant 3$. | **3.** а) $-\frac{1}{18}$; б) e^{-4}.
4. а) Да; б) нет. | **5.** $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{(x+2)^k}{3^{k+1}}$, $R = 3$.
6. Минимум $-\sqrt{5}$ в точке $\dfrac{1}{\sqrt{5}}(-1, 2)$;
максимум $\sqrt{5}$ в точке $\dfrac{1}{\sqrt{5}}(1, -2)$.
7. $-x \operatorname{cth} x + \ln|\operatorname{sh} x| + C$. **8.** $\frac{1}{2} \ln \frac{17}{10} + 3(\operatorname{arctg} 3 - \operatorname{arctg} 4)$.
9. а) $\alpha > \frac{4}{3}$; б) $\alpha \geqslant 0$. **10.** Нет.
11. $xz_x - yz_y$. **12.** $-\pi$. **13.** $\frac{\pi\sqrt{2}}{4}$. **14.** $\frac{1}{6}$.
15. а) Да; б) да; в) да. | **16.** $\arcsin \sqrt{\frac{32}{33}}$.
17. а) $f_1 = (1, -1)^T$, $f_2 = (1, 1)^T$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$;
б) $A^k = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5^k + 1 & 5^k - 1 \\ 5^k - 1 & 5^k + 1 \end{pmatrix}$; в) $\vec{x} = C_1 e^t f_1 + C_2 e^{5t} f_2$.
18. Гиперболический цилиндр.
19. а) $y = \frac{1}{2} e^x + \frac{1}{2}(\sin x - \cos x)$; б) $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + \frac{1}{2} x e^x$.
20. а) $y = x$; б) min. | **21.** 3 и 2. | **22.** $\frac{28}{31}$.

Условия задач. 2005/2006 учебный год

Вариант 3

1. Построить график функции $y = f(x) = \dfrac{x-2}{(x-5)^2}$. Указать асимптоты, координаты точек локального экстремума и перегиба. При каких a уравнение $f(x) = a$ имеет хотя бы одно решение?

2. Найти $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2\left((1+2x)^{3/4} + (1-2x)^{3/4} - 2\right)}{e^{\cos x} - e\cos x}$.

3. Вычислить $\int \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} \ln\sqrt{1+x^2}\,dx$.

4. Вычислить $d^2 f(0;\pi)$ для

$$f(x,y) = \operatorname{tg}\left(x^2 - 3x\sin y\right).$$

5. Исследовать на сходимость и равномерную сходимость на множествах $(0;1)$ и $(1;+\infty)$ ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\sqrt{x}}{n} \ln\left(1 + \frac{x}{\sqrt{n}}\right).$$

6. Исследовать на сходимость

$$\int_0^1 \frac{(\sqrt{|\ln x|})^{\alpha}}{\sqrt[3]{1-x^2}\cdot\sin^{\alpha+2} x}\,dx.$$

7. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(0,1,5)$ параллельно прямым $x = 7-2t$, $y = 4+t$, $z = 1-3t$ и $x = 6$, $y = 5t$, $z = -1+t$.

8. Найти общее решение системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = -4, \\ 2x_1 - 4x_2 + 6x_3 - 2x_4 = -8, \\ -3x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 3x_4 = 12. \end{cases}$$

Указать частное решение системы и фундаментальную систему решений однородной системы.

9. а) Найти канонический вид квадратичной формы

$$K(x_1,x_2) = x_1^2 + 8x_1x_2 + 16x_2^2.$$

б) Привести эту квадратичную форму к диагональному виду при помощи ортогональной матрицы перехода. Указать эту ортогональную матрицу.

10. Решить задачу Коши $xy' = 4y - 2x^6$, $y(-1) = 0$.

11. Решить уравнение $y'' - 9y = 6\operatorname{ch} 3x$.

12. Найти допустимую экстремаль функционала

$$J(y) = \int_{-1/2}^{1/2} \big((x^2-1)y'^2 - 4x^3y' - 4y\big)\,dx,$$

$$y\left(-\frac{1}{2}\right) = y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

и исследовать его на экстремум, определив знак приращения.

13. Область G на плоскости — та из двух областей, ограниченных линиями $y = 4$ и $x^2 + y^2 = 25$, которая имеет наименьшую площадь. В двойном интеграле $\iint_G f(x,y)\,dx\,dy$ перейти к полярным координатам и записать его в виде повторного двумя различными способами.

14. Исследовать на локальный экстремум функцию

$$f(x,y) = 3x^3 + y^3 - x - 3y^2.$$

15. Разложить функцию $y = x + 1$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$, в ряд Фурье по системе $1, \cos x, \cos 2x, \cos 3x, \ \ldots$ Построить график суммы ряда.

16. Разложить по формуле Тейлора в окрестности точки $x_0 = 0$ до $o(x^n)$ функцию $f(x) = \dfrac{15x^2 + 52x - 46}{(3x-2)(x+4)}$.

Вариант 4

1. Построить график функции $y = f(x) = \dfrac{x-3}{(x+1)^3}$. Указать асимптоты, координаты точек локального экстремума и перегиба. При каких a уравнение $f(x) = a$ имеет ровно 2 решения?

2. Найти $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1-2x) + 2xe^x + \sin^3 x}{\sqrt[3]{1+x} - e^{x/3} + \frac{1}{6}x^2}$.

3. Вычислить $\int e^x \arcsin(e^x)\,dx$.

4. Вычислить $d^2 f(0;0)$ для

$$f(x,y) = \exp\left(x^2 + x\ln\left(y + \sqrt{1+y^2}\right)\right).$$

5. Исследовать на сходимость и равномерную сходимость на множествах $(0;1)$ и $(1;+\infty)$ ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{5/3} x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{n^3 x^4}\right).$$

6. Исследовать на сходимость

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln^\alpha x}{(x-1)^{5\alpha}\sqrt[3]{1+x^2}}\,dx.$$

7. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(-1,4,-3)$ и прямую $\frac{x+1}{4} = \frac{y-3}{5} = \frac{z}{1}$.

8. Найти общее решение системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 6x_3 = 2, \\ x_1 - 4x_2 - x_3 = 1, \\ 3x_1 - 10x_2 - 13x_3 = 5. \end{cases}$$

Указать частное решение системы и фундаментальную систему решений однородной системы.

9. а) Найти канонический вид квадратичной формы

$$K(x_1,x_2) = 6x_1^2 + 12x_1x_2 + x_2^2.$$

б) Привести эту квадратичную форму к диагональному виду при помощи ортогональной матрицы перехода. Указать эту ортогональную матрицу.

10. Решить задачу Коши $y' = y\operatorname{ctg} x + e^x \sin x, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{\frac{\pi}{2}}$.

11. Решить уравнение $y'' - y' - 2y = -9xe^{-x}$.

12. Найти допустимую экстремаль функционала

$$J(y) = \int_1^2 \left(\frac{3y^2}{x^3} + \frac{y'^2}{x}\right)dx, \quad y(1) = 2, \quad y(2) = \frac{17}{2}$$

и исследовать его на экстремум, определив знак приращения.

13. Область G на плоскости ограничена прямыми $y = x$, $y = -x$, $y = -2$. В двойном интеграле $\iint_G f(x, y)\,dx\,dy$ перейти к полярным координатам и записать его в виде повторного двумя различными способами.

14. Исследовать на локальный экстремум функцию

$$f(x, y) = x^2y - 2y^3 + x^2 - y^2.$$

15. Разложить функцию $y = \pi - \frac{x}{2}$, $-\pi < x < \pi$, в ряд Фурье по тригонометрической системе с периодом 2π. Построить график суммы ряда.

16. Разложить по формуле Тейлора в окрестности точки $x_0 = 0$ до $o(x^n)$ функцию $f(x) = \dfrac{3x^3 + 10x^2 + 10x + 5}{(x + 1)(x + 2)}$.

Вариант 5

1. Построить график функции $y = f(x) = \dfrac{2 - x^2}{(x + 2)^2}$. Указать асимптоты, координаты точек локального экстремума и перегиба. При каких a уравнение $f(x) = a$ не имеет решений?

2. Найти $\lim\limits_{x\to+0} \dfrac{e^{\operatorname{tg} x} - e^{\operatorname{arctg} x}}{(\operatorname{sh}\sqrt{x} - \sin\sqrt{x})^2}$.

3. Вычислить $\int \dfrac{x^7}{\sin^2(x^4)}\,dx$.

4. Вычислить $d^2f(1; 0)$ для

$$f(x, y) = \ln\left(e^{xy} + 3\operatorname{arctg} y\right).$$

5. Исследовать на сходимость и равномерную сходимость на множествах $(0; 1)$ и $(1; +\infty)$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{nx^2}{n^2 + x^4} \sin\dfrac{x}{\sqrt{n}}$.

6. Исследовать на сходимость

$$\int_0^{+\infty} \frac{(\operatorname{ch} x - 1)^{\alpha} \ln(1 + x)}{(\sqrt{x})^{3\alpha}}\,dx.$$

7. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую $\dfrac{x - 2}{3} = \dfrac{y - 5}{2} = \dfrac{z + 1}{-1}$ параллельно прямой $\dfrac{x + 1}{4} = \dfrac{y + 3}{2} = \dfrac{z}{1}$.

8. Найти общее решение системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 1, \\ 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 3x_4 = -5. \end{cases}$$

Указать частное решение системы и фундаментальную систему решений однородной системы.

9. а) Найти канонический вид квадратичной формы

$$K(x_1, x_2) = x_1^2 + \frac{1}{2}\, x_1 x_2 + x_2^2.$$

б) Привести эту квадратичную форму к диагональному виду при помощи ортогональной матрицы перехода. Указать эту ортогональную матрицу.

10. Решить задачу Коши $y' = 4y + \dfrac{e^{4x}}{\cos^2 x}, \quad y(0) = 0.$

11. Решить уравнение $y'' - 4y' + 4y = 2e^{2x}$.

12. Найти допустимую экстремаль функционала

$$J(y) = \int_1^4 \left(\frac{2yy'}{x} - \frac{3y^2}{x^2} - y'^2 - \frac{y}{x} \right) dx, \; y(1) = -\frac{1}{4}\,, \; y(4) = -1$$

и исследовать его на экстремум, определив знак приращения.

13. Область G на плоскости — та из трёх областей, ограниченных линиями $x^2+y^2 = 4$ и $x^2+y^2 = 4x$, которая имеет наименьшую площадь. В двойном интеграле $\iint_G f(x, y)\, dx\, dy$ перейти к полярным координатам и записать его в виде повторного двумя различными способами.

14. Исследовать на локальный экстремум функцию

$$f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 30x - 18y.$$

15. Разложить функцию $y = 1 - x$, $0 < x < \pi$, в ряд Фурье по системе $\sin x$, $\sin 2x$, $\sin 3x$, ... Построить график суммы ряда.

16. Разложить по формуле Тейлора в окрестности точки $x_0 = 0$ до $o(x^n)$ функцию $f(x) = \dfrac{3x^2 - 6x + 30}{(2x+1)(x+2)(x-4)}$.

Ответы и решения. 2005/2006 г.

Вариант 3

1. Легко видеть, что функция $f(x)$ определена при $x \neq 5$, $f(2) = 0$, принимает положительные значения при $x > 2$, $x \neq 5$, отрицательна при $x < 2$. Так как $\lim\limits_{x\to 5} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$, то график имеет вертикальную асимптоту $\boldsymbol{x = 5}$ и горизонтальную асимптоту $\boldsymbol{y = 0}$ при $x \to \infty$.

Найдём первую и вторую производные: $y' = -\dfrac{x+1}{(x-5)^3}$, $y'' = 2\,\dfrac{x+4}{(x-5)^4}$;

В точке $\left(\mathbf{-1; -\frac{1}{12}}\right)$ — **локальный минимум** функции, а в точке $\left(\mathbf{-4; -\frac{2}{27}}\right)$ — **перегиб** .

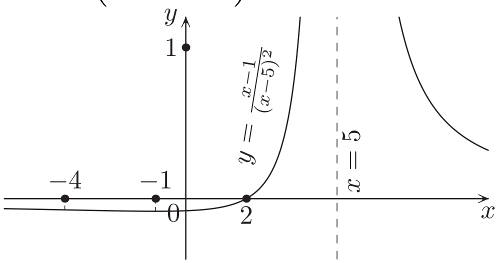

Рис. 10

По этим данным строим график функции. Из него видно, что уравнение $f(x) = a$ имеет хотя бы одно решение при $\boldsymbol{a \geqslant -\frac{1}{12}}$.

2. Раскладываем знаменатель по формуле Тейлора до $o(x^4)$:

$e^{\cos x} - e\cos x =$

$$= \exp\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right) - e\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right) =$$

$$= e \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right) - e\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right) =$$

$$= e\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right)^2\right) - e\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right) + o(x^4) =$$

$$= \frac{ex^4}{8} + o(x^4).$$

Тогда второй множитель в числителе достаточно разложить до $o(x^2)$ (заметим, что $C^2_{3/4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{3}{32}$): $(1+2x)^{3/4} + (1-2x)^{3/4} - 2 = 1 + \frac{3}{4} \cdot 2x - \frac{3}{32} \cdot 4x^2 + 1 - - \frac{3}{4} \cdot 2x - \frac{3}{32} \cdot 4x^2 + o(x^2) = -\frac{3}{4}\,x^2 + o(x^2)$.

Искомый предел равен $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2\left(-\frac{3}{4}\,x^2 + o(x^2)\right)}{\frac{e}{8}\,x^4 + o(x^4)} = \boldsymbol{-\frac{6}{e}}$.

3. Делаем в интеграле замену $y = \sqrt{1+x^2}$ (тогда $dy = = \dfrac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}}$), после этого интегрируем по частям

$$(\ln y = u, \quad dy = dv \quad \Rightarrow \quad du = \frac{dy}{y}, \quad v = y):$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \ln\sqrt{1+x^2}\,dx = \int \ln y\,dy = y\ln y - \int y \cdot \frac{dy}{y} =$$

$$= \boldsymbol{y\ln y - y + C = \sqrt{1+x^2}(\ln\sqrt{1+x^2} - 1) + C}.$$

4. Первый способ. Известна формула второго дифференциала сложной функции: $d^2 f(u) = f''(u)\,du^2 + f'(u)\,d^2u$.

В нашем примере $f(u) = \operatorname{tg} u$, $f'(u) = \dfrac{1}{\cos^2 u}$, $f''(u) = = \dfrac{2\sin u}{\cos^3 u}$, $u(x,y) = x^2 - 3x\sin y$. Находим:

$$du = 2x\,dx - 3x\cos y\,dy - 3\sin y\,dx = (2x - 3\sin y)\,dx - 3x\cos y\,dy,$$

$$du(0,\pi) = 0;$$

$$d^2u = (2dx - 3\cos y\,dy)\,dx - 3\cos y\,dx\,dy + 3x\sin y\,dy^2 =$$

$$= 2dx^2 - 6\cos y\,dx\,dy + 3x\sin y\,dy^2,$$

$$d^2u(0,\pi) = 2dx^2 + 6\,dx\,dy;$$

$$d^2 f(0,\pi) = f''(0)\,du^2(0,\pi) + f'(0)\,d^2u(0,\pi) = \boldsymbol{2dx^2 + 6dx\,dy}.$$

Второй способ.

$$d^2 f(0,\pi) = f''_{xx}(0,\pi)\,dx^2 + 2f''_{xy}(0,\pi)\,dx\,dy + f''_{yy}(0,\pi)\,dy^2.$$

Вычислим вторые частные производные функции $f(x,y)$ в точке $(0,\pi)$.

$$f'_x = \frac{2x - 3\sin y}{\cos^2(x^2 - 3x\sin y)}\,, \quad f'_y = \frac{-3x\cos y}{\cos^2(x^2 - 3x\sin y)}\,;$$

$$f''_{xx} = \frac{2\sin(x^2 - 3x\sin y)(2x - 3\sin y)^2}{\cos^3(x^2 - 3x\sin y)} + \frac{2}{\cos^2(x^2 - 3x\sin y)}\,;$$

$$f''_{xy} = \frac{-2\sin(x^2 - 3x\sin y)\cdot 3x\cos y(2x - 3\sin y)}{\cos^3(x^2 - 3x\sin y)} -$$

$$- \frac{3\cos y}{\cos^2(x^2 - 3x\sin y)}\,;$$

$$f''_{yy} = \frac{2\sin(x^2 - 3x\sin y)(-3x\cos y)^2}{\cos^3(x^2 - 3x\sin y)} + \frac{3x\sin y}{\cos^2(x^2 - 3x\sin y)}\,;$$

$$f''_{xx}(0,\pi) = 2, \quad f''_{xy}(0,\pi) = 3, \quad f''_{yy}(0,\pi) = 0,$$

$$d^2 f(0,\pi) = \boldsymbol{2dx^2 + 6dx\,dy}.$$

5. Известно, что для всех положительных x выполняются неравенства

$$|\sin x| < x, \quad 0 < \ln(1 + x) < x.$$

Поэтому общий член ряда $u_n(x)$ по модулю ограничивается так:

$$|u_n(x)| < \frac{\sqrt{x}}{n}\cdot\frac{x}{\sqrt{n}} = \frac{x^{3/2}}{n^{3/2}}\,.$$

Так как при фиксированном $x > 0$ последнее выражение является членом сходящегося ряда, то данный функциональный ряд абсолютно сходится при всех $x > 0$ по признаку сравнения.

На интервале $(0,1)$ последняя оценка продолжается до

$$|u_n(x)| < \frac{1}{n^{3/2}}\,.$$

Последнее выражение является членом сходящегося ряда, не зависящим от x. Поэтому **на $(0, 1)$ данный функциональный ряд сходится равномерно** по признаку Вейерштрасса.

Наконец, если взять $x_n = n^2$, то $u_n(x_n) = \sin 1 \cdot \ln(1 + n^{3/2}) \to \infty$. Поэтому **на $(1; +\infty)$ данный функциональный ряд сходится неравномерно** (не выполнено необходимое условие равномерной сходимости — общий член ряда стремится к нулю неравномерно).

6. Несобственный интеграл от знакопостоянной функции имеет две особенности — точки 0 и 1.

$$\int_0^1 \frac{(\sqrt{|\ln x|})^\alpha}{\sqrt[3]{1-x^2} \cdot \sin^{\alpha+2} x}\, dx = \int_0^{1/2} + \int_{1/2}^1 \equiv I_1 + I_2.$$

Интеграл I_1 имеет особенность в точке 0. Так как $\lim\limits_{x\to+0} \sqrt[3]{1-x^2} = 0$, а $\sin x \sim x$ при $x \to +0$, то I_1 эквивалентен по сходимости интегралу $\int_0^{1/2} \frac{dx}{x^{\alpha+2}|\ln x|^{-\alpha/2}}$.

Известно, что

$$\int_0^{1/2} \frac{dx}{x^\alpha |\ln x|^\beta} \begin{cases} \text{сходится для всех } \beta, \text{ если } \alpha < 1; \\ \text{расходится для всех } \beta, \text{ если } \alpha > 1; \\ \text{при } \alpha = 1: \begin{cases} \text{сходится, если } \beta > 1; \\ \text{расходится, если } \beta \leqslant 1. \end{cases} \end{cases}$$

Поэтому при $\alpha + 2 > 1$, т.е. $a > -1$, интеграл расходится.

При $\alpha + 2 < 1$, т.е. $a < -1$, интеграл сходится.

При $\alpha = -1$ имеем интеграл

$$\int_0^{1/2} \frac{dx}{x|\ln x|^{1/2}},$$

который расходится.

Итак, I_1 сходится при $\alpha < -1$ и расходится при $\alpha \geqslant -1$.

Интеграл I_2 имеет особенность в точке 1. При помощи замены $x = 1 - t$ приведём его к виду

$$\int_0^{1/2} \frac{|\ln(1-t)|^{\alpha/2}}{\sqrt[3]{1-(1-t)^2} \cdot \sin^{\alpha+2}(1-t)}\ dt,$$

который имеет особенность в точке 0. Так как $\ln(1-t) \sim \sim -t$, $\sqrt[3]{1-(1-t)^2} = \sqrt[3]{2t-t^2} \sim \sqrt[3]{2t}$ при $t \to +0$, и $\lim\limits_{t\to+0} \sin(1-t) = \sin 1$, то I_2 эквивалентен по сходимости интегралу $\int_0^{1/2} \frac{t^{\alpha/2}}{\sqrt[3]{t}}\, dt = \int_0^{1/2} \frac{dt}{t^{1/3-\alpha/2}}$.

Последний интеграл сходится тогда и только тогда, когда $\frac{1}{3} - \frac{\alpha}{2} < 1 \iff \alpha > -\frac{4}{3}$.

Окончательно получаем, что исходный интеграл сходится тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{-\frac{4}{3} < \alpha < -1}$.

7. Направляющие векторы данных прямых — $\vec{a}(-2,1,-3)$ и $\vec{b}(0,5,1)$. Искомая плоскость проходит через точку $M(0,1,5)$ параллельно векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, поэтому её уравнение

$$\begin{vmatrix} x & y-1 & z-5 \\ -2 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

т.е. $16x + 2(y-1) - 10(z-5) = 0$, и окончательно находим уравнение плоскости $\boldsymbol{8x + y - 5z + 24 = 0}$.

8. Все три уравнения системы пропорциональны, поэтому система равносильна одному уравнению $x_1 - 2x_2 + 3x_3 - - x_4 = -4$. Общее решение системы может быть записано в виде

$$\boldsymbol{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}},$$

где C_1, C_2, $C_3 \in \mathbb{R}$. Столбец $(-4,\ 0,\ 0,\ 0)^T$ является частным решением системы, а столбцы $(2,1,0,0)^T$, $(-3,0,1,0)^T$, $(1,0,0,1)^T$ образуют фундаментальную систему решений однородной системы.

9. Так как $K(x_1,x_2) = x_1^2 + 8x_1x_2 + 16x_2^2 = (x_1+4x_2)^2$, то канонический вид этой квадратичной формы от двух переменных $\boldsymbol{K = \xi_1^2}$.

Матрица квадратичной формы в исходном базисе $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$: $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 16 \end{pmatrix}$. Собственные значения матрицы находим из уравнения $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 4 & 16-\lambda \end{vmatrix} = 0$, т.е. $(\lambda-16)(\lambda-1)-$ $-16 = 0$, откуда $\lambda_1 = 17$, $\lambda_2 = 0$. При помощи ортогональной матрицы перехода квадратичная форма может быть приведена к виду $K = 17x_1'^2$. Для нахождения этой ортогональной матрицы перехода найдём ортонормированный базис из собственных векторов матрицы A (исходный базис $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ считаем ортонормированным в двумерном евклидовом пространстве).

$$\lambda_1 = 17 \Rightarrow \begin{pmatrix} -16 & 4 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$\vec{h}_1 = (1, 4)^T$ — собственный вектор, соответствующий собственному значению $\lambda = 17$.

$$\lambda_2 = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 16 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$\vec{h}_2 = (-4, 1)^T$ — собственный вектор, соответствующий собственному значению $\lambda = 0$. Векторы $\vec{h}_1$ и $\vec{h}_2$ ортогональны, как собственные векторы самосопряжённого линейного преобразования, соответствующие различным собственным значениям (матрица A симметрична в ортонормированном базисе, значит, соответствующее линейное преобразование является самосопряжённым). Для нахождения ортонормированного базиса из собственных векторов пронормируем векторы $\vec{h}_1$ и $\vec{h}_2$: $\vec{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{17}}\vec{h}_1$, $\vec{e}_2' =$ $= \frac{1}{\sqrt{17}}\vec{h}_2$. По столбцам искомой матрицы перехода S стоят координаты векторов $\vec{e}_1'$, $\vec{e}_2'$ в «старом» базисе $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$:

$$\boldsymbol{S = \frac{1}{\sqrt{17}} \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}}.$$

10. Данное уравнение является линейным дифференциальным уравнением первого порядка. Соответствующее однородное уравнение — уравнение с разделяющимися переменными: $xy' = 4y$, т.е. $\frac{dy}{y} = 4\,\frac{dx}{x}$. Общее решение этого уравнения $y = Cx^4$.

Применим метод вариации постоянной, т.е. ищем общее решение неоднородного уравнения в виде $y = C(x)x^4$:

$$x(C'(x)x^4 + C(x)4x^3) = 4C(x)x^4 - 2x^6,$$

откуда $C'(x) = -2x$ и $C(x) = -x^2 + C$.

Общее решение неоднородного уравнения $y = (C - x^2)x^4 = Cx^4 - x^6$. Так как $y = 0$ при $x = -1$, то $0 = -1 + C$, т.е. $C = 1$.

Решение задачи Коши: $\boldsymbol{y = x^4 - x^6}$.

11. Однородное уравнение имеет вид $y'' - 9y = 0$. Характеристическое уравнение $\lambda^2 - 9 = 0$ имеет корни $\lambda_{1,2} = \pm 3$, поэтому общее решение однородного уравнения

$$y = C_1e^{3x} + C_2e^{-3x}.$$

Правая часть уравнения имеет вид

$$6\operatorname{ch}3x = 3e^{3x} + 3e^{-3x}.$$

Числа 3 и -3 являются корнями характеристического уравнения кратности 1 (для обоих слагаемых в правой части имеет место резонанс порядка 1), поэтому частное решение неоднородного уравнения (состоящее из двух слагаемых) можно искать в виде

$$y = (Ae^{3x} + Be^{-3x})x = (a\operatorname{ch}3x + b\operatorname{sh}3x)x.$$

Так как правая часть уравнения — чётная функция, а уравнение содержит производные только чётного порядка (нулевого и второго), то частное решение можно искать в виде чётной функции $y = bx\operatorname{sh}3x$. Тогда

$$y' = b(3x\operatorname{ch}3x + \operatorname{sh}3x), \quad y'' = b(9x\operatorname{sh}3x + 6\operatorname{ch}3x).$$

Подставляя y' и y'' в уравнение, имеем

$$6b \operatorname{ch} 3x = 6 \operatorname{ch} 3x, \quad \text{откуда} \quad b = 1.$$

Частное решение неоднородного уравнения $\boldsymbol{y = x \operatorname{sh} 3x}$. Общее решение неоднородного уравнения

$$\boldsymbol{y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x} + x \operatorname{sh} 3x}.$$

12. Нужно решить простейшую вариационную задачу для функционала $J(y) = \int_{-1/2}^{1/2} F(x, y, y')\, dx$, $y\left(-\frac{1}{2}\right) = y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$, где $F(x, y, y') = (x^2 - 1)y'^2 - 4x^3y' - 4y$. Допустимая экстремаль этой задачи является решением уравнения Эйлера: $y' = 2x + \dfrac{C}{x^2 - 1}$, откуда окончательно

$$\boldsymbol{(y'(x^2 - 1))' = 6x^2 - 2; \quad y'(x^2 - 1) = 2x^3 - 2x + C},$$

$y = x^2 + C_1 \ln \dfrac{1 - x}{1 + x} + C_2$ (здесь учтено, что $-1 < x < 1$). Допустимая экстремаль является решением краевой задачи $y\left(-\frac{1}{2}\right) = y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$, откуда получим систему двух уравнений с двумя неизвестными C_1, C_2:

$$\frac{1}{4} + C_1 \ln \frac{1}{3} + C_2 = \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{4} + C_1 \ln 3 + C_2 = \frac{1}{4},$$

откуда $C_1 = C_2 = 0$, и допустимой экстремалью этой вариационной задачи является функция $\boldsymbol{y_0 = x^2}$.

Стандартным случаем при решении вариационной задачи с закреплёнными концами является случай, когда функция $F(x, y, y')$ квадратична по y, y', т.е.

$$F(x, y, y') = A(x)y'^2 + B(x)yy' + C(x)y^2 + D(x)y' + E(x)y,$$

где функции $A(x)$, $\ldots$, $E(x)$ дважды непрерывно дифференцируемы на соответствующем отрезке $[a, b]$. Тогда, если y_0 — экстремаль задачи на нахождение локального экстремума функционала $J(y) = \int_a^b F(x, y, y')\, dx$ с закреплёнными концами: $y(a) = A$, $y(b) = B$, то для функций

$h \in C^1[a,b]$ таких, что $h(a) = h(b) = 0$, приращение функционала

$$\Delta J = J(y_0+h) - J(y_0) = \int_a^b \left(A(x)h'^2 + \left(C(x) - \frac{B'(x)}{2} \right) h^2 \right) dx.$$

В нашем случае

$$\Delta J = \int_{-1/2}^{1/2} (x^2-1)h'^2\, dx < 0 \quad \text{для} \quad h(x) \in C^1 \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right],$$
$$h\left(-\frac{1}{2}\right) = h\left(\frac{1}{2}\right) = 0.$$

Поэтому **допустимая экстремаль даёт максимум вариационной задачи**.

13. При пересечении окружности $x^2 + y^2 = 25$ прямой $y = 4$ возникают 2 сегмента. Меньшую площадь имеет, очевидно, тот из них, который расположен выше прямой $y = 4$. В полярных координатах $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ уравнение окружности имеет вид $r = 5$, уравнение прямой $r = \frac{4}{\sin\varphi}$.

Внутри сегмента $r \in [4,5]$. При каждом фиксированном $r \in [4,5]$ угол φ меняется от $\arcsin\frac{4}{r}$ до $\pi - \arcsin\frac{4}{r}$. Поэтому

$$\iint\limits_G f(x,y)\, dx\, dy = \int\limits_4^5 \boldsymbol{r\, dr} \int\limits_{\arcsin\frac{4}{r}}^{\pi-\arcsin\frac{4}{r}} \boldsymbol{f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, d\varphi}$$

(здесь учтено, что якобиан соответствующего преобразования равен r — не зависит от φ).

Далее, внутри сегмента $\varphi \in \left[\arcsin\frac{4}{5}, \pi - \arcsin\frac{4}{5}\right]$. При каждом таком фиксированном φ значение r меняется от $\dfrac{4}{\sin\varphi}$ до 5. Поэтому

$$\iint\limits_G f(x,y)\,dx\,dy = \boldsymbol{\int\limits_{\arcsin\frac{4}{5}}^{\pi-\arcsin\frac{4}{5}} d\varphi \int\limits_{\frac{4}{\sin\varphi}}^{5} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r\,dr}.$$

14. Необходимым условием локального экстремума дифференцируемой функции является равенство нулю частных производных f'_x и f'_y:

$$f'_x = 9x^2 - 1 = 0, \quad f'_y = 3y^2 - 6y = 0.$$

Эта система имеет 4 решения: $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$, $\left(-\frac{1}{3}, 0\right)$, $\left(\frac{1}{3}, 2\right)$, $\left(-\frac{1}{3}, 2\right)$. Для этих четырёх стационарных точек функции нужно проверить выполнение достаточных условий экстремума. Имеем: $f''_{xx} = 18x$, $f''_{xy} = 0$, $f''_{yy} = 6y - 6$. Второй дифференциал $d^2f(x,y) = 18x\,dx^2 + (6y-6)\,dy^2$. В стационарных точках:
$d^2f\left(\frac{1}{3}, 0\right) = 6\,dx^2 - 6\,dy^2$ — неопределённая квадратичная форма от dx, dy;
$d^2f\left(-\frac{1}{3}, 0\right) = -6\,dx^2 - 6\,dy^2$ — отрицательно определённая квадратичная форма;
$d^2f\left(\frac{1}{3}, 2\right) = 6\,dx^2 + 6\,dy^2$ — положительно определённая квадратичная форма;
$d^2f\left(-\frac{1}{3}, 2\right) = -6\,dx^2 + 6\,dy^2$ — неопределённая квадратичная форма от dx, dy.

Таким образом, точки $\left(\frac{1}{3}, 0\right)$ и $\left(-\frac{1}{3}, 2\right)$ не являются точками локального экстремума. **Точка $\boldsymbol{\left(-\frac{1}{3}, 0\right)}$ является точкой локального максимума, точка $\boldsymbol{\left(\frac{1}{3}, 2\right)}$ является точкой локального минимума**.

15. График суммы ряда строится на основании признака Липшица сходимости рядов Фурье без вычисления коэффициентов ряда. Для построения графика суммы ряда достаточно продолжить функцию $f(x) = x + 1$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$, по чётности на отрезок $[-\pi, \pi]$, а затем с периодом 2π на всю числовую прямую. Полученная 2π-периодическая функция в каждой точке непрерывна. Она в каждой точке либо дифференцируема, либо имеет конечные односторонние производные. Значит, ряд Фурье этой функции в каждой точке сходится к значению функции в точке.

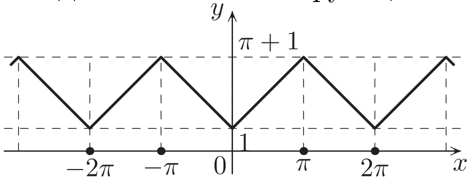

Рис. 11

График суммы ряда изображён на рис. 11.

Искомый ряд имеет вид $\dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$,

где $$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x+1)\cos nx\,dx,$$
$$n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x+1)\,dx = \frac{2}{\pi}\left(\frac{x^2}{2} + x\right)\Big|_0^{\pi} = 2 + \pi,$$

При $n = 1,\ 2,\ \ldots$

$$a_n = \frac{2}{\pi n}\int_0^{\pi}(x+1)\,d\sin nx =$$
$$= \frac{2}{\pi n}(x+1)\sin nx\Big|_0^{\pi} - \frac{2}{\pi n}\int_0^{\pi}\sin nx\,dx =$$
$$= \frac{2}{\pi n^2}\cos nx\Big|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi n^2}\left((-1)^n - 1\right).$$

Искомый ряд

$$\boldsymbol{f(x) = 1 + \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n - 1}{n^2}\cos nx.}$$

16. Данная функция $f(x)$ является неправильной рациональной дробью. Выделим целую часть, затем разложим полученную правильную дробь в сумму простейших дробей:

$$f(x)=\frac{15x^2+52x-46}{3x^2+10x-8}=5+\frac{2x-6}{(3x-2)(x+4)}=5+\frac{A}{3x-2}+\frac{B}{x+4},$$

где A и B — неизвестные пока коэффициенты. Так как $2x-6=A(x+4)+B(3x-2)$ для всех x, то при $x=-4$ имеем: $-14B=-14$. При $x=\frac{2}{3}$ имеем: $A\,\frac{14}{3}=-\frac{14}{3}$, откуда $A=-1$, $B=1$, и $f(x)=5+\dfrac{1}{2-3x}+\dfrac{1}{4+x}=$ $=5+\frac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{1-\frac{3}{2}\,x}+\frac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{1+\frac{x}{4}}$. Так как при $u\to 0$ $\dfrac{1}{1-u}=$ $=\sum\limits_{k=0}^{n}u^k+o(u^n)$, $\dfrac{1}{1+u}=\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^ku^k+o(u^n)$, то при $x\to 0$ $f(x)=5+\frac{1}{2}\cdot\sum\limits_{k=0}^{n}\left(\frac{3x}{2}\right)^k+\frac{1}{4}\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k\left(\frac{x}{4}\right)^k+o(x^n)$.

Нулевое слагаемое записывается отдельно, остальные слагаемые ($1\leqslant k\leqslant n$) — под общим знаком суммы:

$$\boldsymbol{f(x)=\frac{23}{4}+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{3^k}{2^{k+1}}+\frac{(-1)^k}{4^{k+1}}\right)x^k+o(x^n),\quad x\to 0.}$$

Вариант 4

1. Асимптоты $x=-1$, $y=0$; $y'=-2\,\dfrac{x-5}{(x+1)^4}$, $y''=6\,\dfrac{x-7}{(x+1)^5}$;

Локальный максимум $\left(5;\frac{1}{108}\right)$, перегиб $\left(7;\frac{1}{128}\right)$.

Уравнение $f(x)=a$ имеет ровно 2 решения при $a=$ $=\frac{1}{108}$.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\frac{2}{3}\,x^3+o(x^3)}{\frac{1}{18}\,x^3+o(x^3)}=-12$. **3.** $e^x\arcsin(e^x)+\sqrt{1-e^{2x}}+C$.

4. $2dx^2+2dx\,dy$.

5. На $(1;+\infty)$ сходимость равномерная, так как $|u_n(x)|\leqslant\dfrac{1}{n^{4/3}}$ при всех $x\in(1,+\infty)$.

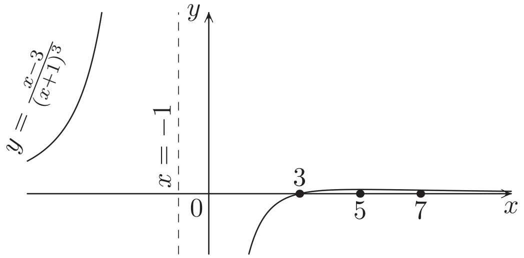

Рис. 12

На $(0; 1)$ сходимость ряда неравномерная, так как $u_n(n^{-3/4}) = (\ln 2) \cdot n^{1/6} \to +\infty$.

6. Сходится $\iff \frac{1}{15} < \alpha < \frac{1}{4}$.

7. $4x - 3y - z + 13 = 0$.

8. $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} 21 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $C \in \mathbb{R}$.

9. Канонический вид: $k = \xi_1^2 - \xi_2^2$. При помощи ортогональной матрицы перехода $S = \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ квадратичная форма приводится к виду $k = 10x_1'^2 - 3x_2'^2$.

10. $y = e^x \sin x$ (общее решение $y = (C + e^x) \sin x$).

11. $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x} + \left(\frac{3}{2}\, x^2 + x\right) e^{-x}$.

12. Уравнение Эйлера: $x^2 y'' - xy' - 3y = 0$; $y = C_1 x^3 + \frac{C_2}{x}$; допустимая экстремаль $y_0 = x^3 + \frac{1}{x}$. Для функций $h \in C^1[1, 2]$ таких, что $h(1) = h(2) = 0$, приращение функционала $\Delta J \equiv J(y_0 + h) - J(y_0) = \int_1^2 \left(\frac{h'^2}{x} + \frac{3h^2}{x^3} \right) dx > 0$.

Допустимая экстремаль даёт минимум вариационной задачи.

13. $\displaystyle\iint_G f(x,y)\,dx\,dy = \int_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}} d\varphi \int_0^{-\frac{2}{\sin\varphi}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r\,dr =$

$$= \int\limits_0^2 r\,dr \int\limits_{5\pi/4}^{7\pi/4} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,d\varphi + \int\limits_2^{2\sqrt{2}} r\,dr \int\limits_{5\pi/4}^{\pi+\arcsin\frac{2}{r}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,d\varphi +$$

$$+ \int_2^{2\sqrt{2}} r\,dr \int_{2\pi-\arcsin\frac{2}{r}}^{7\pi/4} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,d\varphi.$$

14. 4 стационарных точки: $(0,0)$, $\left(0, -\frac{1}{3}\right)$, $(\pm 2, -1)$.

$d^2 f(0;0) = 2dx^2 - 2dy^2$ — неопределённая квадратичная форма, нет экстремума;

$d^2 f(\pm 2; -1) = 10dy^2 \pm 8dx\,dy$ — неопределённая квадратичная форма, нет экстремума;

$d^2 f\left(0; -\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3}\,dx^2 + 2dy^2$ — положительно определённая квадратичная форма, локальный минимум.

15. Искомый ряд: $f(x) = \pi + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n} \sin nx$.

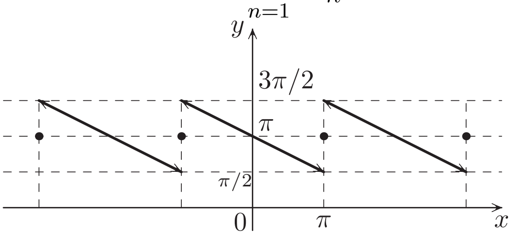

Рис. 13

16. $\displaystyle f(x) = 3x + 1 + \frac{2}{1+x} - \frac{1}{2+x} =$

$$= \frac{5}{2} + \frac{5x}{4} + \sum_{k=2}^{n} (-1)^k \left(2 - \frac{1}{2^{k+1}}\right) x^k + o(x^n).$$

Вариант 5

1. Асимптоты $x = -2$, $y = -1$;

$$y' = -4\,\frac{x+1}{(x+2)^3}\,, \quad y'' = 4\,\frac{2x+1}{(x+2)^4}\,;$$

Локальный максимум $(-1;1)$, перегиб $\left(-\frac{1}{2}\,;\frac{7}{9}\right)$. График функции — на рис. 14.

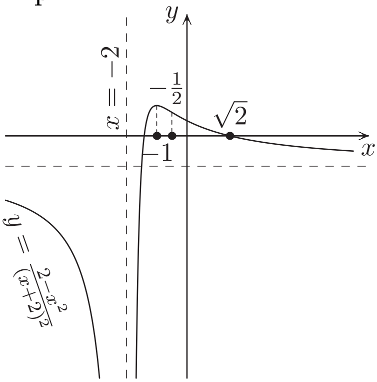

Рис. 14

Уравнение $f(x) = a$ не имеет решений при $a > 1$.

2. $\lim\limits_{x\to+0} \dfrac{\frac{2}{3}\,x^3 + o(x^3)}{\frac{1}{9}\,x^3 + o(x^3)} = 6.$

3. $-\frac{1}{4}\,x^4\operatorname{ctg}(x^4) + \frac{1}{4}\ln|\sin(x^4)| + C.$

4. $2dx\,dy - 15dy^2.$

5. На $(0;1)$ сходимость равномерная, так как $|u_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{n^{3/2}}$.

На $(1;+\infty)$ сходимость неравномерная, так как $u_n(\sqrt{n}) = \frac{1}{2}\sin 1.$

6. Сходится $\iff$ $-4 < \alpha < 0$.

7. $4x - 7y - 2z + 25 = 0.$

8. $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 11 \\ 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -19 \\ -7 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -20 \\ -7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$

9. Канонический вид $k = \xi_1'^2 + \xi_2'^2$. При помощи ортогональной матрицы перехода $S = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ квадратичная форма приводится к виду $k = \frac{5}{4}\,x_1'^2 + \frac{3}{4}\,x_2'^2$.

10. $y = \operatorname{tg} x\, e^{4x}$ (общее решение $y = (C + \operatorname{tg} x)e^{4x}$).

11. $y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x} + x^2 e^{2x}$.

12. Уравнение Эйлера: $x^2 y'' - 2y = \frac{x}{2}$; допустимая экстремаль $y_0 = -\frac{x}{4}$; Для функций $h \in C^1[1,4]$ таких, что $h(1) = h(4) = 0$, приращение функционала $\Delta J = J(y_0 + h) - J(y_0) = -\int_1^4 \left(h'^2 + \dfrac{2h^2}{x^2}\right) dx < 0$.

Допустимая экстремаль даёт максимум вариационной задачи.

13. $$\iint_G f(x,y)\,dx\,dy = \int_{-\pi/3}^{\pi/3} d\varphi \int_0^2 f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r\,dr +$$
$$+ \int_{\pi/3}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{4\cos\varphi} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r\,dr +$$
$$+ \int_{-\pi/2}^{-\pi/3} d\varphi \int_0^{4\cos\varphi} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r\,dr =$$
$$= \int_0^2 r\,dr \int_{-\arccos\frac{r}{4}}^{\arccos\frac{r}{4}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,d\varphi.$$

14. 4 стационарных точки: $(\pm1, \pm3)$ и $(\pm3, \pm1)$.
$d^2 f(\pm1; \pm3) = \pm(6dx^2 + 6dy^2 + 36dx\,dy)$ — неопределённая квадратичная форма, нет экстремума;
$d^2 f(3; 1) = (18dx^2 + 18dy^2 + 12dx\,dy)$ — положительно определённая квадратичная форма, локальный минимум;
$d^2 f(-3; -1) = -(18dx^2 + 18dy^2 + 12dx\,dy)$ — отрицательно определённая квадратичная форма, локальный максимум.

15. Искомый ряд:
$$f(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \left((-1)^n + \frac{1}{\pi}\left(1 + (-1)^{n+1}\right)\right) \frac{\sin nx}{n}.$$

График суммы ряда Фурье:

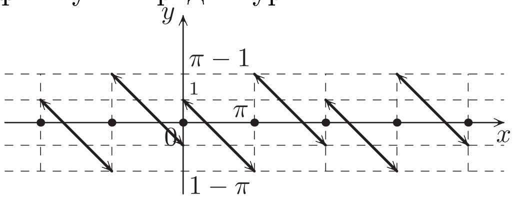

Рис. 15

16. $f(x) = -\dfrac{1}{4-x} + \dfrac{3}{2+x} - \dfrac{5}{1+2x} =$

$$= \sum_{k=0}^{n} \left(-\frac{1}{4^{k+1}} + \frac{3(-1)^k}{2^{k+1}} - 5(-2)^k \right) x^k + o(x^n).$$

Условия задач. 2006/2007 учебный год

Вариант 1

1. Построить график функции $y = f(x) = \dfrac{(x-2)^3}{(x-4)^2}$. Указать асимптоты, координаты точек локального экстремума и перегиба.

2. Найти $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\cos x} - e}{\ln(1+x) - \operatorname{tg} x}$. **3.** Вычислить $\int \dfrac{\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}}\, dx$.

4. Исследовать на сходимость интеграл

$$\int_0^{+\infty} (3x^2 + x^3)^\alpha \ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right) dx.$$

5. Исследовать на сходимость и равномерную сходимость на множествах $(0;1)$ и $(1;+\infty)$ ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}(n \sin x) \ln\left(1 + \frac{x^2}{n^{3/2}}\right).$$

6. Разложить функцию $f(x) = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$ в ряд по степеням x и найти радиус сходимости полученного ряда.

7. Составить каноническое уравнение прямой, проходящей через точку $M(1,2,1)$ параллельно прямой $x-y+z+3=0$, $2x+4y+5=0$.

8. Найти общее решение системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 2, \\ -x_1 + 4x_3 + 2x_4 = 3. \end{cases}$$

Указать частное решение системы и фундаментальную систему решений однородной системы.

9. а) Найти канонический вид квадратичной формы

$$K(x_1, x_2, x_3) = -4x_1^2 - 10x_2^2 - 2x_3^2 + 4x_1x_3 + 6x_2x_3.$$

б) Выяснить, является ли эта квадратичная форма положительно или отрицательно определённой.

в) Найти ранг этой квадратичной формы.

г) Записать эту квадратичную форму в базисе

$$\{\vec{e}_1' = \vec{e}_2 + \vec{e}_3, \quad \vec{e}_2' = \vec{e}_1, \quad \vec{e}_3' = \vec{e}_3 - \vec{e}_2\}.$$

10. Решить уравнение $xy' + y + y^2(1+x) = 0, \quad x > 0.$

11. Найти все действительные решения уравнения $y'' - 4y' + 3y = 2xe^{3x}$.

12. Найти допустимую экстремаль функционала

$$J(y) = \int_1^e (x^2y'^2 - 2xyy' + y^2 + 4y\ln x)\,dx,$$
$$y(1) = -0,5, \quad y(e) = -1{,}5$$

и исследовать его на экстремум, определив знак приращения.

13. Исследовать на локальный экстремум функцию

$$f(x,y) = x^4 + 3y^2 - 8x^2.$$

14. Область D на плоскости ограничена прямыми

$$y = 1, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 2.$$

В двойном интеграле $\displaystyle\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ перейти к полярным координатам и записать его в виде повторного двумя различными способами.

15. Вычислить криволинейный интеграл

$$\oint_\Gamma e^x\,dx - (x^3+y)\,dy, \quad \Gamma: \ x^2 + y^2 = 1.$$

16. Разложить функцию $f(x) = \sin x$, $-1 < x < 1$, в ряд Фурье по тригонометрической системе с периодом 2. Построить график суммы ряда. Выяснить, является ли ряд равномерно сходящимся на $(-\infty, +\infty)$ (ответ обосновать).

Вариант 2

1. Построить график функции

$$y = f(x) = \frac{x^2+8x+2}{x^2}.$$

Указать асимптоты, координаты точек локального экстремума и перегиба.

2. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^{x^2}}{\cos x}\right)^{\frac{\sin x}{x^3}}$. **3.** Вычислить $\displaystyle\int \frac{dx}{x^{4/3}-x}$.

4. Исследовать на сходимость интеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{(x-1)^{\alpha+2}\ln^\alpha x}{\sqrt{1+x^4}}\,dx.$$

5. Исследовать на сходимость и равномерную сходимость на множествах $(0;1)$ и $(1;+\infty)$ ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{nx}\sin\left(\frac{1}{n^2x^2}\right).$$

6. Разложить функцию $f(x) = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{2+3x}{1-6x}\right)$ в ряд по степеням x и найти радиус сходимости полученного ряда.

7. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(0,1,1)$ и прямую $x=-1+2t$, $y=1+3t$, $z=2-t$.

8. Найти общее решение системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_4 = -1 \\ -x_1 + 2x_2 - 9x_3 - 9x_4 = -1. \end{cases}$$

Указать частное решение системы и фундаментальную систему решений однородной системы.

9. а) Найти канонический вид квадратичной формы

$$K(x_1,x_2,x_3) = 8x_2^2 + x_1x_3 - 4x_2x_3.$$

б) Выяснить, является ли эта квадратичная форма положительно или отрицательно определённой.

в) Найти ранг этой квадратичной формы.

г) Записать эту квадратичную форму в базисе

$$\{\vec e\,'_1 = 2\vec e_1 - \vec e_2,\quad \vec e\,'_2 = \vec e_3,\quad \vec e\,'_3 = 3\vec e_2\}.$$

10. Решить уравнение $y' = -3x^2y + x^2\sin(e^{x^3})$.

11. Найти все действительные решения системы уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = x + 5y, \\ \dot{y} = -2x - y. \end{cases}$$

12. Найти допустимую экстремаль функционала

$$J(y) = \int_0^1 (y'^2 + 16y^2 + 2e^4 xy)\,dx, \quad y(0) = \frac{1}{64},$$

и исследовать его на экстремум, определив знак приращения.

13. Исследовать на локальный экстремум функцию

$$f(x,y) = \frac{x^3}{3} + 2x^2 + xy^2 - y^2.$$

14. Область D на плоскости ограничена линиями

$$y = x^2 - 1, \quad y = 1 - x, \quad x = 0 \quad (x > 0).$$

Вычислить двойной интеграл

$$\iint_D 2xy\,dx\,dy.$$

15. Вычислить поверхностный интеграл

$$\iint_S (3x - 1 + z)dS, \quad S:\ 3x + 2y + z = 1, \quad x,\ y,\ z \geqslant 0.$$

16. Разложить функцию $f(x) = \pi + x$, $-\pi < x < \pi$, в ряд Фурье по тригонометрической системе с периодом 2π. Построить график суммы ряда. Выяснить, является ли ряд равномерно сходящимся на $(-\infty, +\infty)$ (ответ обосновать).

Вариант 6

1. Построить график функции $y = f(x) = \frac{\ln x}{x} - 1 + \frac{1}{x}$. Указать асимптоты, координаты точек локального экстремума и перегиба.

2. Найти $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\cos x + \operatorname{ch} x - 1}{\dfrac{x^2}{1-2x^2} - \sin^2 x}$.

3. Вычислить $\displaystyle\int \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$.

4. Исследовать на сходимость интеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln^{2\alpha}(1+x)}{x^{3\alpha-1}\sqrt{1+x^5}}\, dx.$$

5. Исследовать на сходимость и равномерную сходимость на множествах $(0;1)$ и $(1;+\infty)$ ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{\pi n}{2x}}{1+n^2x^2}.$$

6. Разложить функцию $f(x) = \operatorname{arctg}(x + \sqrt{x^2+1})$ в ряд по степеням x и найти радиус сходимости полученного ряда.

7. Составить общее уравнение плоскости, проходящей через точку $M(2,1,-3)$ перпендикулярно прямой $2x-3y+z=0$, $2x-y+4z-5=0$.

8. Найти общее решение системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_4 = 0, \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 = -4, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 - 8x_4 = -4. \end{cases}$$

Указать частное решение системы и фундаментальную систему решений однородной системы.

9. а) Найти канонический вид квадратичной формы

$$K(x_1,x_2,x_3) = x_1x_3 - 4x_2x_3.$$

б) Выяснить, является ли эта квадратичная форма положительно или отрицательно определённой.

в) Найти ранг этой квадратичной формы.

г) Записать эту квадратичную форму в базисе

$$\{\vec{e}\,'_1 = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2, \quad \vec{e}\,'_2 = \vec{e}_3, \quad \vec{e}\,'_3 = 3\vec{e}_2\}.$$

10. Решить уравнение $(e^x+1)y' = e^x y + (e^x+1)\operatorname{sh} x$.

11. Найти все действительные решения системы уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = -5x + 3y, \\ \dot{y} = -3x + y. \end{cases}$$

12. Найти допустимую экстремаль функционала

$$J(y) = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} (y'^2 - y^2 - 10xy)\, dx, \quad y(0) = 0,\ y\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1 - \frac{15\pi}{2},$$

и исследовать его на экстремум, определив знак приращения.

13. Исследовать на локальный экстремум функцию

$$f(x, y) = -y^4 + 8y^2 - x^4 - 2x^2.$$

14. Область D на плоскости задана неравенствами

$$x^2 + y^2 < 1, \quad x^2 + y^2 < 2y, \quad x > 0.$$

Вычислить двойной интеграл

$$\iint_D x\, dx\, dy.$$

15. Вычислить поверхностный интеграл

$$\iint_S (x - y - z)\, dx\, dy,$$

S — верхняя сторона $x + y + z = 1$, x, y, $z \geqslant 0$.

16. Разложить функцию $f(x) = \cos\frac{x}{2}$, $-\pi < x < \pi$, в ряд Фурье по тригонометрической системе с периодом 2π. Построить график суммы ряда. Выяснить, является ли ряд равномерно сходящимся на $(-\infty, +\infty)$ (ответ обосновать).

Ответы и решения. 2006/2007 г.

Вариант 1

1. Функция определена при $x \neq 4$. Вертикальная асимптота: $x = 4$, так как $\lim\limits_{x\to 4} f(x) = \infty$. Вычисляем наклонную асимптоту:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{(x-2)^3}{x(x-4)^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{x^3} = 1;$$

$$b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to\infty} \frac{(x-2)^3 - x(x-4)^2}{(x-4)^2} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - 6x^2 + o(x^2) - x^3 + 8x^2 + o(x^2)}{x^2 + o(x)} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2 + o(x^2)}{x^2 + o(x^2)} = 2.$$

Тогда наклонная асимптота $y = x + 2$.

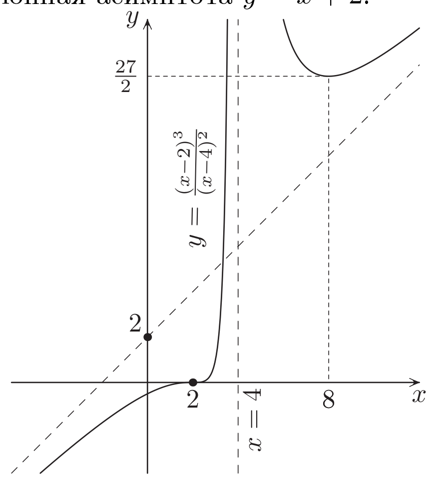

Рис. 16

$f'(x) = \dfrac{(x-2)^2}{(x-4)^3}(x-8)$. Точка $x = 8$ — точка локального минимума, $f(8) = \frac{27}{2}$.

$f''(x) = \dfrac{24(x-2)}{(x-4)^4}$. Точка $x = 2$ — точка перегиба с горизонтальной касательной ($f'(2) = 0$, $f(2) = 0$).

2. Для разложения числителя в ряд Тейлора в окрестности точки $x = 0$ имеем: $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$, тогда $e^{\cos x} - e = e^{1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)} - e = e\left(e^{-\frac{x^2}{2}+o(x^2)} - 1\right) = -\frac{e}{2}x^2 + o(x^2)$. Разложение знаменателя в окрестности точки $x = 0$: $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$, $\operatorname{tg} x = x + o(x^2)$, тогда $\ln(1+x) - \operatorname{tg} x = x - \frac{x^2}{2} - x + o(x^2) = -\frac{x^2}{2} + o(x^2)$. Теперь искомый предел равен

$$\lim_{x\to 0} \frac{-\frac{e}{2}x^2 + o(x^2)}{-\frac{x^2}{2} + o(x^2)} = \lim_{x\to 0}(e + o(1)) = e.$$

3. $$\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{2-\sqrt{x}} = \int \frac{(\sqrt{x}-2+2)}{2-\sqrt{x}}\,dx =$$
$$= \int(-1)\,dx + \int \frac{2\,dx}{2-\sqrt{x}} =$$
$$= -x + \int \frac{2\,dx}{2-\sqrt{x}} = -x + \int \frac{2\sqrt{x}\,dx}{(2-\sqrt{x})\sqrt{x}}.$$

Во втором интеграле делаем замену переменной: $\sqrt{x} = t$. Тогда $2\,dt = \frac{dx}{\sqrt{x}}$ и $\int \frac{2\sqrt{x}\,dx}{(2-\sqrt{x})\sqrt{x}} = \int \frac{2t(2\,dt)}{2-t} = 4\int \frac{t\,dt}{2-t} = 4\int \frac{(t-2)+2}{2-t}\,dt = 4\left(\int(-1)\,dt + \int \frac{2\,dt}{2-t}\right) = -4t - 8\ln|2-t| = -4\sqrt{x} - 8\ln|\sqrt{x}-2|$.

Тогда искомый интеграл равен $-x - 4\sqrt{x} - 8\ln|\sqrt{x} - 2| + C$.

4. При $x \to 0$ имеем $(3x^2 + x^3) \sim x^2$, значит $(3x^2 + x^3)^\alpha \sim C_1 x^{2\alpha}$, $\ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right) = \ln\left(1 + \frac{x}{2} + o(x)\right) \sim \frac{x}{2}$. Тогда при $x \to +0$ $f(x,\alpha) \sim Cx^{2\alpha+1}$. При $x \to +\infty$: $3x^2 + x^3 \sim x^3$ и $(3x^2 + x^3)^\alpha \sim x^{3\alpha}$, $\ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right) \sim \ln(e^x) = x$.

Тогда при $x \to +\infty$ $f(x,\alpha) \sim Cx^{3\alpha+1}$. Условие сходимости интеграла имеет вид $\begin{cases} 2\alpha+1 > -1, \\ 3\alpha+1 < -1 \end{cases} \iff$ $\Rightarrow \begin{cases} \alpha > -1, \\ \alpha < -\frac{2}{3}, \end{cases}$ т.е. интеграл сходится при $\alpha \in \left(-1, -\frac{2}{3}\right)$ и расходится при остальных значениях α.

5. 1) Доказательство поточечной сходимости ряда при всех $x \in (0,1)$ и $(1,+\infty)$. Для любого x_0:

$$|f_n(x_0)| \leqslant \frac{\pi}{2}\ln\left(1+\frac{x_0^2}{n^{3/2}}\right) = O\left(\frac{x_0^2}{n^{3/2}}\right).$$

Числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, где $a_n = \dfrac{1}{n^{3/2}}$ сходится по интегральному признаку сходимости знакопостоянных числовых рядов, значит и исходный ряд сходится при $x = x_0$, по признаку сравнения.

2) Доказательство равномерной сходимости на множестве $x \in (0,1)$. Здесь для любого x имеем

$$|f_n(x)| \leqslant \frac{\pi}{2}\ln\left(1+\frac{x}{n^{3/2}}\right) \leqslant \frac{\pi}{2}\ln\left(1+\frac{1}{n^{3/2}}\right) \leqslant \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{n^{3/2}}.$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, где $a_n = \frac{\pi}{2}\cdot n^{-3/2}$, является сходящимся, значит данный функциональный ряд сходится равномерно на $(0,1)$ по признаку Вейерштрасса.

3) Доказательство отсутствия равномерной сходимости при $x \in (1,+\infty)$. Один из методов доказательства — показать, что общий член ряда не стремится к нулю равномерно при $x \in (1,+\infty)$, т.е. не выполнено условие $\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\,N(\varepsilon)\ \forall\,x \in (1,+\infty)$: $|f_n(x)| < \varepsilon$. Возьмём $x_n = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ ($x_n \in (1,+\infty)$ при $n \geqslant 1$). Тогда

$$f_n(x_n) = \operatorname{arctg}\left(n\sin\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)\right)\cdot\ln\left(1+\frac{\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)^2}{n^{3/2}}\right) \sim$$

$\sim \operatorname{arctg} n \cdot \ln\left(\dfrac{n^2}{n^{3/2}}\right)$. При $n \to \infty$ $f_n(x_n) \sim \ln(\sqrt{n}) \not\to 0$.

6. $f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \arcsin x - \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, $f''(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-1/2}$. Функция $(1+t)^{-1/2}$ имеет разложение в ряд по степеням t: $(1+t)^{-1/2} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} C_n t^n$, где $C_n = C_{-1/2}^n = \dfrac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\ldots\left(\frac{1}{2}-(n-1)\right)}{n!}$. Радиус сходимости этого ряда можно найти по формуле: $\frac{1}{R} = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{C_n}$, или

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_n}{C_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!}{n!\left(-\frac{1}{2}-n\right)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)}{-\frac{1}{2}-n}\right| = 1.$$

Тогда для функции $f''(x)$, положив $t=-x^2$, получим разложение в степенной ряд: $f''(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n} C_{-1/2}^n$. Радиус сходимости этого ряда по переменной x: $R = \sqrt{1} = 1$, и внутри интервала $|x|<1$ этот ряд сходится равномерно, его можно почленно интегрировать и дифференцировать, радиус сходимости ряда от этого не меняется. Тогда $f'(x) = \int f''(x)\,dx + C = \int\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n C_{-1/2}^n x^{2n}\right)dx + C = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n C_{-1/2}^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1} + C$. Для нахождения константы используем значение $f'(x)$ при $x=0$: $0 = \arcsin 0 = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n C_{-1/2}^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}\bigg|_{x=0} + C = 0 + C$. Отсюда $C=0$ и $f'(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n C_{-1/2}^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

Аналогично,

$$f(x) = \int f'(x)\,dx + C =$$
$$= \int\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n C_{-1/2}^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right)dx + C =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n C_{-1/2}^n \frac{x^{2n+2}}{(2n+1)(2n+2)} + C.$$

Здесь $f(0) = 1 = \left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n C_{-1/2}^n \frac{x^{2n+2}}{(2n+1)(2n+2)}\right)\Bigg|_{x=0} + C$, т.е. $C = 1$. Окончательно, разложение $f(x)$ в степенной ряд: $f(x) = 1 + \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n C_{-1/2}^n \frac{x^{2n+2}}{(2n+1)(2n+2)}$. Радиус сходимости этого ряда такой же, как у функции $f''(x)$, т.е. $R = 1$.

7. Искомая прямая параллельна прямой

$$l_1 : \begin{cases} x - y + z + 3 = 0, \\ 2x + 4y + 5 = 0, \end{cases}$$

поэтому их направляющие векторы совпадают. Прямая l_1 задана как пересечение плоскостей, тогда в прямоугольной системе координат её направляющий вектор можно найти по формуле $a = [n_1, n_2]$, где n_1, n_2 — нормальные векторы этих плоскостей: $n_1 = (1, -1, 1)$, $n_2 = (2, 4, 0)$. $a = \begin{Vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \end{Vmatrix} = \Big(-4, 2, 6\Big) = 2\Big(-2, 1, 3\Big)$. Тогда каноническое уравнение прямой имеет вид: $\frac{x-1}{-2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{3}$.

8. Расширенная матрица системы имеет вид

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -5 & 2 \\ -1 & 0 & 4 & 2 & 3 \end{array}\right).$$

После её приведения к верхней треугольной форме получим:

$$\left(\begin{array}{cc:cc|c} 1 & -2 & 3 & -5 & 2 \\ 0 & -2 & 7 & -3 & 5 \end{array}\right) .$$

базисный минор

Тогда ранг основной матрицы равен рангу расширенной матрицы, т.е. система совместна. Частное решение неоднородной системы получим, положив $x_3 = x_4 = 0$.

Тогда из второго уравнения $x_2 = -\frac{5}{2}$, из первого уравнения $x_1 = 2 + 2x_2 = -3$, т.е. частное решение имеет вид $\left(-3, -\frac{5}{2}, 0, 0\right)$. Размерность ФСР однородной системы равна 2. Её базисные векторы находим из основной матрицы системы $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -5 \\ 0 & -2 & 7 & -3 \end{pmatrix}$, считая x_3 и x_4 свободными неизвестными. Тогда $x_2 = \dfrac{7x_3 - 3x_4}{2}$, $x_1 = 5x_4 - 3x_3 + 2x_2 = 2x_4 + 4x_3$. Базис ФСР составляют векторы $l_1 = (4, -3, 0, 2)$ и $l_2 = (8, 7, 2, 0)$. Окончательно, общее решение системы имеет вид

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -\frac{5}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_1 \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

9. а) Одним из методов приведения квадратичной формы к каноническому виду является метод выделения полных квадратов. В этом случае:

$$\begin{aligned} K(x_1, x_2, x_3) &= -4x_1^2 - 10x_2^2 - 2x_3^2 + 4x_1x_3 + 6x_2x_3 = \\ &= -(2x_1 - x_3)^2 - x_3^2 - 10x_2 + 6x_2x_3 = \\ &= -(2x_1 - x_3)^2 - (x_3 - 3x_2)^2 - x_2^2 \equiv -y_1^2 - y_2^2 - y_3^2, \end{aligned}$$

где обозначено: $y_1 = 2x_1 - x_3$, $y_2 = x_2$, $y_3 = x_3 - 3x_2$ — формулы перехода к базису, в котором квадратичная форма имеет диагональный вид.

б) Согласно определению, квадратичная форма является положительно (отрицательно) определённой, если для любого вектора $x \neq 0$ из $\mathbb{R}^3$ $K(x_1, x_2, x_3) > 0$ (<0). Тогда, используя п. а): (если вектор $x \neq 0$, то вектор $y = (2x_1 - x_3,\ x_2,\ x_3 - 3x_2)$ также ненулевой) $K(y_1, y_2, y_3) = -y_1^2 - y_2^2 - y_3^2 < 0$, если $y \neq 0$, т.е. квадратичная форма является отрицательно определённой.

в) Ранг квадратичной формы — это число не равных нулю коэффициентов в её каноническом виде, в нашем случае ранг квадратичной формы равен 3.

г) Для записи квадратичной формы в другом базисе потребуется: составить матрицу квадратичной формы в исходном базисе, составить матрицу перехода S к другому базису и воспользоваться формулой для записи матрицы квадратичной формы в другом базисе: $K' = S^T K S$. В нашем случае: матрица квадратичной формы в исходном базисе имеет вид $K = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 2 \\ 0 & -10 & 3 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$; S — матрица перехода к базису $\{e'_1, e'_2, e'_3\}$, $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Тогда

$$K' = S^T K S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 0 & 2 \\ 0 & -10 & 3 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -6 & 2 & 8 \\ 2 & -4 & 2 \\ 8 & 2 & -18 \end{pmatrix}.$$

По матрице квадратичной формы K' записываем последний ответ:

$$K(x'_1, x'_2, x'_3) = -6x_1'^2 - 4x_2'^2 - 18x_3'^2 + 4x'_1x'_2 + 4x'_2x'_3 + 16x'_1x'_3.$$

10. После деления на $x \neq 0$ уравнение приводится к виду $y' + \frac{1}{x} y + \frac{1+x}{x} y^n = 0$, где $n = 2$, т.е. это уравнение Бернулли с $n = 2 > 0$. Тогда уравнение имеет частное решение $y_0 = 0$, и после деления на $y^2 \neq 0$ приводится к виду: $\frac{y'}{y^2} + \frac{1}{x}\,\frac{1}{y} + \frac{1+x}{x} = 0$. Сделав в этом уравнении замену функции $z = y^{1-n}$, т.е. $z = \frac{1}{y}$, $z' = \left(\frac{1}{y}\right)' = \frac{-y'}{y^2}$, получим для $z(x)$ линейное неоднородное уравнение $-z' + \frac{1}{x} z + \frac{1+x}{x} = 0$. Это уравнение решаем методом вариации постоянной. Решение линейного однородного уравнения: $-z' + \frac{z}{x} = 0 \iff \frac{dz}{z} = \frac{dx}{x}$ имеет вид $z = Cx$. Тогда решение неоднородного уравнения ищем в виде $z = C(x)x$. Подставляя в уравнение: $-xC'(x) - C(x) + \frac{1}{x}\,C(x)x + \frac{1+x}{x} = 0$. Отсюда $C'(x) = \frac{1+x}{x^2}$, $C(x) = \int\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}\right)dx = -\frac{1}{x} + \ln x + C$. Следовательно, $z = \left(-\frac{1}{x} + \ln x + C\right)x = -1 + x\ln x + Cx$ и $y = \frac{1}{z} = \frac{1}{-1 + x\ln x + Cx}$. Все решения исходного уравнения имеют вид: $y = \frac{1}{-1 + x\ln x + Cx}$, $C \in \mathbb{R}$, а также $y = 0$.

11. 1) Решение однородного уравнения. Характеристическое уравнение имеет вид $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$. Его корни $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 1$. Тогда общее решение однородного уравнения имеет вид: $C_1e^{3x} + C_2e^{x}$, C_1, $C_2 \in \mathbb{R}$.

2) Подбор частного решения неоднородного уравнения. Правая часть имеет вид $f(x) = P_1(x)e^{\alpha x}$, где $P_1(x)$ — многочлен степени 1, $\alpha = 3$. Поскольку $\alpha = \lambda_1 = 3$, то имеет место резонанс, и частное решение $y_0(x)$ следует искать в виде: $y_0(x) = Q_1(x)e^{\alpha x}x^S$, где $Q_1(x)$ — многочлен степени 1, S — кратность корня λ_1, т.е. $S = 1$. Тогда $y_0(x) = (Ax + B)e^{\alpha x}x = (Ax^2 + Bx)e^{3x}$. Чтобы найти коэффициенты A и B, надо подставить $y_0(x)$ в левую часть уравнения $y_0' = e^{3x}(3Ax^2 + x(3B + 2A) + B)$, $y_0'' = e^{3x}(9Ax^2 + x(9B + 12A) + 6B + 2A)$. Подставляя в уравнение:

$$e^{3x}\Big(9Ax^2 + x(9B + 12A) + 6B + 2A - 4(3Ax^2 + x(3B + 2A) + B) + 3(Ax^2 + Bx)\Big) = 2xe^{3x}.$$

Отсюда $4Ax + 2A + 2B = 2x$. Приравнивая коэффициенты при степенях x^0 и x^1, имеем систему уравнений $\begin{cases} 4A = 2, \\ 2A + 2B = 0. \end{cases}$ Отсюда $A = \frac{1}{2}$, $B = -\frac{1}{2}$ и $y_0(x) =$

$= \left(\frac{1}{2}\,x^2 - \frac{1}{2}\,x\right) e^{3x}$, тогда общее решение уравнения будет $y(x) = \left(\frac{1}{2}\,x^2 - \frac{1}{2}\,x\right) e^{3x} + C_1e^{3x} + C_2e^{x}$, C_1, $C_2 \in \mathbb{R}$.

12. 1) Найдём допустимую экстремаль. $\dfrac{\partial F}{\partial y} = -2xy' + 2y + 4\ln x$, $\dfrac{\partial F}{\partial y'} = 2x^2y' - 2xy$. Тогда вариационное уравнение Эйлера имеет вид $-2xy' + 2y + 4\ln x - \frac{d}{dx}\,(2x^2y' - 2xy) = 0 \iff -2xy' + 2y + 4\ln x - (4xy' + 2x^2y'' - 2xy' - 2y) = 0$. После упрощения получаем краевую задачу для $y_0(x)$ — допустимой экстремали:

$$\begin{cases} x^2y'' + 2xy' - 2y = 2\ln x, \\ y(1) = -0,5;\ y(e) = -1,5. \end{cases}$$

Дифференциальное уравнение для $y_0(x)$ — это неоднородное дифференциальное уравнение Эйлера второго порядка. Оно приводится к дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами заменой $x = e^t$. Тогда $y' = \dfrac{dy}{dx} = \dot{y}e^{-t}$, $y'' = \frac{d}{dx}\,(ye^{-t}) = e^{-t}\,\frac{d}{dt}\,(\dot{y}e^{-t}) = e^{-2t}(\ddot{y} - \dot{y})$. Уравнение примет вид $\ddot{y} - \dot{y} + 2\dot{y} - 2y = 2t \iff \ddot{y} + \dot{y} - 2y = 2t$. Общее решение однородного уравнения: $y_1(t) = C_1e^{-2t} + C_2e^{t}$. Частное решение неоднородного уравнения имеет вид $y_2(t) = At + B$. Подставляя в уравнение: $A - 2(At + B) = 2t$, отсюда $A = -1$, $B = -\frac{1}{2}$. Тогда $y_0(t) = y_1(t) + y_2(t) = C_1e^{-2t} + C_2e^{t} - t - \frac{1}{2}$ и $y_0(x) = \dfrac{C_1}{x^2} + C_2x - \ln x - \frac{1}{2}$.

Константы C_1, C_2 находим из граничных условий:

$$\begin{cases} y(1) = -\frac{1}{2} = C_1 + C_2 - \frac{1}{2}\,, \\ y(e) = -\frac{3}{2} = \dfrac{C_1}{e^2} + C_2e - 1 - \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Отсюда $C_1 = C_2 = 0$ и допустимая экстремаль имеет вид $y_0(x) = -\ln x - \frac{1}{2}$.

2) Исследование функционала на экстремум при $y = y_0(x)$. Пусть $h(x) \in C_2[1, e]$, $|h(x)| \leqslant \delta$, $h(1) = h(e) = 0$.

Тогда приращение функционала имеет вид:

$$\Delta J = J(x_1, y_0 + h, y_0' + h') - J(x, y_0, y_0') =$$
$$= \int_1^e \Big[x^2(y_0' + h')^2 - 2x(y_0 + h)(y_0' + h') + (y_0 + h)^2 +$$
$$+ 4(y_0 + h)\ln x - (x^2 y_0'^2 - 2xy_0'y_0 + y_0^2 + 4y_0 \ln x)\Big]\, dx =$$
$$= \int_1^e \Big(x^2h'^2 + \underline{2x^2y_0'h'} - 2xy_0'h - \underline{2xy_0h'} -$$
$$-2xhh' + 2y_0h + h^2 + 4h\ln x\Big)\, dx.$$

Подчёркнутые слагаемые после интегрирования по частям примут вид:

$$\int_1^e (2x^2y_0'h' - 2xy_0h')\, dx = (2x^2y_0'h - 2xy_0h)\Big|_1^e -$$
$$= \int_1^e \big((2x^2y_0')' - (2xy_0)'\big)\, h\, dx =$$
$$= -\int_1^e (4xy_0' + 2x^2y_0'' - 2xy_0' - 2y_0)h\, dx.$$

Тогда

$$\Delta J = \int_1^e \Big[(x^2h'^2 - 2xhh' + h^2) +$$
$$+(-4xy_0' - 2x^2y_0'' + 2xy_0' + 2y_0 - 2xy_0' + 2y_0 + 4\ln x)h\Big]\, dx =$$
$$= \int_1^e (x^2h'^2 - 2xhh' + h^2)\, dx - 2\int_1^e (x^2y_0'' + 2xy_0' - 2y_0 - 2\ln x)h\, dx =$$
$$= \int_1^e (x^2h'^2 - 2xhh' + h^2)\, dx,$$

т.к. внутри второго интеграла получено уравнение Эйлера для $y_0(x)$. Для определения знака интеграла $\int_1^e (x^2h'^2 - - 2xhh' + h^2)\, dx$ проинтегрируем по частям второе слагаемое:

$$-\int_1^e 2xhh'\, dx = -\int_1^e x\, d(h^2) = -xh^2\Big|_1^e + \int_1^e x'h^2\, dx = \int_1^e h^2 dx.$$

Окончательно получаем

$$\Delta J = \int_1^e (x^2h'^2 + h^2 + h^2)\,dx = \int_1^e (x^2h'^2 + 2h^2)\,dx \geqslant 0.$$

Следовательно, функция $y_0(x) = -\ln x - \frac{1}{2}$ даёт минимум функционалу $J(x, y, y')$.

13. Стационарные точки функции $f(x, y)$ находим, используя необходимое условие экстремума:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0: \begin{cases} 0 = \dfrac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 - 16x, \\ 0 = \dfrac{\partial f}{\partial y} = 6y \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 4x(x^2-4) = 0, \\ y = 0, \end{cases}$$

т.е. имеем 3 стационарных точки: $M_1(0,0)$, $M_2(2,0)$, $M_3(-2,0)$. Для проверки их на экстремум находим: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2 - 16$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6$; $d^2 f = (12x^2 - 16)\,dx^2 + 6\,dy^2$. Матрица квадратичной формы, отвечающей $d^2 f$, имеет вид $\begin{pmatrix} 12x^2-16 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$. В точке M_1 имеем: $d^2 f = \begin{pmatrix} -16 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$, $\Delta_1 = -16$, $\Delta_2 = -96 < 0$, значит точка $M_1(0,0)$ не является точкой экстремума. В точках M_2 и M_1 матрица $d^2 f = \begin{pmatrix} 32 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$.

$\Delta_1 = 32 > 0$, $\Delta_2 = 32 \cdot 6 > 0$, значит точки M_1 и M_2 являются точками локального минимума функции $f(x, y)$.

14. Первый способ расстановки повторных интегралов: в области D надо провести луч $\varphi = \varphi_0 = \mathrm{const}$ до его пересечения с границей области D. Тогда область D — это сумма двух областей, элементарных относительно φ: $D = D_1 \cup D_2$, где D_1: $0 \leqslant \varphi \leqslant \alpha$, D_2: $\alpha < \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$, $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{1}{2}$. В области D_1: луч $\varphi = \varphi_1$ пересекает границу области D на прямой $x = 2$, следовательно $r\cos\varphi = 2$, откуда $r = \dfrac{2}{\cos\varphi}$. В области D_2 луч $\varphi = \varphi_2$ пересекает границу области D на прямой $y = 1$, следовательно $r\sin\varphi = 1$, откуда $r = \dfrac{1}{\sin\varphi}$. Минимальное значение r в обоих случаях равно нулю. Тогда

$$I = \int_0^{\operatorname{arctg}\frac{1}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{2}{\cos\varphi}} rf(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,dr + \int_{\operatorname{arctg}\frac{1}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{1}{\sin\varphi}} rf(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,dr.$$

Второй способ: в области D надо провести дуги окружностей $r = r_0 = \mathrm{const}$, до их пересечения с границей области D. Тогда область D — это сумма трёх элементарных относительно r областей: $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3$, D_1: $0 \leqslant r \leqslant 1$; D_2: $1 \leqslant r \leqslant 2$; D_3: $2 \leqslant r \leqslant \sqrt{1+2^2} = \sqrt{5}$. В области D_1: дуга окружности $r = r_1$ пересекает границы области D на оси Ox ($\varphi = 0$) и на оси Oy ($\varphi = \frac{\pi}{2}$). В области D_2: дуга окружности $r = r_2$ пересекает границы области D на оси Ox ($\varphi = 0$) и на прямой $y = 1$, следовательно $r\sin\varphi = 1$, откуда $\varphi = \arcsin\left(\frac{1}{r}\right)$. В области D_3: дуга окружности $r = r_3$ пересекает границы области D на прямых $x = 2$ и $y = 1$, откуда находим соответственно $r\cos\varphi = 2$, $\varphi_1 = \arccos\left(\frac{2}{r}\right)$ и $r\sin\varphi = 1$, $\varphi_2 = \arcsin\left(\frac{1}{r}\right)$. Тогда

$$I = \int_0^1 dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)r\,d\varphi + \int_1^2 dr \int_0^{\arcsin\left(\frac{1}{r}\right)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)r\,d\varphi + \int_2^{\sqrt{5}} dr \int_{\arccos\left(\frac{2}{r}\right)}^{\arcsin\left(\frac{1}{r}\right)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)r\,d\varphi.$$

15. Первый способ: параметризация кривой Γ: $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t. \end{cases}$ Контур Γ — замкнутый, ориентирован против часовой стрелки, поэтому $t \in [0, 2\pi]$. Тогда $I = \int_0^{2\pi}(e^{\cos t}(\cos t)' - (\cos^3 t + \sin t)(\sin t)')\,dt = \int_0^{2\pi}(-e^{\cos t}\sin t - (\cos^3 t +

$+\ \sin t)\cos t)\,dt \ = \ e^{\cos t}\Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{4}\sin 2t\Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi}\cos^4 t\,dt \ =$
$= -\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}(1+\cos 2t)^2\,dt = -\frac{2\pi}{4} - \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\cos^2 2t\,dt = -\frac{\pi}{2} -$
$-\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 4t}{2}\,dt = -\frac{\pi}{2} - \frac{1}{8}\cdot 2\pi = -\frac{3\pi}{4}.$

Второй способ: применение формулы Грина. Тогда

$$I = \iint\limits_D \frac{\partial}{\partial x}\left(\left(-(x^3+y)\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(e^x\right)\right)dx\,dy = \iint\limits_D (-3x^2)\,dx\,dy.$$

Здесь D: $x^2+y^2 \leqslant 1$. Для вычисления последнего интеграла переходим к полярным координатам. Тогда

$$I = -3\iint\limits_{D:\ r\leqslant 1} r^2\cos^2\varphi\cdot r\,dr\,d\varphi = -3\int\limits_0^{2\pi}\cos^2\varphi\,d\varphi\int\limits_0^1 r^3\,dr =$$

$$= -3\,\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\,d\varphi = \frac{-3\pi}{4}\,.$$

16. Разложение функции $f(x)$ в ряд Фурье на интервале $(-e, e)$ имеет вид

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\left(\frac{\pi n x}{e}\right) + b_n\sin\left(\frac{\pi n x}{e}\right)\right).$$

Здесь $e=1$, т.е. $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(\pi n x) + b_n\sin(\pi n x))$.
Так как $\sin x$ — нечётная функция, то коэффициенты разложения a_0 и a_n равны нулю, а коэффициенты b_n вычисляются по формуле:

$$b_n = \int_{-1}^{1} f(x)\sin(\pi n x)\,dx = 2\int_0^1 \sin x\sin(\pi n x)\,dx =$$

$$= \int_0^1 (\cos(x(\pi n - 1)) - \cos(x(\pi n + 1)))\,dx =$$

$$= \frac{\sin(x(\pi n - 1))}{\pi n - 1}\Big|_0^1 - \frac{\sin(x(\pi n + 1))}{\pi n + 1}\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{\sin(\pi n - 1)}{\pi n - 1} - \frac{\sin(\pi n + 1)}{\pi n + 1} = \frac{(-1)^n(-\sin 1)}{\pi n - 1} - \frac{(-1)^n \sin 1}{\pi n + 1} = $$
$$= \frac{(-1)^n \sin 1}{\pi^2 n^2 - 1} \cdot 2\pi n.$$

Тогда разложение функции в ряд Фурье имеет вид: $\sin x = = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin 1 \; 2\pi n}{\pi^2 n^2 - 1} \sin(\pi n x),\ -1 < x < 1.$

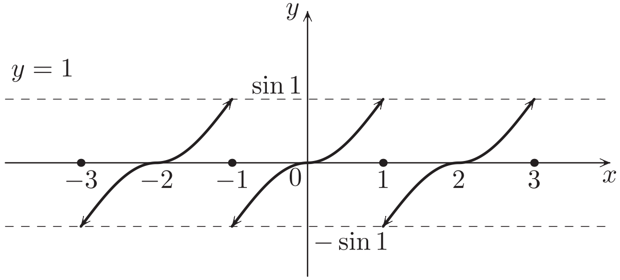

Рис. 17

График суммы ряда изображён на рис. 17. В точках $x = \pm 1$ сумма ряда равна 0, далее она продолжается на всю ось с периодом 2. Ряд Фурье не является равномерно сходящимся на всей вещественной прямой, поскольку сумма равномерно сходящегося ряда из непрерывных функций должна быть непрерывной функцией на всей вещественной прямой.

Вариант 2

1. Асимптоты $x = 0$, $y = 1$. $y' = \dfrac{-4(1 + 2x)}{x^3}$, $y'' = \dfrac{4(4x + 3)}{x^4}$. Локальный минимум в точке $\left(-\frac{1}{2}, -7\right)$, перегиб в точке $\left(-\frac{3}{4}, -\frac{55}{9}\right)$. График функции на рис. 18.

2. $e^{\frac{3}{2}}$.

3. $\ln\left|\dfrac{(\sqrt[3]{x} - 1)^3}{x}\right| + C$.

4. Сходится тогда и только тогда, когда $-\frac{3}{2} < \alpha < 1$.

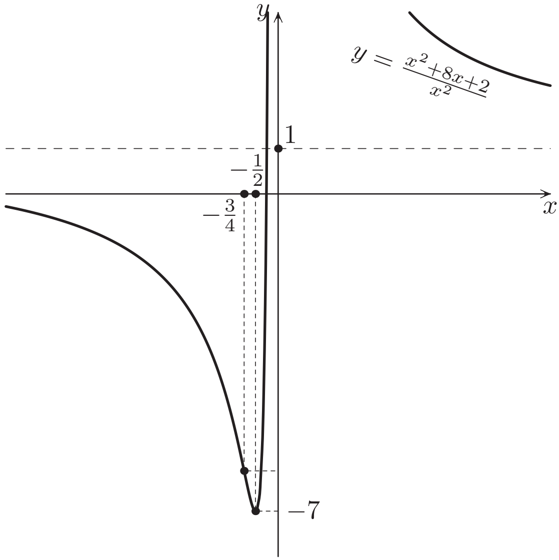

Рис. 18

5. $|u_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{n^{5/3}x^{5/3}}$ — сходится на $(0,1)$ и $(1,+\infty)$. На $(0,1)$: сходится неравномерно, на $(1,+\infty)$: сходится равномерно.

6. $f(x) = \operatorname{arctg} 2 + \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n 3^{2n+1} \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$, $R = \dfrac{1}{3}$.

7. $3x - y + 3z - 2 = 0$.

8. $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $C_1,\ C_2 \in \mathbb{R}$.

9. а) $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$; б) не является; в) $r = 3$; г) $8x_1'^2 + 72x_3'^2 + 6x_1'x_2' - 48x_1'x_3' - 12x_2'x_3'$.

10. $y = \left(C - \frac{1}{3}\cos(e^{x^3})\right) e^{-x^3}$, $C \in \mathbb{R}$.

11. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 5\cos 3t \\ -\cos 3t - 3\sin 3t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 5\sin 3t \\ 3\cos 3t - \sin 3t \end{pmatrix}$, $C_1,\ C_2 \in \mathbb{R}$.

12. Экстремаль $y_0(x) = \dfrac{e^{4x}}{64} - \dfrac{xe^4}{16}$. Минимум.

13. Стационарные точки $(0,0)$, $(-4,0)$. $(0,0)$ — не экстремум, $(-4,0)$ — максимум.

14. $-\frac{1}{12}$. **15.** $\frac{\sqrt{14}}{9}$.

16. $f(x) = \pi + 2\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\sin nx}{n}$. Сходится неравномерно.

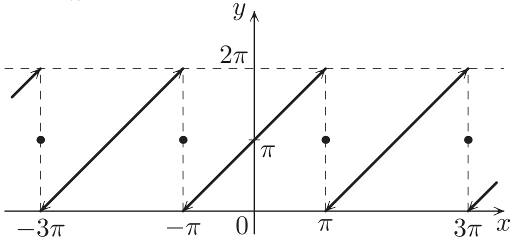

Рис. 19

Вариант 6

1. Асимптоты $x = 0$, $y = -1$ $(x \to +\infty)$. $y' = -\dfrac{\ln x}{x^2}$, $y'' = \dfrac{2\ln x - 1}{x^3}$. Локальный максимум в точке $(1, 0)$, перегиб в точке $\left(\sqrt{e}, \dfrac{3}{2\sqrt{e}} - 1\right)$. График функции на рис. 20.

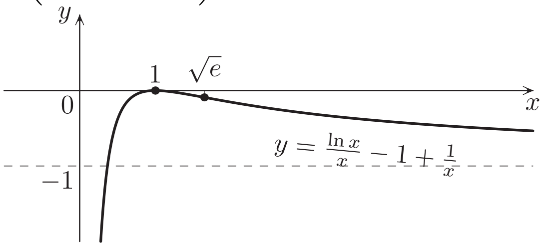

Рис. 20

2. $-\dfrac{3}{56}$.

3. $x - \sqrt{1 - x^2}\arcsin x + C$.

4. Сходится тогда и только тогда, когда $-\dfrac{1}{6} < \alpha < 2$.

5. $|u_n(x)| \leqslant \dfrac{1}{n^2 x^2}$ — сходится на $(0, 1)$ и $(1, +\infty)$. На $(0, 1)$: сходится неравномерно, на $(1, +\infty)$: сходится равномерно.

6. $f(x) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$, $R = 1$.

7. $11x + 6y - 4z - 40 = 0$.

8. $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + C_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$, C_1, $C_2 \in \mathbb{R}$.

9. а) $y_1^2 - y_2^2$; б) не является; в) $r = 2$; г) $6x_1'x_2' - 12x_2'x_3'$.

10. $y = \left(\dfrac{x + e^{-x}}{2} + C\right)(e^x + 1)$, $C \in \mathbb{R}$.

11. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-2t}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

12. Экстремаль $y_0(x) = \sin x - 5x$. Не экстремум.

13. Стационарные точки $(0, 0)$, $(0, 2)$, $(0, -2)$. $(0, 0)$ — не экстремум, $(0, \pm 2)$ — максимум.

14. $\frac{5}{24}$. **15.** $-\frac{1}{6}$.

16. $f(x) = \frac{2}{\pi} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\pi\left(n^2 - \frac{1}{4}\right)} \cos nx$. Сходится равномерно.

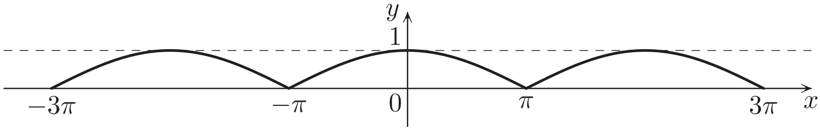

Рис. 21