УДК 517

ДОБАВЛЕНИЕ К ЛЕКЦИЯМ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ ФУПМ & ФИВТ 2012

М. В. БАЛАШОВ

Некоторые темы, прочитанные на лекциях в осеннем семестре 2012.

Ключевые слова: математический анализ.

1. Теорема о промежуточных значениях производной (теорема Дарбу)

Теорема 1.1. *(Дарбу). Пусть $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ дифференцируема (т.е. существует конечная производная $f'(x)$ для всякого $x \in (a,b)$, а также конечные односторонние производные $f'_+(a)$ и $f'_-(b)$), $c \in \mathbb{R}$ и $f'_+(a) < c < f'_-(b)$. Тогда найдется точка $x_0 \in (a,b)$ такая, что $f'(x_0) = c$.*

Доказательство. В силу предельных соотношений

$$\lim_{h\to+0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'_+(a), \qquad \lim_{h\to+0} \frac{f(b-h)-f(b)}{-h} = f'_-(b)$$

найдется такое число $h \in \left(0, \frac{b-a}{2}\right)$, что

$$\left|\frac{f(a+h)-f(a)}{h} - f'_+(a)\right| < \frac{c - f'_+(a)}{2},$$

$$\left|\frac{f(b-h)-f(b)}{-h} - f'_-(b)\right| < \frac{f'_-(b) - c}{2},$$

откуда имеем неравенства

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} < c < \frac{f(b-h)-f(b)}{-h} = \frac{f(b)-f(b-h)}{h}. \tag{1.1}$$

Определим функцию $\varphi(x) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ при $x \in [a, b-h]$. Функция φ непрерывна на отрезке $[a, b-h]$, в силу (1.1) $\varphi(a) < c < \varphi(b-h)$. По теореме Больцано-Коши о промежуточных значениях непрерывной на отрезке функции получаем, что найдется точка $\xi \in (a, b-h)$ для которой $\varphi(\xi) = \frac{f(\xi+h)-f(\xi)}{h} = c$.

Применяя к функции $f : [\xi, \xi+h] \to \mathbb{R}$ теорему Лагранжа о среднем, получаем, что для некоторой точки $x_0 \in (\xi, \xi+h)$ справедливо равенство

$$c = \frac{f(\xi+h)-f(\xi)}{h} = \frac{f'(x_0)h}{h} = f'(x_0).$$

□

2. Некоторые свойства выпуклых функций

Напомним, что функция $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ ($a,b\in\overline{\mathbb{R}}$) *выпуклая* (устаревшее название: *выпуклая вниз*), если $\forall x_1,x_2\in(a,b)$, $\forall t\in(0,1)$ имеет место неравенство

$$f\left((1-t)x_1+tx_2\right)\le(1-t)f(x_1)+tf(x_2).$$

Функция $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ ($a,b\in\overline{\mathbb{R}}$) *вогнутая* (устаревшее название: *выпуклая вверх*), если функция $-f$ выпуклая.

Упражнение 1. Пусть функция $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ выпуклая и $f'(x_0)=0$ для некоторой точки $x_0\in(a,b)$. Доказать, что для любой точки $x\in(a,b)$ выполнено неравенство $f(x_0)\le f(x)$, т.е. точка x_0 является точкой глобального минимума f на промежутке (a,b).

Лемма 2.1. *Пусть $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ выпуклая и $\exists f'(x_0)\in\mathbb{R}$ для некоторой точки $x_0\in(a,b)$. Тогда*

$$f(x)\ge f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0),\qquad\forall x\in(a,b).\tag{2.2}$$

Доказательство. Зафиксируем $x\in(a,b)$, $x\ne x_0$ (при $x=x_0$ формула (2.2) очевидна). Запишем условие выпуклости f

$$f\left((1-t)x_0+tx\right)\le(1-t)f(x_0)+tf(x)$$

в виде

$$\frac{f\left(x_0+t(x-x_0)\right)-f(x_0)}{t}\le f(x)-f(x_0),$$

или, что то же,

$$(x-x_0)\frac{f\left(x_0+t(x-x_0)\right)-f(x_0)}{(x-x_0)\,t}\le f(x)-f(x_0).$$

Переходя к пределу $t\to0$ и производя замену переменной $\Delta x=(x-x_0)t$, по теореме о замене переменной при предельном переходе [1, Теорема 3 (a) Глава 2 §6] получаем, что

$$\lim_{t\to0}\frac{f\left(x_0+t(x-x_0)\right)-f(x_0)}{(x-x_0)\,t}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0),$$

откуда следует формула (2.2). □

Лемма 2.2. *Пусть $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ дифференцируема и f' нестрого монотонно возрастает на промежутке (a,b). Тогда для любой пары точек $x_0,x\in(a,b)$ выполнено неравенство (2.2).*

Доказательство. Применяя к функции f на отрезке с концами в точках x_0 и x теорему Лагранжа о среднем, получаем, что для некоторой точки ξ между x_0 и x выполнено равенство

$$f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)=f'(\xi)(x-x_0)-f'(x_0)(x-x_0)=\left(f'(\xi)-f'(x_0)\right)(x-x_0).$$

Если $x<x_0$, то $\xi\in(x,x_0)$ и $f'(\xi)\le f'(x_0)$, т.е. выполнена формула (2.2).

Если $x>x_0$, то $\xi\in(x_0,x)$ и $f'(x_0)\le f'(\xi)$, т.е. снова выполнена формула (2.2). □

Теорема 2.1. *Пусть $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ дифференцируема. Тогда выпуклость функции f на промежутке (a,b) эквивалентна нестрого монотонному возрастанию функции f' на (a,b).*

Доказательство. Пусть f выпукла, $x_1,x_2\in(a,b)$, $x_1<x_2$. По формуле (2.2) леммы 2.1 имеем неравенства

$$f(x_2) \geq f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1), \tag{2.3}$$

$$f(x_1) \geq f(x_2) + f'(x_2)(x_1 - x_2). \tag{2.4}$$

Складывая неравенства (2.3) и (2.4) почленно и сокращая на $f(x_1)+f(x_2)$ получаем, что

$$0 \geq (f'(x_1) - f'(x_2))\,(x_2 - x_1).$$

В силу $x_2 - x_1 > 0$ из последнего неравенства следует, что $f'(x_1) \leq f'(x_2)$, т.е. f' нестрого монотонно возрастает на промежутке (a, b).

Пусть f' нестрого монотонно возрастает на промежутке (a, b). Зафиксируем $x_1, x_2 \in (a, b)$, $t \in (0, 1)$ и определим точку $x_0 = (1-t)x_1 + tx_2$. По формуле (2.2) (которая теперь следует из леммы 2.2) получаем, что

$$f(x_1) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0), \tag{2.5}$$

$$f(x_2) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x_2 - x_0). \tag{2.6}$$

Умножив неравенство (2.5) на $1 - t$, а неравенство (2.6) на t, сложим их и получим (напомним, что $x_0 = (1 - t)x_1 + tx_2$)

$$(1 - t)f(x_1) + tf(x_2) \geq f(x_0) + f'(x_0)\,((1 - t)x_1 + tx_2 - x_0) = f(x_0),$$

т.е. неравенство из определения выпуклой функции. $\square$

Следствие 2.1. *Пусть $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ выпуклая и дифференцируемая. Тогда f' непрерывная функция на промежутке (a, b).*

Доказательство. По теореме 2.1 f' нестрого монотонно возрастает на (a, b). По теореме о пределе монотонной функции [1, Теорема 1 Глава 2 §5] для всякой точки $x_0 \in (a, b)$ существуют конечные пределы $f'(x_0 \pm 0)$.

По следствию из теоремы Лагранжа о среднем (1, 2) [1, Глава 3 §4] имеем

$$f'_-(x_0) = f'(x_0 - 0), \qquad f'_+(x_0) = f'(x_0 + 0),$$

и, в силу существования производной в точке x_0, $f'(x_0) = f'_\pm(x_0)$. Отсюда следует, что $f'(x_0) = f'(x_0 - 0) = f'(x_0 + 0)$. Последнее и означает непрерывность производной в точке x_0. $\square$

Упражнение 2. Пусть функция $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ выпуклая. Доказать, что для любой точки $x \in (a, b)$ существуют односторонние производные $f'_\pm(x) \in \mathbb{R}$. Доказать, что функции $f'_\pm$ нестрого монотонно возрастают на (a, b) и $f'_-(x) \leq f'_+(x)$ для всех $x \in (a, b)$.

Упражнение 3. Пусть функция $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ выпуклая. Доказать, что найдется не более счетное (т.е. конечное или счетное) подмножество $X \subset (a, b)$ такое, что для любой точки x множества $(a, b)\backslash X$ существует конечная производная $f'(x)$.

Указание. Докажите, что если $x_1 < x_2$, то $f'_+(x_1) \leq f'_-(x_2)$. Используйте результат упражнения 2.

Теорема 2.2. [1] *Пусть функция $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ выпуклая. Тогда f непрерывна на промежутке (a,b).*

Доказательство. Зафиксируем $x_0\in(a,b)$. Пусть отрезок $[c,d]\subset(a,b)$ такой, что $x_0\in(c,d)$. Тогда любая точка $x\in(c,d)$ может быть представлена в виде $x=(1-t)c+td$ для некоторого числа $t\in[0,1]$. Отсюда для любого $x\in[c,d]$ выполнена оценка $f(x)=f((1-t)c+td)\le(1-t)f(c)+tf(d)\le\max\{f(c),f(d)\}<+\infty$. Итак, найдется окрестность U точки x_0, в которой функция f ограничена сверху.

Обозначим

$$\limsup_{x\to x_0} f(x)=\sup\Big\{\lim_{k\to\infty} f(z_k)\mid \{z_k\}_{k=1}^{\infty}\subset U - \text{последовательность Гейне в точке } x_0 \\ \text{для которой существует предел последовательности } \{f(z_k)\}_{k=1}^{\infty}\Big\}.$$

Поскольку f ограничена сверху на U, то $\limsup\limits_{x\to x_0} f(x)<+\infty$.

Пусть последовательность $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}\subset U$ такова, что $x_k\to x_0$, $x_k\ne x_0$ для всех k и

$$\lim_{k\to\infty} f(x_k)=\limsup_{x\to x_0} f(x)$$

Упражнение 4. Почему такая последовательность $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ существует?

Определим $\{y_k\}$ из условия $x_k=\frac{x_0+y_k}{2}$, при этом $y_k\to x_0$. В силу выпуклости f имеем

$$f(x_k)\le\frac{1}{2}f(x_0)+\frac{1}{2}f(y_k),$$

$$\limsup_{x\to x_0} f(x)=\lim_{k\to\infty} f(x_k)\le\frac{1}{2}f(x_0)+\frac{1}{2}\limsup_{k\to\infty} f(y_k)\le\frac{1}{2}f(x_0)+\frac{1}{2}\limsup_{x\to x_0} f(x).$$

Итак,

$$\limsup_{x\to x_0} f(x)\le f(x_0). \tag{2.7}$$

Обозначим

$$\liminf_{x\to x_0} f(x)=\inf\Big\{\lim_{k\to\infty} f(z_k)\mid \{z_k\}_{k=1}^{\infty}\subset U - \text{последовательность Гейне в точке } x_0 \\ \text{для которой существует предел последовательности } \{f(z_k)\}_{k=1}^{\infty}\Big\}.$$

Пусть последовательность $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}\subset U$ такова, что $x_k\to x_0$, $x_k\ne x_0$ для всех k и

$$\lim_{k\to\infty} f(x_k)=\liminf_{x\to x_0} f(x).$$

Определим $\{y_k\}$ из условия $x_0=\frac{x_k+y_k}{2}$, при этом $y_k\to x_0$. В силу выпуклости f имеем

$$f(x_0)\le\frac{1}{2}f(x_k)+\frac{1}{2}f(y_k),$$

откуда

$$f(x_0)\le\frac{1}{2}\limsup_{k\to\infty} f(y_k)+\frac{1}{2}\lim_{k\to\infty} f(x_k)\le\frac{1}{2}\limsup_{x\to x_0} f(x)+\frac{1}{2}\liminf_{x\to x_0} f(x)\le\frac{1}{2}f(x_0)+\frac{1}{2}\liminf_{x\to x_0} f(x)$$

и

$$f(x_0)\le\frac{1}{2}\liminf_{x\to x_0} f(x).$$

Из последнего неравенства и формулы (2.7) вытекают оценки

$$f(x_0)\le\liminf_{x\to x_0} f(x)\le\limsup_{x\to x_0} f(x)\le f(x_0).$$

---

[1] Теорема не читалась на лекции.

Это означает непрерывность f в точке x_0 (почему?). $\square$

Упражнение 5. Функция $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ выпуклая. Верно ли, что она непрерывна на $[a,b]$?

Упражнение 6. Функция $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ выпуклая. Доказать, что для любого $n \in \mathbb{N}$, чисел $\{x_k\}_{k=1}^n \subset (a,b)$ и $\{t_k\}_{k=1}^n \subset [0,1]$: $\sum\limits_{k=1}^n t_k = 1$ выполнено неравенство

$$f\left(\sum_{k=1}^n t_k x_k\right) \le \sum_{k=1}^n t_k f(x_k).$$

3. Эквивалентность норм в $\mathbb{R}^n$

Две нормы $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ в $\mathbb{R}^n$ называются эквивалентными, если существуют такие числа $C, D > 0$, что для любого $x \in \mathbb{R}^n$ выполняются неравенства

$$C\|x\|_1 \le \|x\|_2 \le D\|x\|_1.$$

Теорема 3.1. *Все нормы в $\mathbb{R}^n$ эквивалентны.*

Доказательство. Пусть $\|x\|_e = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^n x_k^2}$ — евклидова норма, и $\|x\|$ — некоторая норма. Покажем, что эти две нормы эквивалентны.

Пусть $e_k = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ — стандартный базис в $\mathbb{R}^n$ (1 стоит на k-м месте), $1 \le k \le n$.

Пусть $x = (x_1, \dots, x_n) = \sum\limits_{k=1}^n x_k e_k \in \mathbb{R}^n$.

$$\|x\| = \left\|\sum_{k=1}^n x_k e_k\right\| \le \sum_{k=1}^n |x_k|\|e_k\| \le \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^n \|e_k\|^2} = A\|x\|_e,$$

где $A = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^n \|e_k\|^2} > 0$.

Итак, при $C = A^{-1}$ для любого $x \in \mathbb{R}^n$ выполнена оценка

$$C\|x\| \le \|x\|_e. \tag{3.8}$$

Допустим, что

$$\forall m \in \mathbb{N}\, \exists \tilde{x}^{(m)} \in \mathbb{R}^n : \|\tilde{x}^{(m)}\|_e > m\|\tilde{x}^{(m)}\| \ge 0. \tag{3.9}$$

Отсюда в частности следует, что $\|\tilde{x}^{(m)}\|_e > 0$ и значит $\tilde{x}^{(m)} \ne 0$.

Определим $x^{(m)} = \frac{\tilde{x}^{(m)}}{\|\tilde{x}^{(m)}\|_e}$, $\|x^{(m)}\|_e = 1$ для всех $m \in \mathbb{N}$. Перепишем условие (3.9) в виде

$$\forall m \in \mathbb{N}\, \exists x^{(m)} \in \mathbb{R}^n : \|x^{(m)}\|_e = 1 > m\|x^{(m)}\|. \tag{3.10}$$

Рассмотрим последовательность векторов $x^{(m)} = (x_1^{(m)}, \dots, x_n^{(m)})$, $m \in \mathbb{N}$.

$$1 = \|x^{(m)}\|_e^2 = \sum_{l=1}^n \left(x_l^{(m)}\right)^2 \ge \left(x_k^{(m)}\right)^2, \qquad \forall k,$$

т.е. последовательности $\{x_k^{(m)}\}_{m=1}^\infty$ ограничены при всех $1 \le k \le n$.

Выделим по теореме Больцано-Вейерштрасса из ограниченной последовательности $\{x_1^{(m)}\}_{m=1}^{\infty}$ сходящуюся подпоследовательность $\{x_1^{(m_j)}\}_{j=1}^{\infty}$.

Рассмотрим последовательность векторов $x^{(m_j)} = (x_1^{(m_j)}, \dots, x_n^{(m_j)})$, $j \in \mathbb{N}$. Последовательность $\{x_2^{(m_j)}\}_{j=1}^{\infty}$ ограничена, следовательно из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x_2^{(m_{j_i})}\}_{i=1}^{\infty}$. При этом последовательность $\{x_1^{(m_{j_i})}\}_{i=1}^{\infty}$ будет сходиться как подпоследовательность сходящейся последовательности $\{x_1^{(m_j)}\}_{j=1}^{\infty}$. Поэтому у набора векторов $x^{(m_{j_i})} = (x_1^{(m_{j_i})}, x_2^{(m_{j_i})}, \dots, x_n^{(m_{j_i})})$, $i \in \mathbb{N}$, первые две компоненты образуют сходящиеся последовательности.

Продолжая этот процесс, получим, что можно выделить из набора векторов $\{x^{(m)}\}_{m=1}^{\infty}$ подпоследовательность векторов, которую мы обозначим через $\{x^{(m_j)}\}_{j=1}^{\infty}$, у которой каждый компонент сходится: $\lim\limits_{j\to\infty} x_k^{(m_j)} = x_k^0 \in \mathbb{R}$, $1 \le k \le n$.

Определим $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0) \in \mathbb{R}^n$. Отсюда получаем, что

$$\|x^{(m_j)} - x^0\|_e \to 0, \qquad j \to \infty.$$

Из условия $\sum\limits_{k=1}^{n} \left(x_k^{(m_j)}\right)^2 = 1$ имеем в пределе по $j \to \infty$, что $\sum\limits_{k=1}^{n} (x_k^0)^2 = 1$, откуда

$$x^0 \neq 0. \tag{3.11}$$

Из условия (3.10) получаем, что

$$\|x^{(m_j)}\| < \frac{1}{m_j}, \qquad \forall j. \tag{3.12}$$

Из оценки (3.8) следует ($A = C^{-1}$)

$$\|x^{(m_j)} - x^0\| \le A\|x^{(m_j)} - x^0\|_e \to 0, \qquad j \to \infty. \tag{3.13}$$

Из оценок (3.12) и (3.13) вытекает

$$\|x^0\| \le \|x^{(m_j)}\| + \|x^{(m_j)} - x^0\| \to 0, \qquad j \to \infty,$$

т.е. $\|x^0\| \le 0$ и $x^0 = 0$. Это противоречит (3.11). Следовательно, утверждение (3.9) неверно. □

Список литературы

[1] Г. Е. Иванов, Лекции по математическому анализу, Часть 1, М.: Изд. МФТИ, 2011, 317 с.

Кафедра высшей математики, Московский физико-технический институт, Институтский пер. 9, Долгопрудный, Московская область, Россия 141700. balashov73@mail.ru