МИНИСТЕРСТВО ОБЩЕГО И
ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ВОЛГОГРАДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ВОЛЖСКИЙ ГУМАНИТАРНЫЙ ИНСТИТУТ

В.В. Горяйнов

Курс лекций по теории функций комплексного переменного

Волгоград 1998

ББК 22.161.5
Г 71

Рецензенты: доктор физ.-мат. наук, профессор В.М. Миклюков, доктор физ.-мат. наук, профессор Д.В. Прохоров, кандидат физ.-мат. наук, доцент В.А. Ботвинник

Печатается по решению учебно-методической комиссии ВГИ ВолГУ

Г 71 **Горяйнов В.В. Курс лекций по теории функций комплексного переменного.– Волгоград: Издательство Волгоградского государственного университета, 1998.-124 с.**

ISBN 5-85534-147-X

Пособие содержит курс лекций по теории аналитических функций для студентов университетов математических специальностей.

Систематическое использование понятия индекса точки относительно замкнутой кривой делает изложение более строгим и позволяет дать более наглядную трактовку основным принципам теории.

Может быть использовано преподавателями в формировании курсов лекций и в методической работе.

ISBN 5-85534-147-X

Введение

Настоящий курс лекций рассчитан на 70 лекционных часов. Он неоднократно читался в Донецком государственном университете и Волжском гуманитарном институте ВолГУ. Мотивом к его написанию было желание изложить достаточно лаконично доказательства основных теорем теории аналитических функций, не используя традиционные нечеткие геометрические описания, которые существенно снижают уровень строгости рассуждений. Как правило, уровень строгости изложения теории аналитических функций определяется доказательством теоремы Коши. По существу, в этой теореме требуется осуществить переход от локального результата к глобальному. Поэтому на первый план выступают топологические рассмотрения. В данном пособии необходимые рассуждения проводятся на основе понятия индекса точки относительно замкнутой кривой. В значительной мере эти рассуждения являются обработкой изложения из монографии Л.Альфорса, влияние которой можно заметить на протяжении всего курса. Понятие индекса делает также более наглядными доказательства принципа аргумента и теорем о локальных свойствах аналитических функций. При изучении локально равномерной сходимости последовательностей аналитических функций используются некоторые результаты из курса функционального анализа. В частности, теорема Арцела позволяет значительно сократить доказательство принципа компактности Монтеля.

Считаю своим приятным долгом выразить искреннюю благодарность А.А.Полковникову, который взял на себя труд по редактированию и оформлению этого пособия. Автор будет также признателен всем за критические замечания относительно данного курса лекций.

Глава I

Комплексные числа и функции

§ 1. Алгебра комплексных чисел

Из элементарной алгебры уже известны такие понятия, как мнимая единица i, удовлетворяющая условию $i^2 = -1$, и комплексное число $\alpha + i\beta = a$. К такой записи комплексных чисел приводит желание расширить поле $\mathbb{R}$ вещественных чисел решением уравнения $x^2 + 1 = 0$. Дополняя $\mathbb{R}$ числом i и выполняя произвольно операции сложения и умножения (при этом мы считаем, что арифметические операции над комплексными числами подчиняются тем же законам, что и над вещественными числами), мы получаем выражения вида $\alpha + i\beta$, где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Легко проверяется, что и операция деления (когда знаменатель отличен от нуля) разрешима в множестве чисел с такой записью. Кроме того, если предположить, что $\alpha + i\beta$ и $\alpha' + i\beta'$ выражают одно и то же комплексное число, то

$$(\alpha - \alpha') = i(\beta' - \beta) \quad \text{и} \quad (\alpha - \alpha')^2 = -(\beta' - \beta)^2,$$

что влечет за собой равенства $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$.

Итак, под комплексным числом мы понимаем выражение $a = \alpha + i\beta$, где $\alpha \in \mathbb{R}$ называется *вещественной частью числа* a и обозначается $\operatorname{Re} a$, а $\beta \in \mathbb{R}$ — *мнимой частью* и обозначается $\operatorname{Im} a$. Равенство комплексных чисел означает одновременное равенство их вещественных и мнимых частей. Совокупность всех комплексных чисел образует, как и $\mathbb{R}$, поле и обозначается $\mathbb{C}$.

Под комплексным сопряжением понимается преобразование, которое каждому $a = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$ ставит в соответствие *сопряженное число* $\overline{a} = \alpha - i\beta$. Комплексное сопряжение является *инволюцией,* что выражается равенством:

$$\overline{\overline{a}} = a.$$

Вещественная и мнимая части комплексного числа a алгебраически выражаются через a и $\overline{a}$:

$$\operatorname{Re} a = \frac{a + \overline{a}}{2}, \qquad \operatorname{Im} a = \frac{a - \overline{a}}{2i}.$$

Фундаментальным свойством сопряжения является то, что

$$\overline{a + b} = \overline{a} + \overline{b}, \qquad \overline{ab} = \overline{a}\,\overline{b}.$$

Поскольку частное a/b является решением уравнения $z\,b = a$ и $\overline{z}\,\overline{b} = \overline{a}$ (в силу второго равенства), то

$$\overline{\left(\frac{a}{b}\right)} = \frac{\overline{a}}{\overline{b}}.$$

Более того, если $R(a, b, \ldots)$ — рациональное выражение, составленное из комплексных чисел $a, b, \ldots$, то

$$\overline{R(a, b, \ldots)} = R(\overline{a}, \overline{b}, \ldots).$$

Отсюда сразу же следует, что если ζ — корень уравнения

$$c_0 z^n + c_1 z^{n-1} + \cdots + c_{n-1} z + c_n = 0,$$

то $\overline{\zeta}$ — корень уравнения

$$\overline{c_0} z^n + \overline{c_1} z^{n-1} + \cdots + \overline{c_{n-1}} z + \overline{c_n} = 0.$$

В частности, если коэффициенты вещественны, то ζ и $\overline{\zeta}$ являются корнями одновременно.

Заметим теперь, что произведение $a\overline{a} = \alpha^2 + \beta^2$ всегда положительно или нуль. Его неотрицательный квадратный корень называется *модулем* , или *абсолютной величиной* комплексного числа a, и обозначается $|a|$. Отметим основные свойства модуля. Из определения следует, что $a\overline{a} = |a|^2$ и $|\overline{a}| = |a|$. Для произведения получаем

$$|ab|^2 = ab\,\overline{ab} = a\,b\,\overline{a}\,\overline{b} = |a|^2 \cdot |b|^2$$

и, следовательно,

$$|ab| = |a| \cdot |b|.$$

Если $b \neq 0$, то для частного a/b, выполняя очевидные преобразования

$$b\,(a/b) = a \Rightarrow |b| \cdot \left|\frac{a}{b}\right| = |a|,$$

получаем

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}.$$

Отметим теперь некоторые неравенства, которые постоянно используются в комплексном анализе. При этом нужно иметь в виду, что множество комплексных чисел не упорядочено. Поэтому все неравенства должны быть между вещественными числами.

Из определения модуля сразу же следуют неравенства:

$$-|a| \leq \operatorname{Re} a \leq |a|, \qquad -|a| \leq \operatorname{Im} a \leq |a|.$$

Равенство $\operatorname{Re} a = |a|$ имеет место в том и только в том случае, если a вещественно и ≥ 0. Далее

$$|a + b|^2 = |a|^2 + |b|^2 + 2\operatorname{Re} a\bar{b} \leq |a|^2 + |b|^2 + 2|a||b| = (|a| + |b|)^2,$$

и мы получаем *неравенство треугольника* :

$$|a + b| \leq |a| + |b|.$$

Из хода доказательства видно, что равенство в нем достигается в том и только в том случае, если $a\bar{b} \geq 0$.

Применяя неравенство треугольника, получаем также:

$$|a| = |(a - b) + b| \leq |a - b| + |b| \quad \Leftrightarrow \quad |a| - |b| \leq |a - b|.$$

Аналогично получается неравенство $|b| - |a| \leq |a - b|$. Это вместе с предыдущим дает:

$$\Big||a| - |b|\Big| \leq |a - b|.$$

В заключение докажем комплексный вариант неравенства Коши:

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right|^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2\right) \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^2\right).$$

Для его доказательства заметим, что для любого $\lambda \in \mathbb{C}$

$$0 \le \sum_{i=1}^{n} |a_i - \lambda \overline{b_i}|^2 = \sum_{i=1}^{n} |a_i|^2 + |\lambda|^2 \sum_{i=1}^{n} |b_i|^2 - 2\,\mathrm{Re}\left\{ \overline{\lambda} \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \right\}$$

Полагая здесь

$$\lambda = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \right) / \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^2 \right),$$

получаем требуемое.

Упражнения

1. Вычислить значения $(1+i)^n + (1-1)^n$.

2. Если $z = x + iy$, найдите вещественные и мнимые части выражений:
$$z^4, \quad \frac{1}{z}, \quad \frac{z-1}{z+1}, \quad \frac{1}{z^2}.$$

3. Покажите, что
$$\left(\frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} \right)^3 = 1.$$

4. Докажите тождество:
$$|a+b|^2 + |a-b|^2 = 2(|a|^2 + |b|^2).$$

5. Найдите абсолютные величины чисел
$$-2i(3+i)(2+4i)(1+i), \qquad \frac{(3+4i)(-1+2i)}{(-1-i)(3-i)}.$$

6. Докажите, что
$$\left| \frac{a-b}{1-\overline{a}b} \right| = 1,$$
если либо $|a| = 1$, либо $|b| = 1$.

7. Найдите условия, при которых в неравенстве Коши достигается равенство.

8. Докажите, что
$$\left| \frac{a-b}{1-\overline{a}b} \right| < 1,$$
если $|a| < 1$ и $|b| < 1$.

§ 2. Геометрическое представление комплексных чисел

В координатной плоскости комплексное число $a = \alpha + i\beta$ можно интерпретировать либо как точку с координатами (α, β), либо как вектор, выходящий из начала координат в эту точку. Саму плоскость в этом случае будем называть *комплексной плоскостью.*

Сложение комплексных чисел вполне согласуется с векторным сложением. Кроме того, простое геометрическое содержание получают модуль комплексного числа $|a|$, тождество $|a+b|^2 + |a-b|^2 = 2(|a|^2 + |b|^2)$ и неравенство $|a+b| \le |a| + |b|$.

Точка a и ее комплексное сопряжение $\overline{a}$ симметричны относительно вещественной оси. Точка, симметричная к a относительно мнимой оси, выражается в комплексной записи как $-\overline{a}$. Это является основой для аналитической записи симметрии относительно прямых. Легко выражается аналитически и симметрия относительно окружности. Для этого, а также для геометрической интерпретации произведения комплексных чисел, удобно ввести полярные координаты.

Если (r, φ) — полярные координаты точки (α, β), то $\alpha = r\cos\varphi, \beta = r\sin\varphi$. Это приводит нас к *тригонометрической форме* комплексного числа:

$$a = \alpha + i\beta = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

При этом $r = |a|$, а полярный угол φ называется *аргументом* комплексного числа и обозначается $\arg a$.

Рассмотрим два комплексных числа $a_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ и $a_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$. Их произведение записывается в виде

$$a_1a_2 = r_1r_2[(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2)].$$

Используя теперь теоремы косинусов и синусов суммы углов, получаем:

$$a_1a_2 = r_1r_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)].$$

Это равенство приводит к правилу:

Аргумент произведения равен
сумме аргументов сомножителей

В этом правиле заложена некоторая условность, которая со временем все больше и больше себя проявляет. По существу, в наших рассмотрениях соотношение $\arg(a_1 a_2) = \arg a_1 + \arg a_2$ выражает скорее равенство углов, чем равенство чисел. Значение $\arg a$ определяется, вообще говоря, неоднозначно. К этому вопросу нам придется неоднократно возвращаться. Пусть $a = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \neq 0$. Тогда

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{\cos\varphi + i\sin\varphi} = \frac{1}{r}(\cos\varphi - i\sin\varphi) = \frac{1}{r}[\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)].$$

Применяя теперь правило для произведения, получаем:

При делении комплексных чисел аргументы вычитаются

Заметим, что для нуля аргумент не определен вовсе. Легко видеть, что a и $1/\overline{a}$ являются точками, *симметричными* относительно единичной окружности. Эффективность тригонометрической записи комплексных чисел особенно проявляется при исследовании *биномиального уравнения* $z^n = a$. Из правил умножения сразу же получаем для $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$:

$$z^n = \rho^n(\cos n\theta + i\sin\theta).$$

В случае $\rho = 1$ эта формула носит имя *Муавра*. Таким образом, уравнение $z^n = a = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ полностью эквивалентно равенствам:

$$\rho^n = r, \quad n\theta = \varphi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Это позволяет все решения уравнения $z^n = a$ записать формулой:

$$z = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n} + k\frac{2\pi}{n}\right)\right],$$

$k = 0, 1, \ldots, n-1$. Это — все корни n-й степени из числа $a \neq 0$. Они имеют один и тот же модуль, а их аргументы равномерно распределены.

В частности, при $a = 1$ получаем корни из единицы:

$$1, w, \ldots, w^{n-1},$$

где

$$w = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}.$$

Аналитическая геометрия. В классической аналитической геометрии геометрическое место точек выражается в виде соотношений между x и y. Их легко перевести в термины z и $\bar{z}$. При этом нужно помнить, что комплексное уравнение обычно эквивалентно двум вещественным, и при выделении кривой они должны выражать одно и то же.

Например, уравнение окружности $|z-a| = r$ в алгебраической форме может быть записано в виде $(z-a)(\bar{z}-\bar{a}) = r^2$. То, что это уравнение инвариантно при комплексном сопряжении, указывает на факт представления вещественного уравнения.

Прямая в комплексной плоскости задается параметрическим уравнением $z = a + bt$, где a и $b \neq 0$ — комплексные числа, а параметр t пробегает все вещественные числа. Два уравнения $z = a + bt$ и $z = a' + b't$ представляют одну и ту же прямую в том и только в том случае, когда $a' - a$ и b' отличаются от b только вещественными множителями. Направление прямой можно идентифицировать с $\arg b$. Угол между прямыми $z = a + bt$ и $z = a' + b't$ выражается числом $\arg b'/b$ (он зависит от порядка перечисления прямых). Ортогональность прямых эквивалентна тому, что b'/b чисто мнимое.

Неравенство $|z-a| < r$ описывает внутренность круга. Аналогично, прямая $z = a + bt$ определяет правую полуплоскость неравенством $\mathrm{Im}\{(z-a)/b\} < 0$ и левую полуплоскость неравенством $\mathrm{Im}\{(z-a)/b\} > 0$.

Стереографическая проекция. По разным причинам полезно расширение системы $\mathbb{C}$ комплексных чисел введением бесконечно удаленной точки ∞. Ее связь с конечными числами выражается соотношениями $a+\infty = \infty+a = \infty$ для конечных a и $b\cdot\infty = \infty\cdot b = \infty$ для всех $b \neq 0$, включая $b = \infty$. Однако невозможно определить $\infty + \infty$ и $0\cdot\infty$ без потери правил арифметики. Тем не менее специально выделяются случаи $a/0 = \infty$ для $a \neq 0$ и $b/\infty = 0$ при $b \neq \infty$.

Наглядным пополнение плоскости $\mathbb{C}$ до $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C}\cup\infty$ становится при стереографической проекции. Для этого рассмотрим сферу S, которая

в трехмерном пространстве задается уравнением $x_1^2+x_2^2+x_3^2=1$. С каждой точкой на сфере S, исключая (0,0,1), можно ассоциировать комплексное число
$$z=\frac{x_1+ix_2}{1-x_3}.$$
Это — взаимно однозначное соответствие. Действительно,
$$|z|^2=\frac{x_1^2+x_2^2}{(1-x_3)^2}=\frac{1+x_3}{1-x_3}$$
и, следовательно,
$$x_3=\frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}.$$

Дальнейшие вычисления дают
$$x_1=\frac{z+\overline{z}}{1+|z|^2},\qquad x_2=\frac{z-\overline{z}}{i(1+|z|^2)}.$$
Это отображение дополняется соответствием $(0,0,1)\to\infty$. Заметим, что полусфера $x_3<0$ соответствует кругу $|z|<1$ и полусфера $x_3>0$ — внешности $|z|>1$.

Геометрически очевидно, что стереографическая проекция преобразует каждую окружность на сфере в окружность или прямую в z-плоскости. Для доказательства этого заметим, что окружность на сфере лежит в плоскости $\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\alpha_3x_3=\alpha_0$, где можно считать $\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2=1$ и $0\le\alpha_0<1$. В терминах z и $\overline{z}$ это уравнение принимает вид:
$$\alpha_1(z+\overline{z})-\alpha_2i(z-\overline{z})+\alpha_3(|z|^2-1)=\alpha_0(|z|^2+1),$$
или, если $z=x+iy$, в виде
$$(\alpha_0-\alpha_3)(x^2+y^2)-2\alpha_1x-2\alpha_2y+\alpha_0+\alpha_3=0.$$
При $\alpha_0\ne\alpha_3$ это уравнение задает окружность, а при $\alpha_0=\alpha_3$ — прямую.

Сферическая метрика. Можно в комплексной плоскости ввести расстояние $d(z,z')$, которое выражало бы евклидово расстояние между их образами на сфере Римана. Если (x_1,x_2,x_3) и (x_1',x_2',x_3') — соответствующие точки на сфере S, то
$$(x_1-x_1')^2+(x_2-x_2')^2+(x_3-x_3')^2=2-2(x_1x_1'+x_2x_2'+x_3x_3').$$

Из формул, связывающих точки плоскости и точки сферы, получаем:

$$x_1x_1' + x_2x_2' + x_3x_3' =$$
$$= \frac{(z+\overline{z})(z'+\overline{z'}) - (z-\overline{z})(z'-\overline{z'}) + (|z|^2-1)(|z'|^2-1)}{(1+|z|^2)(1+|z'|^2)} =$$
$$= \frac{(1+|z|^2)(1+|z'|^2) - 2|z-z'|^2}{(1+|z|^2)(1+|z'|^2)}.$$

Следовательно,

$$d(z,z') = \frac{2|z-z'|}{\sqrt{(1+|z|^2)(1+|z'|^2)}}.$$

При $z' = \infty$ формула принимает вид:

$$d(z,\infty) = \frac{2}{\sqrt{1+|z|^2}}.$$

Упражнения

1. Найдите точки, симметричные к a относительно биссектрис углов, образованных координатными осями.

2. Докажите, что точки a_1, a_2, a_3 являются вершинами равностороннего треугольника в том и только в том случае, если $a_1^2+a_2^2+a_3^3 = a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_1$.

3. Допустим, что a и b — две вершины квадрата. Найдите две другие вершины во всех возможных вариантах.

4. Упростите выражения $1 + \cos\varphi + \ldots + \cos n\varphi$ и $\sin\varphi + \sin 2\varphi + \ldots + \sin n\varphi$.

5. Найдите центр и радиус окружности, проходящей через точки a_1, a_2, a_3.

6. Запишите уравнения эллипса, гиперболы и параболы в комплексной форме.

7. Докажите, что все окружности, проходящие через a и $1/\overline{a}$, пересекают окружность $|z| = 1$ под прямым углом.

§ 3. Комплексная дифференцируемость

Теория функций комплексного переменного расширяет исчисление на комплексную область. При этом и дифференцирование и интегрирование приобретают некоторое новое значение. Кроме того, область применения их существенно сужается и приводит к классу аналитических или голоморфных функций.

В основном мы будем придерживаться традиционного понимания функции как отображения одного множества комплексных чисел в другое. В таком представлении функция должна быть однозначной. Хотя более глубокое проникновение в природу аналитических функций заставляет нас отступить от однозначности.

Определение.
Говорят, что функция $f(z)$ имеет предел A при $z \to a$ и пишут

$$\lim_{z \to a} f(z) = A, \tag{1}$$

если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : |f(z) - A| < \varepsilon \text{ при } 0 < |z - a| < \delta.$$

Формулировка легко видоизменяется для случая, когда $a = \infty$ или $A = \infty$ (или оба вместе). Например, при $a = \infty$ нужно писать $|z| > R$ вместо $0 < |z - a| < \delta$.

Хорошо известные из вещественного анализа результаты, касающиеся предела суммы, произведения и частного остаются верными и в комплексном анализе. Действительно, их доказательства основываются только на свойствах модуля:

$$|ab| = |a|\,|b| \qquad \text{и} \qquad |a + b| \le |a| + |b|.$$

Заметим также, что условие (1) эквивалентно

$$\lim_{z \to a} \overline{f(z)} = \overline{A}. \tag{2}$$

Из (1) и (2) следуют также соотношения:

$$\lim_{z \to a} \operatorname{Re} f(z) = \operatorname{Re} A, \quad \lim_{z \to a} \operatorname{Im} F(z) = \operatorname{Im} A.$$

Обратно, если выполнены последние соотношения, то выполняются и (1), (2). Функция $f(z)$ называется *непрерывной в точке* a, если $\lim_{z\to a} f(z) = f(a)$. Термин *непрерывная функция* будем применять в случае, когда f непрерывна во всех точках, где она определена.

Сумма $f(z) + g(z)$ и произведение $f(z)g(z)$ двух непрерывных функций являются непрерывными; частное $f(z)/g(z)$ определено и непрерывно в a, если $g(a) \neq 0$. Кроме того, если $f(z)$ непрерывна, то таковыми являются $\operatorname{Re} f(z), \operatorname{Im} f(z)$ и $|f(z)|$.

Производная функции определяется как предел отношения приращений независимой и зависимой переменных. Таким образом, по форме комплексное дифференцирование вполне аналогично вещественному:

$$f'(a) = \lim_{z\to a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a}.$$

Это определение и совпадение правил арифметики комплексных и вещественных чисел показывают, что обычные правила дифференцирования суммы, произведения и частного выполняются и в комплексном случае. Выполняется также правило дифференцирования сложной функции.

Однако, в отличие от понятия непрерывности, которое сводится просто к непрерывности вещественной и мнимой частей, условие дифференцируемости влечет совершенно неожиданные свойства функции.

Теорема 1. *Для дифференцируемости функции $w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ в точке z в комплексном смысле необходимо и достаточно, чтобы она была дифференцируема в вещественном смысле (т.е. дифференцируемы функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$) и выполнялись соотношения:*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{3}$$

Доказательство. Вещественная дифференцируемость функции f в точке $z = x + iy$ означает представление приращений:

$$u(x+\xi, y+\eta) - u(x,y) = u'_x\xi + u'_y\eta + o(|\zeta|),$$

$$v(x+\xi, y+\eta) - v(x,y) = v'_x\xi + v'_y\eta + o(|\zeta|),$$

где $\zeta = \xi + i\eta$. С другой стороны, комплексная дифференцируемость функции f в точке z эквивалентна представлению

$$f(z+\zeta) - f(z) = f'(z)\zeta + o(|\zeta|).$$

Отделяя в этом равенстве вещественную и мнимую части, получаем ($f'(z) = \alpha + i\beta$):

$$u(x+\xi, y+\eta) - u(x,y) = \alpha\xi - \beta\eta + o(|\zeta|),$$

$$v(x+\xi, y+\eta) - v(x,y) = \alpha\eta + \beta\xi + o(|\zeta|).$$

В силу единственности дифференциала получаем

$$u'_x = \alpha, \quad u'_y = -\beta, \quad v'_x = \beta, \quad v'_y = \alpha,$$

что эквивалентно (3).

Таким образом, из комплексной дифференцируемости следует вещественная дифференцируемость и выполнения условий (3). Обратно, если f дифференцируема в вещественном смысле и выполняющая равенства (3), то, очевидно, имеет место и комплексная дифференцируемость. □

Заметим, что из хода доказательства теоремы следует равенство:

$$f'(z) = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} = -i\frac{\partial f}{\partial y}.$$

В действительности, мы можем записать четыре различных выражения для $f'(z)$. Приведенные два равенства дают комплексную запись уравнений (3):

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -i\frac{\partial f}{\partial y}. \tag{4}$$

Определение. *Функцию f, определенную на открытом множестве D будем называть аналитической, или голоморфной, в D, если она дифференцируема в комплексном смысле в каждой точке D.*

Будем говорить, что f аналитична на произвольном множестве $E \subset \mathbb{C}$, если она аналитична в некотором открытом множестве D, содержащем E.

Система уравнений (3), которой удовлетворяют вещественная и мнимая части голоморфной функции называется *системой уравнений Коши-Римана* и обладает рядом интересных свойств. В частности, если предположить, что функции u и v являются дважды непрерывно дифференцируемыми, то из (3) следует:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = 0,$$

т. е. u — *гармоническая* функция. Аналогично проверяется гармоничность функции v.

Отметим еще одно важное равенство, вытекающее из системы (3):

$$|f'(z)|^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Это равенство показывает, что $|f'(x)|^2$ является якобианом отображения $(x, y) \to (u, v)$.

Отметим еще одно формальное представление условий (3) или (4), которое проливает некоторым образом свет на природу аналитических функций. Сразу же оговоримся, что это представление имеет лишь формальное, а не доказательное значение. Воспользуемся инвариантностью формы первого дифференциала и формальной заменой dx, dy на dz, $d\overline{z}$:

$$\begin{aligned} df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy &= \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x}(dz + d\overline{z}) + \frac{1}{2i}\frac{\partial f}{\partial y}(dz - d\overline{z}) = \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right)dz + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right)d\overline{z}. \end{aligned}$$

Эта запись побуждает ввести формальные дифференциальные операторы $\partial/\partial z$ и $\partial/\partial\overline{z}$:

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right), \qquad \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

Из (4) видно, что уравнения Коши–Римана можно записать в виде

$$\partial f/\partial\overline{z} = 0.$$

Это наводит на высказывание, что аналитическая функция не зависит от $\overline{z}$, а является лишь функцией от z.

Теорема 2. *Пусть f — аналитическая в круге $|z-a|<r$ функция и $f'(z)=0$ в нем. Тогда $f(z)\equiv const$.*

Доказательство. Если $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, то в силу сделанного предположения $u'_x=u'_y=v'_x=v'_y=0$. Применяя одномерную теорему, получаем постоянство u и v на всех горизонтальных и вертикальных прямых. Отсюда и из того, что каждые две точки круга можно соединить ломанной с вертикальными и горизонтальными звеньями, следует утверждение теоремы. $\square$

Выделим теперь некоторые простейшие аналитические функции. Каждая константа является аналитической в $\mathbb{C}$ функцией с производной, равной нулю. Поскольку сумма и произведение двух аналитических функций снова аналитическая функция, то полином

$$P(z)=a_0+a_1z+\dots+a_nz^n$$

представляет собой аналитическую в $\mathbb{C}$ функцию. Если $a_n\neq 0$, то число n называется *степенью* полинома P. При этом его производная

$$P'(z)=a_1+2a_2z+\dots+na_nz^{n-1}$$

является полиномом степени $n-1$. Нулевую константу можно рассматривать как полином. Однако по многим причинам ее приходится исключать из алгебры полиномов.

При $n>0$ уравнение $P(z)=0$ по основной теореме алгебры имеем, по крайней мере, один корень α_1. Тогда $P(z)=(z-\alpha_1)P_1(z)$, где P_1 — полином степени $n-1$. Повторение этого процесса приводит к представлению

$$P(z)=a_n(z-\alpha_1)\dots(z-\alpha_n),\tag{5}$$

где корни $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ не обязательно различные. Из разложения $P(z)$ на множители и отсутствия делителей нуля в поле комплексных чисел следует, что $P(z)$ не может обращаться в нуль ни в одной точке, отличной от $\alpha_1,\dots,\alpha_n$. Более того, приведенная факторизация единственна с точностью до порядка сомножителей.

Если α_j повторяется в представлении (5) k_j раз, то k_j называется *порядком нуля* α_j полинома $P(z)$. Таким образом, считая каждый нуль столько раз, какова его кратность, можно сказать, что полином степени n имеет ровно n корней.

Порядок нуля можно выразить в терминах производных. Действительно, если α — нуль k-того порядка полинома $P(z)$, то $P(z) = (z-\alpha)^k P_k(z)$, где P_k — полином степени $n-k$ и $P_k(\alpha) \neq 0$. Последовательное дифференцирование показывает, что

$$P(\alpha) = P'(\alpha) = \cdots = P^{(k-1)}(\alpha) = 0,$$

в то время как $P^{(k)}(\alpha) \neq 0$. Другими словами, порядок нуля равен порядку первой отличной от нуля производной в этой точке. Нуль первого порядка называется *простым* нулем и характеризуется условиями: $P(\alpha) = 0,\ P'(\alpha) \neq 0$.

Следующий шаг в расширении класса аналитических функций приводит к рассмотрению рациональных функций

$$R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)},$$

представляющих собой отношение двух полиномов. Будем предполагать, что $P(z)$ и $Q(z)$ не имеют общих множителей, а следовательно, и нулей. Кроме того, рассматривая $R(z)$ как функцию со значениями из расширенной комплексной плоскости, можно считать ее непрерывной. Нули $Q(z)$ называются *полюсами* функции $R(z)$ и им приписывается тот же порядок. Производная

$$R'(z) = \frac{P'(z)Q(z) - Q'(z)P(z)}{(Q(z))^2}$$

существует во всех точках z, где $Q(z) \neq 0$. Однако, она определена как рациональная функция с теми же полюсами, что и $R(z)$. Порядок каждого полюса функции $R'(z)$ возрастает на единицу в сравнении с функцией $R(z)$.

Большее единство достигается, когда позволяют z пробегать всю расширенную комплексную плоскость $\overline{\mathbb{C}}$ ($R : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ является непрерывной в сферической метрике). При этом $R(\infty)$ можно определить предельным переходом. Однако это не дает возможность определить порядок нуля или полюса в ∞. Поэтому предпочтительнее рассмотреть функцию $R_1(z) = R(1/z)$, которая также является рациональной функцией, и положить

$$R(\infty) = R_1(0).$$

Если $R_1(0) = 0$ или ∞, то порядок нуля или полюса в ∞ определяется как соответствующий порядок нуля или полюса функции $R_1(z)$ в точке $z = 0$. Если

$$R(z) = \frac{a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n}{b_0 + b_1 z + \cdots + b_m z^m},$$

то

$$R_1(z) = z^{m-n} \frac{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n}{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \cdots + b_m},$$

где z^{m-n} в зависимости от знака $m - n$ попадает в числитель или знаменатель дроби. Если $m > n$, то $R(z)$ имеет нуль порядка $m - n$ в ∞, а если $m < n$, то — полюс порядка $n - m$. В случае $m = n$ имеем $R(\infty) = a_n/b_n$.

Можно теперь подсчитать общее количество нулей и полюсов рациональной функции в расширенной плоскости. При сделанных предположениях относительно бесконечно удаленной точки общее число нулей равно наибольшему из чисел m и n и равно общему числу полюсов. Это общее число для нулей и полюсов называется *порядком* рациональной функции.

Если a — произвольная константа, то рациональная функция $R(z) - a$ имеет то же общее количество полюсов (они просто совпадают), что и $R(z)$. Таким образом, их порядки совпадают. Однако нули функции $R(z) - a$ являются корнями уравнения $R(z) = a$, и мы приходим к следующему результату.

Теорема 3. *Рациональная функция $R(z)$ порядка k имеет k нулей и k полюсов. Кроме того, каждое уравнение $R(z) = a$ имеет в точности k корней.*

Упражнения

1. Покажите, что постоянная аналитическая в круге $|z-a| < r$ функция не может иметь тождественно постоянную абсолютную величину.

2. Покажите, что гармоническая функция $u(x, y)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению с формальными производными
$$\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \overline{z}} = 0.$$
3. Докажите, что функции $f(z)$ и $\overline{f(\overline{z})}$ являются аналитическими одновременно.

§ 4. Степенные ряды

Понятие предела последовательности, как и предела функции, в комплексном анализе вводится посредством модуля совершенно аналогично вещественному случаю. При исследовании вопроса сходимости также важную роль играет понятие фундаментальной последовательности и имеет место критерий Коши. Совершенно аналогично вещественному случаю строится теория абсолютно сходящихся рядов с комплексными членами. Что касается условно сходящихся рядов, то в комплексном случае эта теория богаче, но мы не имеем возможности на ее детальное обсуждение. Некоторые особенности условно сходящихся рядов с комплексными членами отражены в упражнениях.

Совершенно без изменений формулируется понятие равномерной сходимости функциональных последовательностей и рядов. При этом предел равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций является непрерывной функцией, и если функциональный ряд мажорируется абсолютно сходящимся числовым рядом, то он равномерно сходится (признак Вейерштрасса).

Под *степенным рядом* понимается функциональный ряд вида
$$a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n + \dots, \tag{1}$$
где a_n — комплексные числа, называемые коэффициентами ряда, а z — комплексная переменная. Можно рассмотреть более общий вид степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$, но при его изучении не возникает существенных особенностей. Он сразу же принимает вид (1) после замены переменной $\zeta = (z - z_0)$.

Почти тривиальный, но важный пример степенного ряда представляет так называемый *геометрический* ряд $1 + z + z^2 + \dots$. Его частные суммы можно записать в виде

$$1 + z + \ldots + z^{n-1} = \frac{1 - z^n}{1 - z}.$$

Поскольку $z^n \to 0$ при $|z| < 1$ и $|z^n| \geq 1$ при $|z| \geq 1$, то геометрический ряд сходится к $1/(1-z)$ при $|z| < 1$ и расходится при $|z| \geq 1$. Оказывается, что ситуация с геометрическим рядом является типичной. В действительности, для каждого степенного ряда существует свой круг сходимости.

Теорема (Абеля). *Для каждого степенного ряда* (1) *число*

$$R = 1/\left(\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\right), \tag{2}$$

называемое радиусом сходимости, удовлетворяет следующим условиям:

(i) *В каждом круге $|z| \leq \rho < R$ ряд* (1) *сходится абсолютно и равномерно;*

(ii) *Если $|z| > R$, то ряд* (1) *расходится;*

(iii) *Сумма ряда является аналитической в круге $|z| < R$ функцией и ее производная представляет собой сумму почленно продифференцированного ряда* (1).

Доказательство. Пусть $\rho < R$. Выберем $\rho' \in (\rho, R)$. Поскольку

$$\frac{1}{\rho'} > \frac{1}{R} = \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|},$$

то найдется такой номер N, что $\sqrt[n]{|a_n|} < 1/\rho'$, при всех $n \geq N$. Следовательно, для всех z из круга $|z| \leq \rho$

$$|a_n z^n| = |a_n| \cdot |z^n| \leq \left(\frac{\rho}{\rho'}\right)^n,$$

при $n \geq N$. Это означает, что в круге $|z| \leq \rho$ ряд (1) мажорируется геометрической прогрессией. Поскольку $\rho/\rho' < 1$, то мажорантный ряд сходится и (i) доказано.

Для доказательства (ii) заметим, что если $|z| > R$, то можно выбрать ρ с условием $|z| > \rho > R$ и в силу

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{R} > \frac{1}{\rho}$$

найдется бесконечное число индексов n, для которых $\sqrt[n]{|a_n|} > 1/\rho$. Но тогда для этих индексов

$$|a_n z^n| > \left(\frac{|z|}{\rho}\right)^n.$$

Это означает, что необходимое условие сходимости ряда $\sum a_n z^n$ (стремление к нулю общего члена) не выполняется и он расходится.

Приступая к доказательству (iii), заметим, что почленно продифференцированный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ имеет тот же радиус сходимости, что и исходный ряд (1). Это следует из формулы (2) и условия $\sqrt[n]{n} \to 1$, при $n \to \infty$. Обозначим

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k, \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}.$$

Тогда $f(z) = \lim_{n\to\infty} S_n(z)$ и $g(z) = \lim_{n\to\infty} S_n'(z)$, поскольку $S_n'(z)$ — частные суммы ряда $g(z)$.

Фиксируем теперь произвольно z_0, $|z_0| < R$, и выберем $\rho > 0$ из условия $|z_0| < \rho < R$. Тогда для любого $z \neq z_0$ из круга $|z| \leq \rho$ будем иметь:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} - g(z_0)\right| \; &\leq \; \left|\frac{S_N(z)-S_N(z_0)}{z-z_0} - S_N'(z_0)\right| + \\
+|S_N'(z_0) - g(z_0)| \; &+ \; \left|\frac{1}{z-z_0}\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n (z^n - z_0^n)\right| = \\
&= \; \left|\frac{S_N(z)-S_N(z_0)}{z-z_0} - S_N'(z_0)\right| + \\
+|S_n'(z_0) - g(z_0)| \; &+ \; \left|\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n (z^{n-1} + \cdots + z_0^{n-1})\right| \leq \\
\leq \left|\frac{S_N(z)-S_N(z_0)}{z-z_0} - S_N'(z_0)\right| \; &+ \; |S_N'(z_0) - g(z_0)| + \sum_{n=N+1}^{\infty} n|a_n|\rho^{n-1}.
\end{aligned}$$

Для произвольного $\varepsilon > 0$ выберем N так, чтобы $\sum_{n=N+1}^{\infty} n|a_n|\rho^{n-1} < \varepsilon/3$ и $|S'_N(z_0) - g(z_0)| < \varepsilon/3$. Существование такого N следует из сходимости ряда $\sum n|a_n|\rho^{n-1}$ и условия $S'_n(z_0) \to g(z_0)$, при $n \to \infty$. Затем, в силу аналитичности S_N как полинома, можно выбрать δ, $0 < \delta < \rho - |z_0|$, так, чтобы выполнялось неравенство

$$\left|\frac{S_N(z) - S_N(z_0)}{z - z_0} - S'_N(z_0)\right| < \frac{\varepsilon}{3},$$

при $0 < |z - z_0| < \delta$. Но тогда при этих z будем иметь

$$\left|\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - g(z_0)\right| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Заметим, что формула (2) носит имя *Коши–Адамара*. Из хода доказательства видно также, что допускаются случаи $R = 0$ и ∞.

Упражнения

1. Пусть $\lim_{n\to\infty} a_n = A$. Докажите, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = A.$$

2. Докажите, что ряд из комплексных членов, каждая часть которого сходится, должен сходиться абсолютно.

3. Докажите, что если ряд $\sum |a_n|$ расходится, то существует по крайней мере одно *направление сгущения* α, обладающее тем свойством, что, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, ряд абсолютных величин тех членов ряда $\sum a_n$, которые расположены в угле $\alpha - \varepsilon < \arg z < \alpha + \varepsilon$, является расходящимся.

4. Найдите радиусы сходимости следующих степенных рядов:

$$\sum n^p z^n, \quad \sum q^{n^2} z^n \quad (|q| < 1), \quad \sum z^{n!}.$$

5. Если ряд $\sum a_n z^n$ имеет радиус сходимости R, то каковы радиусы сходимости рядов $\sum a_n z^{2n}$ и $\sum a_n^2 z^n$?

6. Если $f(z) = \sum a_n z^n$, то что можно сказать о ряде $\sum n^3 a_n z^n$?

7. Для каких z сходится ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{1+z}\right)^n?$$

8. Если числа $z_1, z_2, \ldots$ лежат в угле

$$-\alpha \le \arg z \le \alpha, \quad \alpha < \pi/2,$$

то ряды

$$z_1 + z_2 + \cdots \quad \text{и} \quad |z_1| + |z_2| + \cdots$$

либо оба сходятся, либо оба расходятся.

9. Пусть числа $z_1, z_2, \ldots$ лежат в полуплоскости $\operatorname{Re} z \ge 0$. Если сходятся оба ряда

$$z_1 + z_2 + \ldots \quad \text{и} \quad z_1^2 + z_2^2 + \ldots,$$

то сходится также ряд $|z_1| + |z_2| + \ldots$.

§ 5. Экспонента и тригонометрические функции

Один из мотивов введения экспоненциальной функции связан с решением дифференциального уравнения $f'(z) = f(z)$ с начальным условием $f(0) = 1$. Полагая

$$f(z) = \sum a_n z^n, \qquad f'(z) = \sum n a_n z^{n-1},$$

мы приходим к следующим соотношениям на коэффициенты: $a_{n-1} = na_n$ и $a_0 = 1$. Индуктивное рассуждение приводит к равенствам $a_n = 1/n!, n = 1, 2, \ldots$. Таким образом, решение должно определяться степенным рядом

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}.$$

Из формулы Коши–Адамара и предельного соотношения $\sqrt[n]{n!} \to \infty$, при $n \to \infty$, следует сходимость этого ряда во всей комплексной плоскости.

Отметим некоторые свойства экспоненты. Из определяющего ее дифференциального уравнения следует так называемая *теорема сложения*:

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2} \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}.$$

Действительно, для любого фиксированного $a \in \mathbb{C}$ имеем

$$(e^z \cdot e^{a-z})' = e^z \cdot e^{a-z} - e^z \cdot e^{a-z} = 0$$

и, следовательно, $e^z \cdot e^{a-z} \equiv e^a$ (значение при $z = 0$). Полагая в этом тождестве $a = z_1 + z_2$ и $z = z_1$, получаем равенство теоремы сложения. Применение теоремы сложения, в частности, дает $e^z \cdot e^{-z} \equiv 1$, откуда следует, что $e^z \neq 0$ ни при каком $z \in \mathbb{C}$. Далее, из вида степенного ряда видно, что $e^x > 1$ при $x > 0$, а из равенства $e^x e^{-x} = 1$ получаем также $0 < e^x < 1$ при $x < 0$. Наконец, в силу вещественности коэффициентов разложения имеет место равенство:

$$e^{\overline{z}} = \overline{e^z}.$$

Следовательно, для любого $y \in \mathbb{R}$ имеем $|e^{iy}|^2 = e^{iy}e^{-iy} = 1$ и

$$|e^{x+iy}| = e^x |e^{iy}| = e^x.$$

Одним из преимуществ комплексного анализа является то, что в нем наиболее полно раскрываются связи между элементарными функциями. Заметим, что степенной ряд экспоненты можно рассматривать как продолжение в комплексную плоскость ее вещественного ряда. В связи с этим оправдано введение тригонометрических функций посредством равенств:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \qquad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

При этом

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots, \qquad \sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots.$$

Для вещественных z мы получаем ряды Тейлора соответствующих функций вещественного переменного. Непосредственно из определения косинуса и синуса следует *формула Эйлера*:

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z,$$

а также основное тригонометрическое тождество:

$$(\cos z)^2 + (\sin z)^2 = 1.$$

Используя теорему сложения для экспоненты, легко выводятся формулы:

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b,$$
$$\sin(a+b) = \cos a \sin b + \sin a \cos b.$$

Из вида разложений $\sin z$ и $\cos z$ (или просто из определения и формулы $(e^z)' = e^z$) следуют формулы дифференцирования:

$$(\sin z)' = \cos z, \qquad (\cos z)' = -\sin z.$$

Обычным образом через $\sin z$ и $\cos z$ определяются другие тригонометрические функции $\operatorname{tg} z, \operatorname{ctg} z, \sec z$ и $\operatorname{cosec} z$. Заметим лишь, что все они являются рациональными функциями от e^{iz}.

Периодичность. Говорят, что функция f имеет период c, если $f(z+c) = f(z)$ при всех $z \in \mathbb{C}$. Условие на c быть периодом экспоненты выражается равенством

$$e^{z+c} = e^z \Rightarrow e^c = 1.$$

Полагая $c = \alpha + i\beta$, получаем $\alpha = 0$ и $\cos\beta + i\sin\beta = 1$, откуда $\beta = 2k\pi$, где k — целое. Таким образом, периоды функции e^z определяются равенством

$$c = i2k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

С алгебраической точки зрения экспонента устанавливает гомоморфизм, действующий из аддитивной группы комплексных чисел в мультипликативную. В частности, $w = e^{iy}$ — гомоморфизм между аддитивной группой вещественных чисел и мультипликативной группой комплексных чисел с абсолютной величиной, равной 1.

Вместе с экспонентой нужно изучить обратную к ней функцию — *логарифм*. Поскольку e^z не обращается в нуль, то уравнение $w = e^z$ (его решение — $z = \ln w$) не имеет решения при $w = 0$. Другими словами, логарифм нуля не существует. При $w \neq 0$ уравнение $e^{x+iy} = w$ эквивалентно системе

$$e^x = |w|, \qquad e^{iy} = \frac{w}{|w|}.$$

Первое уравнение имеет единственное решение:

$$x = \ln |w|,$$

где справа стоит *вещественный логарифм* положительного числа. Второе уравнение имеет бесконечно много решений, отличающихся друг от друга на число, кратное $2\pi i$. Таким образом, *каждое комплексное число, отличное от нуля, имеет бесконечно много логарифмов, отличающихся друг от друга на слагаемое, кратное* 2π. Мнимая часть $\ln w$ называется также *аргументом* числа w и обозначается $\arg w$. Геометрически он выражает угол между положительным направлением вещественной оси и лучом $(0, w)$. Согласно этому определению аргумент имеет бесконечно много значений и

$$\ln w = \ln |w| + i \arg w.$$

Если обозначить $|z| = r$ и $\arg z = \theta$, то мы придем к очень распространенной записи комплексного числа:

$$z = re^{i\theta}.$$

Из теоремы сложения для экспоненциальной функции следует также, что

$$\ln(z_1 z_2) = \ln z_1 + \ln z_2 \pmod{2\pi i},$$

$$\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 \pmod{2\pi}.$$

Используя логарифм, можно ввести понятие *комплексной степени*:

$$a^b = \exp(b \ln a),$$

если $a \neq 0$. Как и логарифм, a^b имеет, вообще говоря, бесконечно много значений, отличающихся множителями $e^{2\pi i n b}$.

Рассмотрим теперь область $D = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$. Фиксируя для каждой точки $z \in D$ одно значение $\ln z$, мы получим однозначную функцию, которая называется *ветвью* логарифма. Среди них выделяется *главная ветвь*, которая определяется условием $|\operatorname{Im} \ln z| < \pi$. Будем ее обозначать $w = \ln z$. Легко видеть, что так определенная функция

$\ln z$ будет непрерывной в D. Следовательно, $\Delta w \to 0$ при $\Delta z \to 0$. Поэтому

$$\frac{dw}{dz} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{w \to 0} \frac{1}{\Delta z / \Delta w} = \frac{1}{dz/dw} = \frac{1}{e^w} = \frac{1}{z}.$$

Т. е. $\ln z$ является в D *аналитической* функцией и

$$(\ln z)' = \frac{1}{z}.$$

Любая другая непрерывная ветвь $\ln z$ в D отличается на аддитивную константу $2\pi i n$ и имеет ту же производную: $1/z$.

Аналогично выделяются однозначные ветви показательной функции :

$$a^z, \ a \neq 0.$$

Упражнения

1. Найдите значения $\sin i$, $\cos i$.
2. Найдите значения тех z, для которых e^z равно 2, -1, i.
3. Определите все значения 2^i, i^i.

Глава II

Аналитические функции как отображения

§ 1. Топология комплексной плоскости

Здесь мы рассмотрим некоторые свойства множеств комплексной плоскости (или расширенной комплексной плоскости), которые инвариантны относительно непрерывных отображений.

Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольное число. Под *ε-окрестностью точки* $a \in \overline{\mathbb{C}}$ будем понимать круг

$$\mathcal{O}_\varepsilon(a) = \mathcal{O}(a, \varepsilon) = \{z \in \overline{\mathbb{C}} : |z - a| < \varepsilon\},$$

если $a \neq \infty$, и

$$\mathcal{O}(\infty, \varepsilon) = \left\{z \in \overline{\mathbb{C}} : |z| > \frac{1}{\varepsilon}\right\}.$$

С каждым множеством $E \subseteq \overline{\mathbb{C}}$ можно связать разбиение $\overline{\mathbb{C}}$ на три непересекающихся множества.

Точка $a \in E$ называется *внутренней*, если она принадлежит E вместе с каждой своей ε-окрестностью. Совокупность всех внутренних точек называется *внутренностью* множества E и обозначается $\operatorname{Int} E$.

Внешностью множества E называется внутренность его дополнения $\overline{\mathbb{C}} \setminus E$ и обозначается $\operatorname{Ext} E$.

Множество точек $\overline{\mathbb{C}}$, не принадлежащих ни внутренности, ни внешности множества E называется *границей* множества E и обозначается ∂E. Очевидно, что $a \in \partial E$ в том и только в том случае, если всякая ее ε-окрестность содержит одновременно как точки множества E, так и точки ее дополнения.

Множество E называется *открытым*, если каждая его точка является внутренней, т.е. $E = \operatorname{Int} E$. Совокупность открытых множеств определяет топологию.

Дополнительные к открытым множества называются *замкнутыми.* Их можно определить посредством операции замыкания. Точка $a \in \overline{\mathbb{C}}$ называется *предельной* для множества E, если ее всякая ε-окрестность $\mathcal{O}(a, \varepsilon)$ содержит бесконечно много точек из E. Операция *замыкания* состоит в присоединении к E всех его предельных точек, а ее результат обозначается $\overline{E}$. Множество E замкнуто в том и только в том случае, если $\overline{E} = E$. Заметим, что $\partial E = \overline{E} \setminus \operatorname{Int} E$.

Фундаментальными свойствами открытых и замкнутых множеств являются следующие.

Объединение любого числа и пересечение конечного числа открытых множеств является открытым множеством. Пересечение любого числа и объединение конечного числа замкнутых множеств является замкнутым множеством. Пустое множество и вся расширенная комплексная плоскость являются одновременно открытыми и замкнутыми множествами.

Как известно из вещественного анализа ($\mathbb{C}$ можно рассматривать как $\mathbb{R}^2$), всякое ограниченное замкнутое множество $E \subset \mathbb{C}$ является *компактным.* Свойство компактности выражается в двух фундаментальных результатах: *лемме Гейне–Бореля* и *принципе Больцано–Вейерштрасса.* Согласно первому, *из всякого открытого покрытия компактного множества можно выбрать конечное подпокрытие*. Согласно второму, *всякое бесконечное подмножество компактного множества имеет хотя бы одну предельную точку*.

В расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$ всякое замкнутое множество является компактным.

Обычно в вещественном анализе (и в курсе топологии) доказывается *инвариантность* компактности при непрерывных отображениях. Хорошо известны также свойства непрерывных вещественнозначных функций, определенных на компакте. В частности, каждая такая функция является равномерно непрерывной и достигает своего максимума и минимума.

Остановимся более подробно на топологическом понятии *"связность"*.

Определение. *Множество $E \subseteq \overline{\mathbb{C}}$ называется <u>связным</u>, если не существует двух открытых множеств G_1 и G_2, удовлетворяющих условиям:*

(i) $E \subseteq G_1 \cup G_2$;

(ii) $E \cap G_1 \cap G_2 = \emptyset$

(iii) $G_1 \cap E \neq \emptyset,\ G_2 \cap E \neq \emptyset$.

Интуитивно связность означает, что E состоит из одного "куска".

Теорема 1. *Отрезок прямой — связное множество. При этом допускается, чтобы один из концов отрезка был бесконечно удаленной точкой, а сам отрезок был открытым, замкнутым или полуоткрытым.*

Доказательство. Допустим противное, т. е. найдутся два открытых множества G_1 и G_2, для которых выполнены условия (i)–(iii), где E — наш отрезок. Тогда на E найдутся две конечные точки $a \in G_1$ и $b \in G_2$. Очевидно, что условия (i)–(iii) также выполняются при замене E на подынтервал $E_1 = [a, b]$. Разобьем E_1 пополам и выберем ту его часть E_2, которая представляет собой интервал с концами в разных множествах G_1 и G_2. Продолжая этот процесс, получим последовательность замкнутых вложенных отрезков $E_1 \supset E_2 \supset \ldots$ длины которых стремятся к нулю. По теореме Кантора, существует единственная точка ξ, принадлежащая всем отрезкам последовательности $\{E_n\}$. Из условий $(i), (ii)$ следует, что ξ принадлежит одному из множеств G_1 или G_2. Пусть это для определенности будет G_1. В силу открытости G_1 и стремления длин E_n к нулю следует, что $E_n \subset G_1$ при достаточно больших номерах n. Однако это противоречит условиям выбора E_n.

□

Определение. *Непустое связное открытое множество называется <u>областью</u>.*

Приведенное выше определение связности в случае открытого множества E означает, что не существует непустых непересекающихся открытых множеств G_1 и G_2.

Замечание. *Мы можем теперь усилить теорему 2 из параграфа 3 предыдущей главы, заменив круг* $|a-z| < r$ *на произвольную область.*

Следующий результат дает характеристическое свойство области в других терминах.

Теорема 2. *Непустое открытое множество* E *связно в том и только в том случае, если любые две ее точки можно соединить ломаной, расположенной в* E*. При этом ломаную можно выбрать так, чтобы ее звенья были параллельны координатным осям.*

Доказательство. Пусть E связно и $a \in E$ — произвольная точка. Обозначим через G_1 множество тех точек из E, которые можно соединить в E с точкой a ломаной со звеньями, параллельными координатным осям. Через G_2 обозначим те точки из E, которые не удовлетворяют этому условию. Очевидно, что G_1 и G_2 являются открытыми множествами и $E = G_1 \cup G_2$. В силу связности E одно из множеств, G_1 или G_2, должно быть пустым. Легко видеть также, что $G_1 \neq \emptyset$, и в одну сторону утверждение доказано.

Обратно, пусть E — открытое множество и любые две ее точки можно соединить ломаной, расположенной в E. Тогда связность E легко устанавливается рассуждением от противного. Действительно, если G_1 и G_2 — два открытых непустых непересекающихся множества и $E = G_1 \cup G_2$, то для точек $a \in G_1$, $b \in G_2$ найдется ломаная, соединяющая их и расположенная в E. На этой ломаной найдется отрезок, концы которого расположены в разных множествах G_1 и G_2. Но это будет противоречить связности этого отрезка.

□

Следующий результат позволяет конструировать связные множества и сравнительно просто определять связность в ряде случаев.

Теорема 3. *Пусть* $\{E_\alpha\}_{\alpha \in A}$ *— совокупность (семейство) связных множеств и* $\bigcap_\alpha E_\alpha \neq \emptyset$*. Тогда* $E = \bigcup_\alpha E_\alpha$ *— связное множество.*

Доказательство. Допустим противное, т. е. найдутся такие открытые множества G_1 и G_2, что для $E = \bigcup E_\alpha$ выполнены условия (i)–(iii). Выберем произвольную точку a из $\bigcap E_\alpha$. В силу (i) она принадлежит одному из множеств: G_1 или G_2. Пусть для определенности $a \in G_1$. В $E \bigcap G_2$ выберем произвольную точку b. По определению E, найдется такое $\alpha' \in A$, что $b \in E_{\alpha'}$. Но тогда для $E_{\alpha'}$ и множеств G_1 и G_2 выполнены все условия (i)–(iii), что противоречит связности множества $E_{\alpha'}$. □

В ряде случаев приходится иметь дело с множествами произвольной структуры. При их анализе первой ступенькой является разложение его на компоненты связности. *Компонентой K множества E будем называть связное подмножество, которое не является собственным подмножеством никакой другой связной части множества E.*

Теорема 4. *Каждое множество единственным образом может быть представлено как объединение своих компонент.*

Доказательство. Пусть E — произвольное множество. Для каждой точки $a \in E$ через $C(a)$ обозначим объединение всех связных подмножеств в E, содержащих a. В силу предыдущей теоремы $C(a)$ связно, а непосредственно из определения следует ее максимальность. Таким образом, $C(a)$ — компонента множества E. Для завершения доказательства остается показать, что две компоненты $C(a)$ и $C(b)$ либо совпадают, либо не пересекаются.

Пусть $d \in C(a) \bigcap C(b)$. Тогда из определения $C(d)$ следует, что $C(a) \subseteq C(d)$. Отсюда получаем: $a \in C(d)$ и в силу определения $C(a)$ имеем включение $C(d) \subseteq C(a)$. Таким образом, $C(a) = C(d)$. Аналогично устанавливается равенство $C(b) = C(d)$. □

Определение. *Область $D \subseteq \mathbb{C}$ называется односвязной, если $\overline{\mathbb{C}} \setminus D$ связно.*

Другими словами, область D называется односвязной, если ее дополнение $\overline{\mathbb{C}} \setminus D$ состоит из одной компоненты. Следует отметить, что здесь важно условие пополненной комплексной плоскости. На это указывает пример полосы.

Теорема 5. *При непрерывных отображениях образ связного множества является связным.*

Доказательство. Пусть $w = f(z)$ — непрерывная функция, которая переводит связное множество E в Q. Допустим, что H_1 и H_2 — открытые множества, удовлетворяющие условиям $Q \subseteq H_1 \cup H_2$ и $Q \cap H_1 \cap H_2 = \emptyset$. Нам нужно доказать, что тогда одно из множеств, $Q \cap H_1$ или $Q \cap H_2$, пусто.

Определим множества $E_1 = \{z \in E : f(z) \in H_1\}$, $E_2 = \{z \in E : f(z) \in H_2\}$. В силу сделанных предположений $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ и $E_1 \cup E_2 = E$. Далее, если z_0 — произвольная точка в E_1 и $w_0 = f(z_0)$, то в силу открытости H_1 найдется такое $\varepsilon > 0$, что $\mathcal{O}(w_0, \varepsilon) \subseteq H_1$. Согласно непрерывности f найдется такое $\delta > 0$, что $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ при $|z - z_0| < \delta$, т. е. $\mathcal{O}(z_0, \delta) \cap E \subseteq E_1$. Таким образом, существует открытое множество G_1, для которого $G_1 \cap E = E_1$. Аналогично устанавливается существование открытого множества G_2, для которого $G_2 \cap E = E_2$. Но тогда в силу связности E одно из множеств, E_1 или E_2, должно быть пустым. Пусть это будет E_1. Но с ним будет пустым множеством $Q \cap H_1$.

□

Замечание. *Среди многих приложений доказанной теоремы отметим следующие два:*

1. *Не обращающаяся в нуль непрерывная вещественнозначная функция, определенная на связном множестве, сохраняет знак.*

2. *Отрезок и квадрат не являются топологически эквивалентными.*

Упражнения

1. Доказать, что E является связным в том и только в том случае, если его нельзя представить в виде объединения двух непустых непересекающихся множеств E_1 и E_2 так, чтобы $E_1 \cap \overline{E_2} = \emptyset$ и $\overline{E_1} \cap E_2 = \emptyset$.

2. Доказать, что класс связных множеств не изменится, если в определении связности условие (ii) заменить на $G_1 \cap G_2 = \emptyset$.

3. Докажите, что замыкание связного множества является связным множеством.

§ 2. Конформность

В этом параграфе мы рассмотрим геометрические следствия аналитичности. Как отмечалось ранее, мы не можем получить наглядного представления о функции комплексного переменного посредством графика. Этот недостаток можно компенсировать наблюдением за образами семейств кривых.

Уточним вначале понятийный аппарат, связанный с кривыми. В аналитической геометрии под кривой обычно понимают множество точек, координаты которых удовлетворяют некоторому уравнению либо задаются параметрическим способом. Для наших целей ближе второе представление, которое позволяет интерпретировать кривую как траекторию движущейся точки. Кроме того, в наших рассмотрениях будет несущественной скорость прохождения траектории, но будет важным направление и кратность прохождения участков траектории. Перейдем теперь к точным определениям и формулировкам.

Определение. *Путем мы будем называть непрерывное отображение $z = z(t)$ отрезка $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ в $\mathbb{C}$ (или $\overline{\mathbb{C}}$). Точки $z(\alpha) = a$ и $z(\beta) = b$ называются началом и концом пути, соответственно. Путь называется замкнутым, если $a = b$.*

Понятие пути является исходным. Понятие кривой связано с тем, что мы будем не различать некоторые пути. Будем говорить, что пути $z = z_1(t)$, $\alpha_1 \le t \le \beta_1$, и $z = z_2(t)$, $\alpha_2 \le t \le \beta_2$, *эквивалентны*, если существует непрерывная возрастающая функция $\tau = \tau(t)$, $\alpha_1 \le t \le \alpha_2$, такая, что $\tau(\alpha_1) = \alpha_2$, $\tau(\beta_1) = \beta_2$ и $z_1(t) = z_2(\tau(t))$ при $t \in [\alpha_1, \beta_1]$. Легко видеть, что введенное понятие эквивалентности путей обладает свойствами рефлексивности, симметрии и транзитивности. Следовательно, все множество путей распадается на непересекающиеся классы эквивалентности.

Определение. *Кривой γ называется класс эквивалентных путей. Представитель $z = z(t)$, $\alpha \le \beta$, из класса эквивалентности будем называть параметризацией кривой γ.*

Заметим, что все пути, которые представляют одну и ту же кривую γ, имеют общие начало и конец. Кроме того, всегда можно в качестве параметризующего отрезка выбрать $[0, 1]$. Итак, начало, конец и направление движения по траектории являются характеристиками всей кривой, а не отдельно взятого пути из класса эквивалентности. В частности, кривая называется *замкнутой*, если ее параметризации замкнуты, т.е. совпадают начало и конец кривой.

Кривая γ называется *жордановой*,если параметризация $z = z(t),\ \alpha \le t \le \beta$, осуществляет топологическое отображение отрезка $[\alpha, \beta]$. Кривая называется *замкнутой жордановой*, если параметризация осуществляет топологическое отображение полуинтервала $[\alpha, \beta)$ и $z(\alpha) = z(\beta)$. Другими словами, замкнутая жордановая кривая — это топологическое отображение окружности в плоскость.

Определим теперь на множестве кривых две операции. Под сменой *ориентации* кривой γ с параметризацией $z = z(t),\ \alpha \le t \le \beta$, понимается кривая $-\gamma$ (часто пишут также "γ^-"), которая определяется параметризацией $z = z(-t),\ -\beta \le t \le -\alpha$. Грубо говоря, при смене ориентации меняется направление обхода.

Далее, если конец кривой $\gamma_1 : z = z_1(t),\ \alpha_1 \le t \le \beta_1$, совпадает с началом кривой $\gamma_2 : z = z_2(t),\ \alpha_2 \le t \le \beta_2$, то под суммой кривых γ_1 и γ_2 будем понимать кривую $\gamma_1 + \gamma_2$ с параметризацией

$$z = \begin{cases} z_1(\alpha_1 + 2t(\beta_1 - \alpha_1)) & \textit{при} \quad 0 \le t \le 1/2, \\ z_2(\alpha_2 + (2t-1)(\beta_2 - \alpha_2)) & \textit{при} \quad 1/2 \le t \le 1. \end{cases}$$

Очевидным образом (по индукции) определяется конечная сумма кривых. Заметим, что сумма определена не для каждой пары кривых и не обладает свойством коммутативности. Однако так определенная операция обладает свойством ассоциативности.

Выделим теперь совокупность гладких кривых. Путь

$$z = z(t) = x(t) + iy(t), \quad \alpha \le t \le \beta,$$

называется *гладким*, если функции $x(t)$ и $y(t)$ являются непрерывно дифференцируемыми на $[\alpha, \beta]$ и $z'(t) = x'(t) + iy'(t) \ne 0$ при $t \in [\alpha, \beta]$. Эквивалентность гладких путей определяется посредством замены $\tau = \tau(t)$, которая непрерывно дифференцируема и $\tau'(t) > 0$ при всех t. Производные в концевых точках, например $z'(\alpha)$, понимаются как односторонние. Класс эквивалентности гладких путей называется *гладкой кривой*.

Заметим, что у гладкой кривой $\gamma : z = z(t),\ \alpha \leq t \leq \beta$, в каждой точке $z(t)$ существует касательная с направлением $\arg z'(t)$. Очевидно, что ориентация кривой индуцирует ориентацию касательной. Под *кусочно–гладкой кривой* будем понимать конечную сумму гладких кривых.

Пусть теперь $w = f(z)$ — аналитическая в области D функция. Будем говорить, что f *однолистна* в D, если $f(z_1) = f(z_2)$, влечет $z_1 = z_2$ для любой пары точек из D. Допустим теперь, что $f'(z) \neq 0$ в D. Поскольку $|f'(z_0)|^2$ — якобиан отображения $w = f(z)$ в точке z_0, то в силу теоремы о неявных функциях в окрестности точки $w_0 = f(z_0)$ существует обратная функция $z = f^{-1}(w)$. Очевидно, что она также будет аналитической и

$$\left(f^{-1}\right)'(w) = \lim_{\Delta w \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta w} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{1}{\Delta w / \Delta z} = \frac{1}{f'(z)}.$$

Таким образом, аналитическая в области D функция с необращающейся в нуль производной является *локально однолистной.* Из локальной однолистности не следует еще глобальная (т. е. во всей области D). Примером этому может служить функция $f(z) = z^2$, рассматриваемая в кольце $1 < |z| < 2$.

Рассмотрим гладкую кривую $\gamma : z = z(t),\ \alpha \leq t \leq \beta$, расположенную в области D. Тогда уравнение $w = f(z(t))$ будет определять некоторую гладкую кривую γ^* в w-плоскости. Действительно, из равенства

$$w'(t) = f'(z(t)) \cdot z'(t) \tag{1}$$

и условий на γ и f следует, что $w'(t) \neq 0$. Кроме того, из равенства (1) следует, что направление касательной к кривой γ^* в точке $w_0 = w(t_0)$ связано с направлением касательной к кривой γ в точке $z_0 = z(t_0)$ равенством:

$$\arg w'(t_0) = \arg f'(z_0) + \arg z'(t_0). \tag{2}$$

Равенство (2) выясняет геометрический смысл аргумента производной и показывает, что угол между направлениями касательных к кривым γ и γ^* в соответствующих точках z_0 и w_0 равен $\arg f'(z_0)$. Следовательно, этот угол не зависит от выбора кривой γ, а кривые, проходящие через точку z_0 и имеющие в ней общую касательную, переходят посредством f в кривые, проходящие через точку w_0 и имеющие в ней общую касательную. Более того, две кривые γ_1 и γ_2, образующие в точке z_0 угол θ, переходят в кривые γ_1^* и γ_2^*, которые пересекаются в точке w_0 под тем же углом θ (с учетом направления отсчета). Это свойство называют *консерватизмом углов* или *конформностью* отображения $w = f(z)$ в точке z_0.

Выяснение геометрического смысла модуля производной также приводит к некоторому свойству отображения. Из равенства

$$\lim_{z\to z_0} \frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|} = |f'(z_0)|$$

видно, что при отображении $w = f(z)$ бесконечно малый элемент длины в точке z_0 растягивается или сжимается в $|f'(z_0)|$ раз. Другими словами, $|f'(z_0)|$ является коэффициентом искажения масштаба на кривых в точке z_0, и этот коэффициент не зависит от направления. Вообще говоря, этот коэффициент меняется от точки к точке.

Пусть теперь $w = f(z)$ определена в области D и непрерывно дифференцируема в вещественном смысле, т. е. существуют и непрерывны в D частные производные $\partial f/\partial x$ и $\partial f/\partial y$. Рассмотрим вопрос, какими свойствами будет обладать f, если предположить конформность отображения $w = f(z)$ или постоянство искажения масштаба. При сделанных предположениях производную от функции $w(t) = f(z(t))$ можно представить в виде

$$w'(t_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0)x'(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(z_0)y'(t_0).$$

В терминах $z'(t_0) = x'(t_0) + iy'(t_0)$ это равенство принимает вид

$$w'(t_0) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right) z'(t_0) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right) \overline{z'(t_0)},$$

откуда получаем

$$\frac{w'(t_0)}{z'(t_0)} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right) \frac{\overline{z'(t_0)}}{z'(t_0)}. \qquad (3)$$

Консерватизм углов отображения $w = f(z)$ в точке z_0 означает, что

$$\arg\left[\frac{w'(t_0)}{z'(t_0)}\right]$$

не зависит от $\arg z'(t_0)$. Это эквивалентно тому, что правая часть (3) имеет постоянный аргумент. Однако при полном изменении $\arg z'(t_0)$ правая часть равенства (3) описывает окружность с центром в точке $\frac{1}{2}[\partial f/\partial x - i\partial f/\partial y]$ и радиусом $\frac{1}{2}[\partial f/\partial x + i\partial f/\partial y]$. Таким образом, консерватизм углов влечет равенство нулю радиуса этой окружности, что выражается в виде

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -i\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Это, как мы видели ранее, и есть уравнения Коши–Римана, записанные в комплексной форме.

Аналогично постоянство искажения линейного элемента приводит к условию независимости модуля правой части (3) от $\arg z'(t_0)$. Это возможно лишь при условии вырождения окружности, которую описывает правая часть (3), либо условии попадания ее центра в начало координат. Следствием первого условия, как мы только что показали, является система уравнений Коши–Римана, т. е. аналитичность функции f. Второе условие эквивалентно равенству

$$\frac{\partial f}{\partial x} = i\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Это равенство выражает тот факт, что $\overline{f(z)}$ является аналитической функцией. В этом случае углы сохраняются по величине, но меняется их направление. Такое свойство называется *антиконформностью.*

Отображение, осуществляемое аналитической однолистной в области D функцией f, называют *конформным отображением* этой области. Отображение, осуществляемое функцией $\overline{f}$, называют *антиконформным отображением* области D.

§ 3. Дробно–линейные преобразования

Общие свойства. Среди всех аналитических функций наиболее простые отображающие свойства имеют рациональные функции 1-го порядка. Они обладают многочисленными замечательными свойствами, которые выводят их далеко за рамки элементарной теории. Кроме того, свободное владение их свойствами составляют основу достаточно эффективной вычислительной техники.

Любое дробно–линейное преобразование записывается в виде

$$L(z) = \frac{az+b}{cz+d}\ , \tag{1}$$

где a, b, c, d — комплексные числа, называемые *коэффициентами дробно–линейного преобразования*, удовлетворяют условию

$$ad - bc \neq 0, \tag{2}$$

Это условие отвечает за невырожденность отображения $w = L(z)$. Действительно, числа $-b/a$ и $-d/c$ являются нулями числителя и знаменателя дроби (1). Условие (2) означает, что это различные числа.

Как невырожденная рациональная функция первого порядка дробно–линейное преобразование L осуществляет топологическое отображение расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$ на себя, поскольку для любого $\zeta \in \overline{\mathbb{C}}$ уравнение $L(z) = \zeta$ имеет в $\overline{\mathbb{C}}$ единственное решение. При этом $L(\infty) = a/c$ и $L(-d/c) = \infty$. Замечая также, что

$$L'(z) = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2},$$

приходим к выводу о конформности L в $\mathbb{C}\backslash\{-d/c\}$.

Отметим теперь свойства совокупности всех дробно–линейных преобразований. Если

$$L_1(z) = \frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1}, \qquad L_2(z) = \frac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2}$$

— произвольные два дробно-линейные преобразования, то их композиция

$$L(z) = L_1 \circ L_2(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

также является дробно-линейным преобразованием и $ad-bc = (a_1 d_1 - b_1 c_1)(a_2 d_2 - b_2 c_2)$. Таким образом, дробно-линейные преобразования замкнуты относительно операции композиции. Кроме того, обратная функция

$$z = L^{-1}(w) = \frac{dw-b}{-cw+a}$$

также является дробно–линейным преобразованием. Следовательно, совокупность всех дробно–линейных преобразований образует группу относительно операции композиции. Следует отметить, что это некоммутативная группа.

Ангармоническое отношение. Установим вначале результат, согласно которому соответствие трех точек вполне определяет дробно–линейное отображение.

Теорема 1. *Пусть z_1, z_2, z_3 — различные точки в $\overline{\mathbb{C}}$. Тогда существует и единственно дробно–линейное преобразование T, которое переводит эти точки соответственно в* $1, 0$ *и* ∞.

Доказательство. В случае конечных точек z_1, z_2 и z_3 это отображение можно предъявить формулой:

$$T(z) = \frac{z - z_2}{z - z_3} \Big/ \frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3}.$$

В случае когда одна из этих точек бесконечно удаленная, требуемое отображение задается одной из формул:

$$T = \begin{cases} \dfrac{z - z_2}{z - z_3} & \text{при} \quad z_1 = \infty, \\ \dfrac{z_1 - z_3}{z - z_3} & \text{при} \quad z_2 = \infty, \\ \dfrac{z - z_2}{z_1 - z_3} & \text{при} \quad z_3 = \infty, \end{cases}$$

которые получаются соответствующими предельными переходами.

Докажем теперь единственность этого отображения. Действительно, пусть S — дробно–линейное преобразование с теми же свойствами. Тогда дробно–линейное преобразование $L = S \circ T^{-1}$ оставляет неподвижными точки 1,0 и ∞. Из условия $L(\infty) = \infty$ следует, что $L(z) = az + b$. Используя теперь условия $L(0) = 0$ и $L(1) = 1$, приходим к тождеству $L(z) = z$. Отсюда сразу же следует, что $S(z) = T(z)$. □

Следствие. Для любых различных трех точек z_1, z_2, z_3 в z-плоскости и различных трех точек w_1, w_2, w_3 в w-плоскости существует и единственно дробно-линейное преобразование L, такое что $L(z_k) = w_k, k =$

$1, 2, 3$. Требуемое отображение определяется из соотношения

$$(z, z_1, z_2, z_3) = (w, w_1, w_2, w_3).$$

Определение. *Под ангармоническим отношением* (z_1, z_2, z_3, z_4) *четырех различных точек* z_1, z_2, z_3 *и* z_4 *понимается образ точки* z_1 *при отображении ее посредством дробно-линейного преобразования, которое переводит точки* z_2, z_3 *и* z_4 *в 1,0 и* ∞ *соответственно.*

Важность ангармонического отношения обусловлена уже тем, что оно является инвариантом для дробно–линейных преобразований.

Теорема 2. *Пусть* z_1, z_2, z_3, z_4 *— четыре различные точки и* L *— дробно–линейное преобразование. Тогда*

$$(L(z_1), \ldots, L(z_4)) = (z_1, \ldots, z_4).$$

Доказательство. Пусть $T(z) = (z_1, z_2, z_3, z_4)$. Тогда $T \circ L^{-1}$ переводит точки $L(z_2), L(z_3)$ и $L(z_4)$ соответственно в 1,0 и ∞. Следовательно,

$$(L(z_1), L(z_2), L(z_3), L(z_4)) = T \circ L^{-1} = T(z_1) = (z_1, z_2, z_3, z_4).$$

$\square$

Круговое свойство. Отметим вначале, что окружности на сфере Римана при стереографической проекции соответствует на комплексной плоскости окружность или прямая. Это приводит к мысли о целесообразности рассматривать прямую в $\overline{\mathbb{C}}$ как окружность, проходящую через бесконечно удаленную точку. Поэтому в дальнейшем под окружностью в $\overline{\mathbb{C}}$ будем понимать такое расширенное ее значение.

Предложение 1. *Прообразом вещественной оси для любого дробно–линейного преобразования является окружность в* $\overline{\mathbb{C}}$.

Доказательство. Пусть L определяется равенством (1) с условием (2) на его коэффициенты. Нам нужно найти множество точек z, для которых $\operatorname{Im} L(z) = 0$, т. е. удовлетворяющих условию

$$\frac{az + b}{cz + d} - \frac{\overline{a}\,\overline{z} + \overline{b}}{\overline{c}\,\overline{z} + \overline{d}} = 0.$$

Это равенство можно переписать в эквивалентной форме

$$(a\overline{c} - c\overline{a})|z|^2 + (a\overline{d} - c\overline{b})z + (b\overline{c} - d\overline{a})\overline{z} + (b\overline{d} - d\overline{b}) = 0. \qquad (3)$$

Если $a\overline{c} - c\overline{a} = 0$, то уравнение (3) определяет в комплексной плоскости прямую, т. е. окружность в $\overline{\mathbb{C}}$.

Допустим теперь, что $a\overline{c} - c\overline{a} \neq 0$. Тогда уравнение (3) переписывается в эквивалентном виде

$$|z|^2 + \frac{a\overline{d} - \overline{b}c}{a\overline{c} - c\overline{a}} z + \frac{b\overline{c} - \overline{a}d}{a\overline{c} - c\overline{a}} \overline{z} + \frac{b\overline{d} - \overline{b}d}{a\overline{c} - c\overline{a}} = 0$$

или после выделения полного квадрата модуля в виде

$$\left| z + \frac{b\overline{c} - a\overline{d}}{a\overline{c} - c\overline{a}} \right| = \left| \frac{ad - bc}{a\overline{c} - c\overline{a}} \right|,$$

что определяет окружность. □

Предложение 2. *Ангармоническое отношение* (z_1, z_2, z_3, z_4) *вещественно в том и только в том случае, если точки* z_1, z_2, z_3, z_4 *лежат на одной окружности в* $\overline{\mathbb{C}}$.

Доказательство. Утверждение следует из предыдущего результата, примененного к дробно–линейному преобразованию $T(z) = (z_1, z_2, z_3, z_4)$. □

Теорема 3. *При дробно–линейных преобразованиях окружности в* $\overline{\mathbb{C}}$ *переходят в окружности в* $\overline{\mathbb{C}}$.

Доказательство. Пусть L — произвольное дробно-линейное преобразование и C — окружность в z-плоскости. Выберем на ней три различные точки z_1, z_2, z_3. В силу инвариантности ангармонического отношения

$$(z, z_1, z_2, z_3) \equiv (L(z), L(z_1), L(z_2), L(z_3)).$$

В силу предложения 2 левая часть последнего тождества вещественна в том и только в том случае, когда $z \in C$. Применение предложения 2 к правой части тождества показывает, что $L(z)$ пробегает окружность, проходящую через $L(z_1), L(z_2)L(z_3)$ и $L(z_3)$, когда z пробегает C. □

Принцип симметрии. Если дробно–линейное преобразование определяется вещественными коэффициентами, то оно переводит вещественную ось на себя, а точки z и $\overline{z}$, симметричные относительно вещественной оси, в симметричные. В виду кругового свойства можно ожидать выполнения этого и в более общей ситуации. Чтобы рассуждения были одинаково применимыми к прямой и окружности, естественно использовать ангармоническое отношение. Как видно из предложения 2, в его терминах легко определяется попадание текущей точки на окружность, определяемую тремя своими точками. Оказывается, ангармоническое отношение отражает и более точное расположение точек относительно окружности.

Предложение 3. *Пусть z_1, z_2, z_3 — три различные точки в C и C — окружность (или прямая), проходящая через них. Тогда точки z и z^* симметричны относительно C в том и только в том случае, если выполняется соотношение*

$$(z^*, z_1, z_2, z_3) = \overline{(z, z_1, z_2, z_3)}. \tag{4}$$

Доказательство. Поскольку $T(z) = (z, z_1, z_2, z_3)$ является взаимнооднозначным отображением $\overline{\mathbb{C}}$ на себя, то достаточно показать, что условие (4) влечет симметрию точек z и z^*. Выделим в доказательстве два случая.

1) Пусть C — прямая. В этом случае $(z_1 - z_2)/(z_1 - z_3)$ вещественно и условие (4) принимает вид:

$$\frac{z^* - z_2}{z^* - z_3} = \frac{\overline{z} - \overline{z_2}}{\overline{z} - \overline{z_3}}.$$

Но тогда из равенств

$$\arg \frac{z^* - z_2}{z^* - z_3} = -\arg \frac{z - z_2}{z - z_3}, \qquad \frac{|z^* - z_2|}{|z^* - z_3|} = \frac{|z - z_2|}{|z - z_3|}$$

следует подобие треугольников с вершинами z^*, z_2, z_3 и z, z_2, z_3. Поскольку у них еще общая сторона, то они равны. Отсюда сразу же следует симметричность z^* и z.

2) Пусть C — окружность с центром в a и радиуса R. Систематическое использование инвариантности ангармонического отношения дает:

$$\begin{aligned}(z^*, z_1, z_2, z_3) &= \overline{(z, z_1, z_2, z_3)} = \overline{(z-a,\ z_1-a,\ z_2-a,\ z_3-a)}\\ &= \left(\overline{z}-\overline{a}, \frac{R^2}{z_1-a}, \frac{R^2}{z_2-a}, \frac{R^2}{z_3-a}\right) =\\ &= \left(\frac{R^2}{\overline{z}-\overline{a}}, z_1-a,\ z_2-a,\ z_3-a\right)\\ &= \left(\frac{R^2}{\overline{z}-\overline{a}}+a,\ z_1,\ z_2,\ z_3\right),\end{aligned}$$

откуда следует, что

$$z^* = a + R^2/(\overline{z}-\overline{a}) \quad \text{и} \quad (z^*-a)(\overline{z}-\overline{a}) = R^2.$$

Таким образом,

$$\arg(z^*-a) = \arg(z-a) \quad \text{и} \quad |z^*-a|\cdot|z-a| = R^2.$$

$\square$

Теорема 4. *Если дробно–линейное преобразование L переводит окружность C_1 в окружность C_2 (в расширенном смысле), то оно преобразует каждую пару точек, симметричных относительно C_1, в пару точек, симметричных относительно C_2.*

Доказательство. Пусть z_1, z_2, z_3 — три различные точки на окружности C_1. Тогда симметричность точек z и z^* относительно C_1 выражается равенством

$$(z^*, z_1, z_2, z_3) = \overline{(z, z_1, z_2, z_3)}\ .$$

В силу инвариантности ангармонического отношения имеем

$$(L(z^*), L(z_1), L(z_2), L(z_3)) = \overline{(L(z), L(z_1), L(z_2), L(z_3))}\ ,$$

что означает симметричность точек $L(z^*)$ и $L(z)$ относительно окружности, определяемой точками $L(z_1), L(z_2)$ и $L(z_3)$, т. е. C_2. □

Подытоживая полученные результаты, мы видим, что любые два круга в $\overline{\mathbb{C}}$ (т. е. круг или полуплоскость) являются конформно эквивалентными. Требуемое конформное отображение осуществляется дробно–линейным преобразованием. Для его отыскания можно воспользоваться соответствием трех точек и искать его, разрешая уравнение

$$(w, w_1, w_2, w_3) = (z, z_1, z_2, z_3)\ ,$$

где z_1, z_2, z_3 — точки на одной окружности, а w_1, w_2, w_3 — точки на ее образе. Однако этот путь приводит к громоздким формулам. Более изящным является путь, использующий принцип симметрии.

Найдем для примера все дробно–линейные преобразования, которые отображают верхнюю полуплоскость на единичный круг и отображения единичного круга на себя. В первом случае допустим, что A, $\operatorname{Im} A > 0$, — точка, которая переходит в начало координат. В силу принципа симметрии $z = \overline{A}$ будет переводить в точку $w = \infty$. Однако точками, которые переходят в нуль и бесконечность, дробно–линейное преобразование определяется однозначно с точностью до постоянного множителя

$$w = k\frac{z - A}{z - \overline{A}}\ . \tag{5}$$

Поскольку $|x - A| = |x - \overline{A}|$ при $x \in \mathbb{R}$, то условие соответствия вещественной оси и единичной окружности приводит к равенству $|k| = 1$. Таким образом, общий вид требуемого отображения определяется формулой (5), в которой комплексные числа A и k играют роль параметров и удовлетворяют условиям $\operatorname{Im} A > 0$ и $|k| = 1$.

Аналогично устанавливается, что общий вид дробно–линейного преобразования, отображающего единичный круг на себя, определяется формулой:

$$w = k\frac{z - a}{1 - \overline{a}z}\ ,$$

где $|a| < 1$ и $|k| = 1$.

Упражнения

1. Докажите, что отображение
$$L \longrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$
действующее из группы всех дробно–линейных преобразований в группу матриц 2×2 относительно умножения, является гомоморфизмом.

2. Покажите, что отображения вида
$$w = z + a, \quad w = bz, \quad w = 1/z,$$
где a и $b \neq 0$ — комплексные числа, можно рассматривать как систему образующих в группе всех дробно–линейных преобразований.

3. Докажите, что всякое дробно–линейное преобразование, которое переводит вещественную ось в себя, можно записать с вещественными коэффициентами.

4. Пусть дробно–линейное преобразование переводит пару концентрических окружностей в другую пару концентрических окружностей. Докажите, что отношение радиусов окружностей при этом сохраняется.

5. Найдите дробно–линейное преобразование, которое переводит $|z| = 1$ и $\operatorname{Re} z = 2$ в концентрические окружности. Чему равняется отношение их радиусов ?

§ 4. Элементарные конформные отображения

Конформное отображение, ассоциированное с аналитической функцией, позволяет получить наглядное представление о ней, подобно графику в случае функции вещественного пременного. Кроме того, во многие области математики теория функции комплексного переменного входит через конформное отображение. Одной из наиболее важных проблем, возникающих при этом, является задача отыскания конформного отображения одной области на другую. Чтобы иметь представление о разрешимости этого вопроса в рамках элементарных функций, нужно хорошо знать их отображающие свойства. Последнее достигается, как правило, выяснением вопроса, как преобразуются те или иные семейства кривых. Наиболее общий подход состоит в изучении образов координатных прямых $x = x_0$ или $y = y_0$. Если записать $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, то образом прямой $x = x_0$ будет кривая, которая задается параметрическими уравнениями $u = u(x_0, y)$, $v = v(x_0, y)$, $-\infty < y < \infty$. Образы прямой $y = y_0$ описываются аналогично. Вместе они образуют ортогональную сетку в w-плоскости. В некоторых случаях удобно использовать полярные координаты и изучать образы концентрических окружностей и прямолинейных лучей, выходящих из начала координат.

Основным инструментом в практике конформного отображения являются дробно–линейные преобразования, степенная функция, экспонента и логарифм.

Степенная функция. $w = z^\alpha$, $0 < \alpha < \infty$. Ранее мы видели, что в $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ выделяется однозначная ветвь функции z^α. Поскольку

$$|w| = |z|^\alpha, \qquad \arg w = \alpha \arg z,$$

то концентрические окружности с центром в начале координат переводятся в окружности этого же семейства, а лучи, выходящие из начала координат, переводятся в такие же лучи. Из равенства

$$(z^\alpha)' = \alpha \frac{w}{z}$$

следует, что степенная функция осуществляет отображение, конформное во всех точках $z \neq 0$, а угол θ в начале координат преобразуется в угол раствора $\alpha\theta$.

Таким образом, в случае $0 < \alpha \leq 1$ степенная функция однолистна в области $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$ и конформно отображает ее на сектор $\{w : -\alpha\pi < \arg w < \alpha\pi\}$. В случае $\alpha > 1$ степенная функция не является однолистной в $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$. Однако она будет однолистной в любом секторе $\{w : -\pi/\alpha < \arg w < \pi/\alpha\}$.

Экспонента. $w = e^z$ переводит прямые $x = x_0$ и $y = y_0$ в окружности с центром в начале координат и в лучи, выходящие из начала координат соответственно. Всякая другая прямая в z-плоскости переходит в логарифмическую спираль. Экспонента является однолистной в каждой области, которая не содержит ни одной пары точек, разность которых кратна $2\pi i$. В частности, горизонтальная полоса $\{z\ :\ y_1 < \operatorname{Im} z < y_2\}$ при $y_2 - y_1 < 2\pi$ отображается на сектор $\{w\ :\ y_1 < \arg w < y_2\}$, который в случае $y_2 - y_1 = \pi$ является полуплоскостью.

В заключение этого параграфа рассмотрим рациональную функцию

$$w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) = \frac{1+z^2}{2z},$$

которая носит имя *Жуковского*, применившего ее для аэродинамического расчета крыльев. Она имеет два простых полюса в точках $z = 0$ и ∞. Ее производная

$$\frac{dw}{dz} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{z^2}\right)$$

отлична от нуля всюду в $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, кроме точек $z = \pm 1$.

Выясним теперь условия однолистности функции Жуковского в какой–либо области $D \subset \mathbb{C}$. Пусть z_1, z_2 — произвольные две точки в $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Тогда

$$z_1 + \frac{1}{z_1} - \left(z_2 + \frac{1}{z_2}\right) = (z_1 - z_2)\left(1 - \frac{1}{z_1 z_2}\right)$$

и мы видим, что D является областью однолистности функции Жуковского в том и только в том случае, если она не содержит пары точек z_1, z_2, для которых $z_1 \cdot z_2 = 1$. Простейшими такими областями являются внутренность и внешность единичного круга. Чтобы наглядно представить отображение, осуществляемое функцией Жуковского, положим $z = r\,e^{i\theta},\ w = u + iv$. Тогда

$$u = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\theta, \qquad v = \frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\theta.$$

Из этих равенств видно, что окружности $|z| = r_0,\ r_0 > 1$, переходят в эллипсы с полуосями

$$a = \frac{1}{2}\left(r_0 + \frac{1}{r_0}\right), \qquad b = \frac{1}{2}\left(r_0 - \frac{1}{r_0}\right)$$

и фокусами в точках $w = \pm 1$, поскольку $a^2 - b^2 = 1$. При $r + 0 \to 1$ имеем $b \to 1$ и эллипсы стягиваются к отрезку $[-1, 1]$. Лучи $\theta = \theta_0$, $1 < r < \infty$, преобразуются в части гипербол

$$\frac{u^2}{\cos^2 \theta_0} - \frac{v^2}{\sin^2 \theta_0} = 1$$

с теми же фокусами ± 1. В силу конформности семейство этих гипербол ортогонально описанному выше семейству эллипсов.

Глава III

Комплексное интегрирование

§ 1. Определение и основные свойства интеграла

Пусть $\gamma : z = z(t),\ \alpha \le t \le \beta$, — некоторая кривая в $\mathbb{C}$. Под ее длиной понимается величина

$$\mathrm{length}(\gamma) = \sup \sum_{i=1}^{n} |z(t_i) - z(t_{i-1})|,$$

где супремум берется по всем разбиениям $\alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = \beta$ интервала $[\alpha, \beta]$ (или кривой γ). Если этот супремум конечен, то кривая γ называется *спрямляемой*. Для каждого разбиения кривой γ и функции f, определенной на этой кривой (точнее на множестве $\{z = z(t) : t \in [\alpha, \beta]\}$), рассмотрим два типа интегральных сумм:

$$\sum_{i=1}^{n} f(z(\tau_i))(z(t_i) - z(t_{i-1})), \qquad \sum_{i=1}^{n} f(z(\tau_i))|z(t_i) - z(t_{i-1})|,$$

где $\tau_i \in [t_{i-1}, t_i],\ i = 1, \ldots, n$. Из теории криволинейных интегралов первого и второго рода, примененной к вещественной и мнимой частям этих сумм, следует существование их пределов при условии спрямляемости γ и непрерывности f, когда $\max_i |t_i - t_{i-1}| \to 0$. Эти пределы будем соответственно обозначать:

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\gamma (u\,dx - v\,dy) + i\int_\gamma (u\,dy + v\,dx),$$

$$\int_\gamma f(z)\,|dz| = \int_\gamma u\,ds + i\int_\gamma v\,ds,$$

где $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, $z = x + iy$, а ds — элемент длины. В случае кусочно–гладкой кривой имеем также

$$\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(z(t))z'(t)\,dt, \qquad \int\limits_{\gamma} f(z)\,|dz| = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(z(t))|z'(t)|\,dt.$$

Из свойств криволинейных интегралов сразу же следуют аналогичные свойства введенных интегралов:

$$\begin{aligned} \int\limits_{\gamma}(af+bg)\,dz &= a\int\limits_{\gamma} f\,dz + b\int\limits_{\gamma} g\,dz \quad (\textit{линейность}),\\ \int\limits_{\gamma_1+\gamma_2} f\,dz &= \int\limits_{\gamma_1} f\,dz + \int\limits_{\gamma_2} f\,dz \qquad (\textit{аддитивность}). \end{aligned}$$

В этих двух равенствах dz можно заменить на $|dz|$. Однако

$$\int\limits_{-\gamma} f\,dz = -\int\limits_{\gamma} f\,dz, \qquad \int\limits_{-\gamma} f\,|dz| = \int\limits_{\gamma} f\,|dz|.$$

Применяя неравенство треугольника к интегральным суммам, получаем следующее неравенство:

$$\left|\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz\right| \le \int\limits_{\gamma} |f(z)|\cdot|dz|.$$

Заметим, что при $f(z) \equiv 1$ последний интеграл равняется длине кривой γ, т. е.

$$\int\limits_{\gamma} |dz| = \mathrm{length}(\gamma).$$

Другой аспект интегрального исчисления связан, как и в вещественном анализе, с рассмотрением интегрирования как операции, обратной к дифференцированию. В связи с этим аналитическую в области D функцию F будем называть *первообразной* функции f, если $F'(z) = f(z)$ для всех $z \in D$. Другими словами, $f(z)\,dz$ является *полным дифференциалом* в области D.

Эти две концепции интегрирования связывает следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть f — непрерывная в области D функция. Тогда интеграл*

$$\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz$$

определяется только концевыми точками кривой γ, расположенной в области D, и не зависит от ее формы в том и только в том случае, когда $f(z)\,dz$ — полный дифференциал в области D.

Доказательство. Пусть $f(z)\,dz$ — полный дифференциал, т. е. существует такая аналитическая в области D функция F, что $F'(z) = f(z)$ при $z \in D$. Если $\gamma\,:\,z = z(t),\ \alpha \le t \le \beta$, — кусочно–гладкая кривая в области D, то

$$\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(z(t))z'(t)\,dt = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \frac{d}{dt}F(z(t))\,dt = F(z(\beta)) - F(z(\alpha)).$$

Случай произвольной спрямляемой кривой легко достигается путем аппроксимации ее ломаными. Однако мы не будем активно этим пользоваться и всюду в дальнейшем будем иметь дело в основном с кусочно–гладкими кривыми.

Обратно, пусть интеграл $\int_{\gamma} f(z)\,dz$ не зависит от формы кривой в области D. Фиксируем произвольную точку $z_0 \in D$ и определим функцию

$$F(z) = \int\limits_{\gamma} f(z)\,dz,$$

где γ — ломаная, соединяющая z_0 с текущей точкой z. В силу сделанных предположений функция F корректно определена. Покажем, что она голоморфна в D и $F'(z) = f(z)$. Действительно, пусть z — произвольная точка области D и $\varepsilon > 0$. В силу открытости D и непрерывности f найдется такое $\delta > 0$, что $(z+\zeta) \in D$ и $|f(z+\zeta)-f(z)| < \varepsilon$ при $|\zeta| < \delta$. Тогда

$$F(z+\zeta) - F(z) = \int\limits_{[z,z+\zeta]} f(\xi)\,d\xi,$$

где $[z, z+\zeta]$ — отрезок, соединяющий z и $z+\zeta$. Поскольку

$$\int\limits_{[z,z+\zeta]} f(\xi)\,d\xi = \zeta\cdot f(z) + \int\limits_{[z,z+\zeta]} [f(\xi) - f(z)]\,d\xi,$$

то

$$\left|\frac{F(z+\zeta) - F(z)}{\zeta} - f(z)\right| = \frac{1}{|\zeta|}\left|\int\limits_{[z,z+\zeta]} [f(\xi) - f(z)]\;d\xi\right| \le$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{|\zeta|} \operatorname{length}([z, z+\zeta]) = \varepsilon.$$

$\square$

В качестве приложения доказанной теоремы отметим, что для любой замкнутой кривой γ и целого неотрицательного n

$$\int_\gamma (z-a)^n \, dz = 0.$$

Действительно, функция $(z-a)^{n+1}/(n+1)$ является первообразной подынтегральной функции во всей комплексной плоскости, а в силу замкнутости γ ее начальная и конечная точки совпадают. Если n отрицательно, но не равно -1, то аналогичный результат имеет место для любой замкнутой кривой γ, не проходящей через точку a, поскольку в области $\mathbb{C} \setminus \{a\}$ приведенная выше функция является первообразной. При $n = -1$ это уже выполняется не всегда. Рассмотрим круг $\Delta = \{z : |z-a| < r\}$. Через $\partial\Delta$ обозначим положительно ориентированную границу этого круга. В дальнейшем в случае таких простых областей, как круг, треугольник, прямоугольник, будем под *положительно ориентированной границей* понимать окружность или соответствующую ломаную, которая однократно обходится так, что ограниченная ею область остается слева. Часто такое определение положительно ориентированной границы распространяют вплоть до жордановых областей, хотя в этом случае оно лишено смысла.

Итак, параметризацию $\partial\Delta : z = a + re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, можно рассматривать как представитель положительно ориентированной границы круга Δ. Тогда $z' = ire^{it} \, dt$ и

$$\int_{\partial\Delta} \frac{dz}{z-a} = \int_0^{2\pi} i \, dt = 2\pi i.$$

В случае когда кривая γ содержится в некоторой полуплоскости, не содержащей точки a, имеет место равенство:

$$\int_\gamma \frac{dz}{z-a} = 0,$$

поскольку в этой полуплоскости можно выделить однозначную ветвь $\ln(z-a)$, которая будет первообразной подынтегральной функции.

Упражнения

1. Используя представление

$$x = \frac{1}{2}(z + \overline{z}) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{r^2}{z}\right)$$

на окружности $|z| = r$, вычислите интеграл

$$\int\limits_{\partial\Delta} x\,dz,$$

где $\Delta = \{z\,:\,|z| < r\}$.

2. Вычислите интеграл

$$\int\limits_{\partial\Delta} |z - 1| \cdot |dz|,$$

где $\Delta = \{z\,:\,|z| < 1\}$.

3. Допустим, что функция f аналитична на замкнутой кривой γ и f' непрерывна на ней. Докажите, что

$$\int\limits_{\gamma} \overline{f(x)} f'(z)\,dz$$

является чисто мнимым.

Решение. Поскольку $\int \overline{f} f'\,dz = \int \overline{w}\,dw$ и $(u - iv)\,d(u + iv) = (u\,du + v\,dv) - i(v\,du - u\,dv)$, то $\operatorname{Re} \int \overline{f} f'\,dz = \int u\,du + v\,dv = \frac{1}{2} \int\, d(u^2 + v^2) = 0$ (замкнутость кривой).

4. Допустим, что f аналитична в области D и удовлетворяет неравенству $|f(z) - 1| < 1$ при $z \in D$. Предполагая для удобства непрерывность f', докажите, что

$$\int\limits_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = 0$$

для любой замкнутой кривой γ в D.

5. Пусть по определению $\int\limits_{\gamma} f\,d\overline{z} = \overline{\int\limits_{\gamma} \overline{f}\,dz}$. Покажите, что если $P(z)$ — полином и $\Delta = \{z\,:\,|z - a| < r\}$, то

$$\int\limits_{\partial\Delta} P(z)\,d\overline{z} = -2\pi i r^2 P'(a).$$

Решение. Пусть

$$P(z)=\sum_{k=0}^{n} b_k(z-a)^k \Rightarrow \overline{P(z)}=\sum_{k=0}^{n} \overline{b_k}\frac{r^{2k}}{(z-a)^k}$$

и

$$\int\limits_{\partial\Delta} \overline{P}\,dz=2\pi i\overline{b_1}r^2.$$

§ 2. Теорема Коши в выпуклой области

В предыдущем параграфе мы установили, что существование первообразной функции f в области D эквивалентно условию независимости интеграла $\int_\gamma f\,dz$ от формы кривой. Последнее равносильно обращению в нуль этого интеграла по любой замкнутой кривой γ в D. Действительно, если γ_1 и γ_2 — две кривые в D с одними и теми же концевыми точками, то $\gamma_1-\gamma_2$ будет замкнутой кривой и равенство нулю интеграла $\int_{\gamma_1-\gamma_2}$ приводит к равенству $\int_{\gamma_1}=\int_{\gamma_2}$. Результаты, устанавливающие равенство нулю интегралов от аналитических функций вдоль кривых или систем кривых, носят название *теорем Коши.*

В этом параграфе мы установим теорему Коши для выпуклой области. Случай более сложных областей потребует развития дополнительных топологических средств. Следующий результат принадлежит Гурса и иногда называется *основной леммой интегрального исчисления.*

Лемма. *Пусть f — аналитическая в области D функция и треугольник Δ содержится в D вместе со своим замыканием. Тогда*

$$\int\limits_{\partial\Delta} f(z)\,dz=0.$$

Доказательство. Введем для интеграла вдоль положительно ориентированной границы треугольника Δ обозначение:

$$\eta(\Delta)=\int\limits_{\partial\Delta} f(z)\,dz.$$

Соединяя середины сторон треугольника Δ, разобьем его на четыре конгруентных треугольника $\Delta^{(1)}, \ldots \Delta^{(4)}$. Очевидно, что

$$\eta(\Delta) = \eta(\Delta^{(1)}) + \ldots + \eta(\Delta^{(4)}),$$

поскольку интегрирования вдоль общих сторон взаимно уничтожаются. Из этого равенства следует, что найдется среди $\Delta^{(1)}, \ldots, \Delta^{(4)}$ треугольник, обозначим его Δ_1, для которого $|\eta(\Delta_1)| \geq \frac{1}{4}|\eta(\Delta)|$. Теперь разобьем Δ_1 на четыре конгруентных треугольника $\Delta_1^{(1)}, \ldots, \Delta_1^{(4)}$ и выберем из них Δ_2 так, чтобы выполнялось неравенство $|\eta(\Delta_2)| \geq \frac{1}{4}|\eta(\Delta_1)|$. Продолжая этот процесс, получим последовательность вложенных треугольников $\Delta \supset \Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \ldots$ удовлетворяющих условию $|\eta(\Delta_n)| \geq \frac{1}{4}|\eta(\Delta_{n-1})|$. Следовательно, при всех натуральных n

$$|\eta(\Delta_n)| \geq \frac{1}{4^n}|\eta(\Delta)|. \tag{1}$$

Легко видеть, что центры треугольников Δ_n образуют сходящуюся последовательность и в силу замкнутости треугольников мы получаем существование точки $z^* \in \Delta$, которая принадлежит всем треугольникам последовательности.

Для произвольного $\varepsilon > 0$ выберем $\delta > 0$ так, чтобы окрестность $\mathcal{O}(z^*, \delta)$ содержалась в области D и при $z \in \mathcal{O}(z^*, \delta)$ выполнялось неравенство

$$\left|\frac{f(z) - f(z^*)}{z - z^*} - f'(z^*)\right| < \varepsilon. \tag{2}$$

Поскольку периметры треугольников Δ_n связаны с периметром исходного треугольника соотношением

$$\mathrm{length}(\partial\Delta_n) = \frac{1}{2^n}\lambda,$$

где $\lambda = \mathrm{length}(\partial\Delta)$, то найдется такой номер n, что $\Delta_n \subset \mathcal{O}(z^*, \delta)$. Заметим также, что

$$\int\limits_{\partial\Delta_n} dz = 0, \qquad \int\limits_{\partial\Delta_n} z\, dz = 0,$$

поскольку dz и $z\,dz$ являются полными дифференциалами в $\mathbb{C}$. Но тогда

$$\eta(\Delta_n) = \int\limits_{\partial\Delta_n} [f(z) - f(z^*) - (z - z^*)f'(z^*)]\, dz$$

и в силу (2)

$$|\eta(\Delta_n)| \le \varepsilon \int\limits_{\partial\Delta_n} |z - z^*| \cdot |dz|.$$

Подынтегральное выражение не превышает периметра треугольника Δ_n, т. е. величины $\lambda/2^n$, и мы можем продолжить оценку:

$$|\eta(\Delta_n)| \le \varepsilon \frac{\lambda^2}{4^n}.$$

Сравнивая ее с неравенством (1), получаем

$$|\eta(\Delta)| \le \varepsilon\lambda^2.$$

Поскольку ε было произвольным, то $\eta(\Delta) = 0$ и лемма доказана.

$\square$

Теорема 1. *Пусть f —аналитическая в выпуклой области D функция. Тогда $f(z)\,dz$ — полный дифференциал в D и*

$$\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz = 0$$

для любой замкнутой кривой γ в D.

Доказательство. Фиксируем произвольно в области D точку a и определим в D функцию

$$F(z) = \int\limits_{[a,z]} f(\zeta)\,d\zeta.$$

Из доказанной леммы следует, что

$$F(z+\zeta) - F(z) = \int\limits_{[z,z+\zeta]} f(\xi)\,d\xi$$

при любых $z \in D$ и ζ, для которого $(z+\zeta) \in D$. Здесь мы используем также выпуклость области D.

Повторяя теперь рассуждения, проведенные при доказательстве теоремы предыдущего параграфа, придем к заключению о дифференцируемости функции F и выполнению равенства $F'(z) = f(z)$. Таким образом, $f(z)\,dz$ является полным дифференциалом в области D и теорема доказана.

$\square$

Замечание. Полученный результат влечет *локальную* теорему существования первообразной голоморфной функции. Если f голоморфна в произвольной области D, то в любом круге $\Delta \subset D$ она имеет первообразную. Вопрос существования глобальной первообразной существенно зависит от топологических свойств области D. В предыдущем параграфе мы видели, что уже в кольце он может решаться отрицательно. С другой стороны, выпуклость области вовсе не обязательна.

§ 3. Индекс. Цепи и циклы

Чтобы активнее включить аналитический аппарат в изучении свойств, введем сразу понятие *индекса* для кусочно–гладких кривых, хотя это — чисто топологическое понятие. Кроме того, аналитическое определение индекса позволит в дальнейшем эффективнее его использовать в вычислениях.

Определение. *Пусть γ — кусочно–гладкая замкнутая кривая, не проходящая через точку a. Тогда индексом $J(\gamma, a)$ точки a относительно кривой γ называется число*

$$J(\gamma, a) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} \frac{dz}{z-a}.$$

Иногда $J(\gamma, a)$ называют *порядком* кривой γ относительно точки a. Выясним геометрический смысл индекса. Пусть $z = z(t)$, $\alpha \le t \le \beta$, — параметризация кривой γ. Поскольку расстояние от a до γ положительно, то найдется такое разбиение $\alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = \beta$ интервала $[\alpha, \beta]$, что каждая из кривых $\gamma_k\ :\ z = z(t),\ t_{k-1} \le t \le t_k,\ k = 1, \ldots, n$, содержится в некотором круге Δ_k (каждая в своем), не содержащем точку a. Очевидно, что $\gamma = \gamma_1 + \ldots + \gamma_n$ и

$$J(\gamma, a) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} \frac{dz}{z-a} = \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{\gamma_k} \frac{dz}{z-a}.$$

С другой стороны, в каждом круге Δ_k можно выделить однозначную ветвь функции $\ln(z-a)$ и

$$\int\limits_{\gamma_k} \frac{dz}{z-a} = \ln\left|\frac{z(t_k)-a}{z(t_{k-1})-a}\right| + i\arg\frac{z(t_k)-a}{z(t_{k-1})-a}.$$

Выражение в правой части этого равенства не зависит от выбора ветви $\ln(z-a)$ в круге Δ_k, а мнимая часть его равна приращению (в радианной мере) угла, который описывает вектор $z-a$ на дуге γ_k. Суммируя эти равенства по k от 1 до n, получаем чисто мнимое число, которое выражает полное приращение угла поворота вектора $z-a$ на всей кривой γ. Учитывая нормирующий множитель в определении $J(\gamma, a)$, приходим к выводу, что индекс точки a относительно кривой γ выражает число оборотов вектора, соединяющего a с точкой $z(t)$, когда она обходит кривую γ. Отсюда следует, в частности, что индекс принимает только целочисленные значения.

Отметим теперь другие свойства индекса. Непосредственно из определения следует, что

$$J(-\gamma, a) = -J(\gamma, a).$$

Теорема 1. *Как функция точки a индекс $J(\gamma, a)$ является постоянным в каждой компоненте связности множества $\mathbb{C}\setminus\gamma$ и обращается в нуль во внешней компоненте связности.*

Доказательство. Пусть две точки a и b принадлежат одной компоненте связности множества $\mathbb{C}\setminus\gamma$. Тогда в этой компоненте связности их можно соединить ломаной. Таким образом, первая часть утверждения будет доказана, если мы покажем, что $J(\gamma, a) = J(\gamma, b)$ в случае, когда отрезок $[a, b]$ не пересекается с γ.

Поскольку отображение $w = (z-a)/(z-b)$ переводит внешность отрезка $[a, b]$ на $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}^-$, то во внешности этого отрезка выделяется однозначная ветвь функции $\ln\dfrac{z-a}{z-b}$. При этом

$$\left(\ln\frac{z-a}{z-b}\right)' = \frac{1}{z-a} - \frac{1}{z-b}$$

и, следовательно,

$$\int\limits_{\gamma}\left(\frac{1}{z-a} - \frac{1}{z-b}\right)dz = 0,$$

что означает равенство $J(\gamma, a) = J(\gamma, b)$.

Осталось показать, что во внешней компоненте $J(\gamma, a) = 0$. Это следует из постоянства индекса в ней и того, что интеграл

$$\int_{\gamma_k} \frac{dz}{z-a}$$

стремится к нулю, когда $a \to \infty$.

Рассмотрим случай, когда $\gamma = \partial\Delta$ — положительно ориентированная граница круга $\Delta = \{z : |z-a| < r\}$. Из геометрического смысла (или из вычислений, проведенных в конце § 1) следует, что $J(\partial\Delta, a) = 1$. В силу доказанной теоремы $J(\partial\Delta, \zeta) = 1 \quad \forall \zeta \in \Delta$ и $J(\partial\Delta, \zeta) = 0$ при $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \overline{\Delta}$. Этим оправдывается термин "положительно ориентированная граница". Сделаем еще одно важное наблюдение. Если кривую γ непрерывно деформировать, не задевая точку a, то $J(\gamma, a)$ будет меняться непрерывно. Однако, в силу целочисленности индекса, $J(\gamma, a)$ будет оставаться при этом постоянным. Это может быть эффективно использовано при вычислении индекса относительно сложных кривых.

Отмечая, наконец, топологический характер индекса, наметим путь определения $J(\gamma, a)$ в случае произвольной замкнутой кривой γ, не проходящей через точку a. Для этого кривая γ разбивается на дуги $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$, каждая из которых содержится в некотором круге, не содержащем точки a. Обозначая через σ_k отрезок, соединяющий начало и конец дуги γ_k, определим ломаную $\sigma_1 + \ldots + \sigma_n$ и положим $J(\gamma, a) = J(\sigma, a)$.

Упражнения

1. Покажите, что приведенное выше определение $J(\gamma, a)$ не зависит от ломаной σ.

2. Покажите, что новое определение индекса совпадает с прежним на кусочно–гладких кривых.

3. Докажите теорему 1 для произвольных замкнутых кривых.

Как уже отмечалось, обобщение теоремы Коши будем развивать в двух направлениях. С одной стороны, будем искать наиболее широкий класс областей, для которых утверждение теоремы остается в силе. С другой стороны, считая область произвольной, будем искать системы кривых, на которых результат интегрирования любой аналитической функции будет нулем.

Вначале рассмотрим расширение понятия кривой в рамках интегрирования. В качестве отправного пункта возьмем равенство

$$\int\limits_{\gamma_1+\ldots+\gamma_n} f(z)\,dz = \int\limits_{\gamma_1} f(z)\,dz + \ldots + \int\limits_{\gamma_2} f(z)\,dz, \tag{1}$$

которое имеет место в случае, когда $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$, образуют разбиение кривой $\gamma = \gamma_1 + \ldots + \gamma_n$. Заметим, что правая часть в (1) имеет смысл и тогда, когда $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ — произвольная совокупность кривых. В этом случае формальную сумму

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \ldots + \gamma_n = \gamma \tag{2}$$

назовем *цепью*. Очевидно, что различные формальные суммы (2) могут представлять одну и ту же цепь. Другими словами, под *цепью* следует понимать класс эквивалентных формальных сумм (2), а *эквивалентными* читать те цепи, которые дают одно и то же значение интегралу (1) при любой непрерывной функции f. Очевидно, что следующие операции не выводят за класс эквивалентности:

(i) перестановка двух кривых γ_i и γ_j;

(ii) разбиение кривой на дуги и объединение дуг в одну общую кривую;

(iii) аннулирование двух противоположно ориентированных дуг.

Очевидным образом определяется сумма двух цепей. Это достигается соединением двух сумм в одну общую сумму. В случае суммы эквивалентных цепей удобно обозначить результат как кратное. В такой терминологии каждую цепь можно представить в виде

$$\gamma = m_1\gamma_1 + \ldots + m_n\gamma_n, \tag{3}$$

где m_j — положительные целые, а γ_j — различные кривые. Для противоположно ориентированных кривых можно писать

$$m(-\gamma) = -m\gamma,$$

и тогда (3) преобразуется в сумму, в которой отсутствуют пары противоположно ориентированных кривых, но коэффициенты m_j могут быть отрицательными целыми. Допуская также нулевые коэффициенты, можно любые две цепи представить в виде (3) с одними и теми же кривыми γ_j. Тогда их сумма будет получаться простым суммированием коэффициентов при одноименных кривых. Под *нулевой* цепью будем понимать либо пустую сумму, либо сумму с нулевыми коэффициентами.

Цепь γ будем называть *циклом*, если ее можно представить в виде (3), где все γ_j являются замкнутыми кривыми. Будем также говорить, что цепь (или цикл) содержится в области D, если она допускает представление (3), в котором все кривые γ_j расположены в D. В этом контексте циклы играют роль замкнутых кривых. В частности, для любого цикла γ и точки $a \notin \gamma$ (т. е. γ допускает представление (3), каждая кривая γ_j которого не проходит через a) определен индекс

$$J(\gamma, a) = \sum_{j=1}^{n} m_j J(\gamma_j, a).$$

Он обладает теми свойствами, что были установлены выше, если кривые заменить на циклы.

Определение. *Цикл γ в области D называется гомологичным нулю относительно области D, если $J(\gamma, a) = 0$ для любой точки $a \notin D$. При этом пишут $\gamma \sim 0 (\operatorname{mod} D)$ или просто $\gamma \sim 0$, если ясно, относительно какой области.*

Понятие $\gamma_1 \sim \gamma_2 (\operatorname{mod} D)$ означает, что $\gamma_1 - \gamma_2 \sim 0 (\operatorname{mod} D)$. Запас циклов в области D, гомологичных нулю, зависит от ее топологических свойств, т. е. является топологической характеристикой области. Можно пойти немного дальше и ввести в рассмотрение группу гомологий.

Теорема 2. *Область $D \subseteq \mathbb{C}$ односвязна в том и только в том случае, если всякий цикл γ в D является гомологичным нулю относительно области D.*

Доказательство. Допустим вначале, что D односвязна и цикл γ расположен в D. Поскольку $\overline{\mathbb{C}} \setminus D$ связно и содержит ∞, то оно содержится во внешней компоненте связности множества $\overline{\mathbb{C}} \setminus \gamma$. Следовательно, по теореме 1 имеем $J(\gamma, a) = 0$ для всех $a \notin D$, что означает $\gamma \sim 0 (\operatorname{mod} D)$.

Обратно, допустим, что $A = \overline{\mathbb{C}} \setminus D$ не является связным. Это означает существование таких открытых множеств G_1 и G_2, что $A_1 = A \cap G_1$ и $A_2 = A \cap G_2$ не пусты $A = A_1 \cup A_2$, и

$$G_1 \cap G_2 \cap A \neq 0. \tag{4}$$

Замкнутость множества A влечет замкнутость A_1 и A_2. Действительно, если, например, предположить, что $\zeta \in A_2$ является предельной точкой множества A_1, то $\mathcal{O}(\zeta, \varepsilon) \cap A_1 \neq 0$ для любого $\varepsilon > 0$. Однако, в силу открытости множества G_2, найдется такое $\varepsilon > 0$, что $\mathcal{O}(\zeta, \varepsilon) \subseteq G_2$. В результате мы приходим в противоречие с условием (4).

Одно из множеств, пусть это будет для определенности A_2, содержит ∞. Тогда множество A_1 будет ограниченным и пусть $\delta > 0$ меньше расстояния от A_1 до A_2. Выберем точку $a \in A_1$ и выполним разбиение плоскости на квадраты со сторонами $\delta/2$ проведением сетки прямых, параллельных координатным осям, так, чтобы a являлось центром одного из квадратов Q_0. Занумеруем также все остальные квадраты $Q_1, \ldots, Q_n$, замыкание которых имеет непустое пересечение с A_1. Поскольку A_1 ограничено, то их будет конечное число, а в силу выбора δ пересечение любого с множеством A_2 пусто. Рассмотрим цикл

$$\gamma = \sum_{j=0}^{n} \partial Q_j. \tag{5}$$

Поскольку для каждого из квадратов, кроме Q_0, точка a является внешней, то

$$J(\gamma, a) = \sum_{j=0}^{n} J(\partial Q_j, a) = J(\partial Q_0, a) = 1.$$

При этом, после аннулирования сторон квадратов, входящих в γ с противоположной ориентацией, цикл γ будет расположен в D. Действительно, каждая сторона, имеющая непустое пересечение с A_1, входит в сумму (5) в качестве частей границ двух смежных квадратов с противоположной ориентацией. Таким образом, мы нашли цикл γ в D, который не является гомологичным нулю относительно D.

$\square$

§ 4. Общая форма теоремы Коши

Понятие цикла, гомологичного нулю, позволяет сформулировать наиболее общий вид теоремы Коши.

Теорема 1. *Пусть f — голоморфная в области D функция и цикл γ гомологичен нулю относительно области D. Тогда*

$$\int_{\gamma} f(z)\,dz = 0.$$

Доказательство. Выполним вначале разбиение γ на дуги $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ так, чтобы каждая γ_j содержалась в круге $\Delta_j \subset D$. Поскольку $f(z)\,dz$ — полный дифференциал в Δ_j, то

$$\int_{\gamma_j} f(z)\,dz = \int_{\lambda_j} f(z)\,dz,$$

где λ_j — ломаная, соединяющая в Δ_j концы дуги γ_j и имеющая звенья, параллельные координатным осям. Сумма $\lambda = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j$ представляет собой цикл, состоящий из замкнутых ломаных со звеньями, параллельными координатным осям. При этом

$$\int_{\lambda} f(z)\,dz = \int_{\gamma} f(z)\,dz. \tag{1}$$

Заметим, что (1) имеет место для любой аналитической в D функции f. В частности, если $a \notin D$, то $1/(z-a)$ является аналитической в D и $J(\lambda, a) = J(\gamma, a) = 0$, т. е. $\lambda \sim 0$.

Далее, через каждую вершину λ проведем прямые, параллельные координатным осям. В результате мы получим сетку, разбивающую всю плоскость на конечное число прямоугольников $Q_1, \ldots, Q_{n'}$ и неограниченных областей $H_1, \ldots H_{n''}$ типа полуполос или углов. Исключая тривиальный случай, когда λ расположено на одной прямой, существует хотя бы один прямоугольник, т. е. $n' \neq 0$. Обозначим через a_j центры прямоугольников Q_j и покажем, что λ можно представить в виде

$$\lambda = \sum_{j=1}^{n'} J(\lambda, a_j)\partial Q_j. \tag{2}$$

Для этого нам нужно показать, что

$$\sigma = \lambda - \sum_{j=1}^{n'} J(\lambda, a_j)\partial Q_j$$

является нулевым циклом.

Допустим вначале, что σ_{ij} — сторона, общая для двух прямоугольников Q_i и Q_j. Будем считать, что σ_{ij} ориентирована как в ∂Q_i. Допустим также, что σ_{ij} входит в σ с коэффициентом k. Тогда цикл $\sigma - k\partial Q_i$ не содержит σ_{ij} и точки a_i, a_j принадлежат одной и той же компоненте связности множества $\mathbb{C} \setminus (\sigma - k\partial Q_i)$. По теореме 1 предыдущего параграфа

$$J(\sigma - k\partial Q_i, a_i) = J(\sigma - k\partial Q_i, a_j) \tag{3}$$

С другой стороны, используя равенство $J(\partial Q_r, a_s) = \delta_{rs}$ — *символ Кронекера*, получаем

$$\begin{aligned} J(\sigma - k\partial Q_i, a_i) &= J\left(\lambda - \sum_{r=1}^{n'} J(\lambda, a_r)\partial Q_r - k\partial Q_i, a_i\right) = \\ &= J(\lambda, a_i) - J(\lambda, a_i)\cdot J(\partial Q_i, a_i) - kJ(\partial Q_i, a_i) = -k \end{aligned}$$

и

$$J(\sigma - k\partial Q_i, a_j) = J(\lambda, a_j) - J(\lambda, a_j)\cdot 1 - k \cdot 0 = 0.$$

Таким образом, в силу равенства (3) имеем $k = 0$ и отрезок σ_{ij} не входит в σ.

Аналогично рассматривается случай, когда σ_{ij} является смежной стороной прямоугольника Q_i и неограниченной области H_j. В этом случае из точки a_i можно провести луч, расположенный в $Q_i \cup H_j$. Это означает, что a_i находится во внешней компоненте множества $\mathbb{C} \setminus (\sigma - k\partial Q_i)$ и, следовательно, $J(\sigma - k\partial Q_i, a_i) = 0$. С другой стороны, проведенные выше вычисления дают $J(\sigma - k\partial Q_i, a_i) = -k$, и мы снова получаем $k = 0$.

Таким образом, представление (2) доказано. Покажем теперь, что это представление является внутренним относительно области D. Более точно, что в сумму (2) входят с ненулевыми коэффициентами лишь те ∂Q_i, для которых $Q_i \subset D$. Действительно, пусть $a \in \overline{Q_i}$ и $a \notin D$. Поскольку $\lambda \sim 0(\operatorname{mod} D)$, то $J(\lambda, a) = 0$. Кроме того, в рассматриваемом случае отрезок $[a_i, a]$ не пересекает λ и по теореме 1 предыдущего параграфа $J(\lambda, a_i) = J(\lambda, a) = 0$, т. е. коэффициент перед ∂Q_i в сумме (2) равен нулю.

Из теоремы Коши для выпуклой области для прямоугольников $Q_i \subset D$ имеет место равенство

$$\int\limits_{\partial Q_i} f(z)\, dz = 0,$$

откуда следует равенство

$$\int\limits_{\lambda} f(z)\, dz = 0,$$

которое в силу (1) доказывает теорему.

□

Из доказанной теоремы и гомологического описания односвязной области (теорема 2 предыдущего параграфа) сразу же следует

Теорема 2. *Если f — аналитическая в односвязной области D функция и γ — замкнутая кривая в D, то*

$$\int\limits_{\gamma} f(z)\, dz = 0.$$

В традиционных курсах теории аналитических функций нет упоминания о гомологиях и не используется явно понятие индекса. Обычно под γ понимают систему кривых, образующих полную границу некоторой подобласти в D и ориентированных так, что при их обходе выделяемая подобласть остается слева. Однако при строгом изложении нужны значительные усилия, чтобы придать точный смысл этому интуитивному представлению. Основное возражение против такого подхода[1] состоит в необходимости очень большую часть времени

[1] см.: Ahlfors L.V., Complex analysis, New York: McGraw–Hill, 1966, стр. 150.

посвятить периферийным с точки зрения предмета исследований вопросам. В контексте наших рассмотрений легко выделить классический случай путем введения следующего понятия.

Определение. *Будем говорить, что цикл γ ограничивает область D, если индекс $J(\gamma, a)$ определен и равен 1 для любой точки $a \in D$ и либо не определен, либо равен нулю для точек $a \notin D$.*

Заметим, что если γ ограничивает D и $D \cup \gamma$ содержится в более широкой области D', то $\gamma \sim 0 (\operatorname{mod} D')$.

Теорема 3. *Пусть цикл γ ограничивает область D и f — аналитическая на множестве $D \cup \gamma$ функция. Тогда*

$$\int\limits_{\gamma} f(z)\, dz = 0.$$

§ 5. Интегральная формула Коши и некоторые ее следствия

Теорема 1. *Пусть f — аналитическая в области D функция и γ — цикл гомологичный нулю относительно области D. Тогда для любой точки $a \in D \setminus \gamma$ выполняется равенство*

$$J(\gamma, a) \cdot f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f(z)\, dz}{z - a}. \tag{1}$$

Доказательство. Поскольку $D \setminus \gamma$ является открытым множеством, то для достаточно малых $r > 0$ круг $\Delta = \{z : |z - a| \leq r\}$ содержится в $D \setminus \gamma$. Легко видеть, что цикл $\gamma - J(\gamma, a) \cdot \partial\Delta$ будет гомологичен нулю относительно проколотой области $D \setminus \{a\}$. Заметим также, что в проколотой области функция $f(z)/(z - a)$ является аналитической, и применяя теорему Коши, получим

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f(z)\, dz}{z - a} = J(\gamma, a) \cdot \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial\Delta} \frac{f(z)\, dz}{z - a}. \tag{2}$$

Однако

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial\Delta} \frac{f(z)\, dz}{z - a} - f(a) \right| = \frac{1}{2\pi} \left| \int\limits_{\partial\Delta} \frac{f(z) - f(a)}{z - a}\, dz \right| \leq r \cdot \max_{z \in \partial\Delta} \left| \frac{f(z) - f(a)}{z - a} \right|$$

и может быть сделано сколь угодно малым при $r \to 0$. Осуществляя в (2) предельный переход при $r \to 0$, получаем (1).

□

Замечание. Наиболее частое применение доказанной теоремы относится к случаю, когда цикл γ ограничивает область D и функция f является аналитической на множестве $D \cup \gamma$. В этом случае для всех $z \in D$ имеет место равенство:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z}. \tag{3}$$

Его называют *интегральной формулой Коши.* Она позволяет найти значения функции f внутри области D по ее значениям на границе γ.

Интегральная формула Коши дает идеальный инструмент для исследования локальных свойств аналитических функций. При этом в качестве γ мы можем брать окружность, которая ограничивает круг, расположенный в D. В частности, мы можем теперь доказать, что аналитическая функция имеет производные всех порядков, которые сами являются аналитическими функциями. Для этого выделим отдельно конструкцию, содержащуюся в (1) и (3).

Пусть γ — некоторая кривая и φ — заданная на ней непрерывная функция. Тогда выражение

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{\varphi(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z}$$

называют *интегралом Коши* с плотностью φ. Формула (3) выражает тот факт, что f представляет собой внутри D интеграл Коши.

Лемма. *Пусть φ непрерывна на кривой γ. Тогда функции*

$$F_n(z) = \int\limits_{\gamma} \frac{\varphi(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - z)^n},$$

$n = 1, 2, \ldots,$ *являются аналитическими в каждой из областей, определяемых γ, и*

$$F_n'(z) = nF_{n+1}(z).$$

Доказательство. Докажем вначале непрерывность F_1. Для произвольной точки $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \gamma$ выберем $\delta > 0$ так, чтобы $\mathcal{O}(z_0, \delta)$ не пересекалось с γ. Тогда для $z \in \mathcal{O}(z_0, \delta/2)$ будем иметь

$$|F_1(z) - F_1(z_0)| = |z - z_0| \left| \int_\gamma \frac{\varphi(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta - z)(\zeta - z_0)} \right| \leq |z - z_0| \frac{2}{\delta^2} \int_\gamma |\varphi(\zeta)||d\zeta|,$$

откуда следует непрерывность F_1 в точке z_0.

Заметим теперь, что отношение разностей

$$\frac{F_1(z) - F_1(z_0)}{z - z_0} = \int_\gamma \frac{\varphi(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta - z)(\zeta - z_0)}$$

имеет ту же структуру, что и F_1, с плотностью $\varphi/(\zeta - z_0)$. Поэтому, по доказанному, ее предел при $z \to z_0$ существует и равен $F_2(z_0)$. Таким образом, равенство $F_1'(z) = F_2(z)$ установлено.

Воспользуемся теперь методом индукции и допустим, что доказано соотношение $F_{n-1}'(z) = (n-1)F_n(z)$. Тогда из представления

$$F_n(z) - F_n(z_0) = \left[\int_\gamma \frac{\varphi(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta - z)^{n-1}(\zeta - z_0)} - \int_\gamma \frac{\varphi(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta - z_0)^n} \right] +$$

$$+ (z - z_0) \int_\gamma \frac{\varphi(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta - z)^n(\zeta - z_0)}$$

можно получить непрерывность F_n. Действительно, при $z \to z_0$ выражение в квадратных скобках стремится к нулю по предположению индукции, примененному к плотности $\varphi/(\zeta - z_0)$, а интеграл при $(z - z_0)$ является ограниченным. Поделив теперь обе части равенства на $z - z_0$ и используя предположение индукции и непрерывность F_n с плотностью $\varphi/(\zeta - z_0)$, получаем:

$$\lim_{z \to z_0} \frac{F_n(z) - F_n(z_0)}{z - z_0} = (n-1)F_{n+1}(z_0) + F_{n+1}(z_0) = nF_{n+1}(z_0),$$

что и следовало доказать.

□

Следствие. *Из леммы и замечания к теореме* 1 *следует бесконечная дифференцируемость аналитической функции. Кроме того, в* *условиях справедливости формулы* (3) *выполняется также равенство:*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - z)^{n+1}}, \tag{4}$$

которое доказывается из леммы индукцией и также называется интегральной формулой Коши для производных.

Приведем еще несколько следствий интегральной формулы Коши.

Теорема 2 (Морера). *Если f определена и непрерывна в области D и если $\int\limits_{\gamma} f\,dz = 0$ для любой замкнутой кусочно–гладкой кривой γ в D, то f аналитична в D.*

Доказательство. Условие теоремы означает, что $f\,dz$ — полный дифференциал в D. Следовательно, найдется аналитическая в D функция F, для которой $F'(z) = f(z)$. Таким образом, f аналитична как производная аналитической функции.

□

Следующий результат часто используется в приложениях.

Теорема 3. *Пусть f — аналитическая в односвязной области D функция и $f(z) \neq 0$ при $z \in D$. Тогда в D выделяются однозначные ветви $\ln f(z)$ и $(f(z))^a$, $a \in \mathbb{C}$.*

Доказательство. Поскольку f' также аналитична в D и f не обращается в нуль в D, то f'/f является аналитичной в D и по теореме Коши для односвязной области имеет в D первообразную F, т. е. $F' = f'/f$. Для некоторой точки $z_0 \in D$ фиксируем значение $\ln f(z_0)$ и нормируем F с условием $F(z_0) = \ln f(z_0)$. Тогда поскольку

$$\left(f(z)e^{-F(z)}\right)' = f'(z)e^{-F(z)} - F'(z)f(z)e^{-F(z)} = 0$$

всюду в D и $f(z_0)e^{-F(z_0)} = 1$, то $f(z)e^{-F(z)} \equiv 1$ и $f(z) \equiv e^{F(z)}$. Последнее равенство означает, что $F(z) = \ln f(z)$. Выделение степени f^a определяется по формуле $f^a = e^{a \ln f}$.

□

Следующий классический результат известен как *теорема Лиувилля.*

Теорема 4. *Если функция f голоморфна во всей плоскости $\mathbb{C}$ и ограничена, то она тождественно постоянна.*

Доказательство. Пусть $|f(z)| \leq M$ при всех $z \in \mathbb{C}$. Полагая в (4) $z = z_0$ и выбирая в качестве γ положительно ориентированную границу круга $|z - z_0| < r$, получим

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq n!Mr^{-n}. \tag{5}$$

Осуществляя предельный переход при $r \to \infty$, получаем $f^{(n)}(z_0) = 0$. Поскольку точка z_0 выбиралась произвольной, то $f^{(n)}(z) \equiv 0$. При $n = 1$ мы получаем требуемое.

$\square$

Доказанный результат сразу же влечет основную теорему алгебры. Неравенства (5) носят имя Коши. Приведем еще одно геометрическое свойство аналитических функций.

Теорема 5 (О среднем). *Пусть f голоморфна в области D и $\mathcal{O}(a, r) \subset D$. Тогда*

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta})\, d\theta.$$

Доказательство. Выбирая в (3) $z = a$ и $\gamma : \zeta = a + re^{i\theta},\ 0 \leq \theta \leq 2\pi$, приходим к утверждению теоремы.

$\square$

Глава IV

Изолированные особые точки и разложения в ряды

§ 1. Локально равномерная сходимость

В дальнейшем для области $D \subset \mathbb{C}$ через $\mathcal{H}(D)$ будем обозначать совокупность всех голоморфных в D функций.

Определение. *Будем говорить, что последовательность функций $f_n \in \mathcal{H}(D_n)$, $n = 1, 2, \ldots$, сходится локально равномерно в области D к функции f, если для каждой точки $z_0 \in D$ найдутся окрестности $\mathcal{O}_\varepsilon(z_0)$ и натуральное число N, такие, что $\mathcal{O}_\varepsilon(z_0) \subset D_n$ при $n \geq N$ и $f_n(z) \to f(z)$ равномерно в $\mathcal{O}_\varepsilon(z_0)$ при $n \to \infty$.*

Замечание. *Приведенное определение можно дать в терминах компактных подмножеств области D : $f_n \to f$ локально равномерно в $D \Leftrightarrow \forall$ компактного множества $K \subset D$ найдется номер N, такой, что $K \subset D_n$ при $n \geq N$ и $f_n(z) \to f(z)$ равномерно на K.*

Пример. $f_n(z) = z/(1 + 2z^n)$, $n = 1, 2, \ldots$ Здесь функция f_n является аналитической в круге $D_n = \{z : |z| < 2^{-1/n}\}$ и $f_n \notin \mathcal{H}(D)$. С другой стороны, $f_n(z) \to z$ локально равномерно в D. Интересно также обратить внимание на то, что предельная функция $f(z) \equiv z$ является аналитической во всей комплексной плоскости $\mathbb{C}$.

Теорема 1 (Вейерштрасса). *Пусть $f_n \in \mathcal{H}(D_n)$, $n = 1, 2, \ldots$, и $f_n(z) \to f(z)$ локально равномерно в D. Тогда $f \in \mathcal{H}(D)$ и $f_n'(z) \to f'(z)$ локально равномерно в D.*

Доказательство. Учитывая локальный характер наших утверждений, фиксируем произвольную точку z_0 и выберем $0 < r < dist(z_0, \partial D)$. Тогда $\mathcal{O}_r(z_0)$ содержится в D вместе со своим замыканием и по условию теоремы найдется номер N, такой, что $\overline{\mathcal{O}_r(z_0)} \subset D_n$ при $n \geq N$. При этом $f_n \to f$ равномерно на $\overline{\mathcal{O}_r(z_0)}$. Следовательно, f является непрерывной функцией и для любой кусочно–гладкой замкнутой кривой $\gamma \subset \mathcal{O}_r(z_0)$ имеем:

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_\gamma f_n(z)\, dz = \int\limits_\gamma f(z)\, dz.$$

Однако по теореме Коши интегралы слева равны нулю. Но тогда в силу произвольности кривой γ функция f является аналитической в $\mathcal{O}_r(z_0)$ на основании теоремы Морера. Поскольку z_0 была произвольной точкой в D, то $f \in \mathcal{H}(D)$.

Для доказательства второй части утверждения воспользуемся интегральными формулами Коши:

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\Gamma \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - z)^2}, \;\; f_n'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\Gamma \frac{f_n(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - z)^2},$$

$z \in \mathcal{O}_r(z_0), n \geq N$. Здесь Γ — положительно ориентированная окружность $|z - z_0| = r$. В круге $\mathcal{O}_{r/2}(z_0)$ будем иметь:

$$|f'(z) - f_n'(z)| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_\Gamma \frac{f(\zeta) - f_n(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\, d\zeta \right| \leq \frac{4}{r} \max_{\zeta\in\Gamma} \{|f(\zeta) - f_n(\zeta)|\}$$

Поскольку правая часть неравенства не зависит от $z \in \mathcal{O}_{r/2}(z_0)$ и стремится к нулю при $n \to \infty$, то ${f'}_n \to f'$ равномерно в круге $\mathcal{O}_{r/2}(z_0)$.

$\square$

Ранее мы доказали аналитичность суммы степенного ряда. Теорема Вейерштрасса позволяет расширить этот результат.

Теорема 2. *Если ряд $f(z) = \sum_{n=1}^\infty f_n(z)$, составленный из аналитических в области D функций, сходится локально равномерно в D, то его сумма является аналитической в D функцией, и его можно почленно дифференцировать.*

§ 2. Тейлоровское разложение и теорема единственности

Как было показано ранее, сумма степенного ряда представляет собой аналитическую функцию в круге сходимости. Оказывается, что локально каждую аналитическую функцию можно представить в виде суммы степенного ряда.

Теорема 1. *Если $f \in \mathcal{H}(D)$ и z_0 — произвольная точка области D, то в любом круге $\mathcal{O}_r(z_0) \subseteq D$ эту функцию можно представить в виде суммы сходящегося степенного ряда*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n. \tag{1}$$

Доказательство. Пусть $\mathcal{O}_r(z_0) \subseteq D$ и $z \in \mathcal{O}_r(z_0)$. Обозначим через γ_r положительно ориентированную границу круга $\mathcal{O}_r(z_0)$. Тогда по интегральной формуле Коши имеем

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta.$$

Разложим теперь ядро Коши $\dfrac{1}{\zeta - z}$ в ряд:

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - z_0)\left(1 - \dfrac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}.$$

Поскольку для всех $\zeta \in \gamma_r$ имеем

$$\frac{|z - z_0|}{|\zeta - z_0|} = \frac{|z - z_0|}{r} < 1,$$

то полученный ряд мажорируется сходящейся прогрессией и потому сам сходится равномерно на γ_r. Равномерная сходимость не нарушается при умножении его на непрерывную на γ_r (а следовательно, и ограниченную) функцию $\dfrac{1}{2\pi i} f(\zeta)$. Поэтому можно выполнить почленное интегрирование, что дает представление (1), в котором

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}\, d\zeta = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}. \tag{2}$$

Поскольку коэффициенты (2) ряда (1) не зависят ни от точки z, ни от выбора окружности γ_r, то ряд (1) сходится и представляет функцию f, по-крайней мере в круге $\mathcal{O}_\rho(z_0)$, где $\rho = dist(z_0, \partial D)$.

$\square$

Ряд (1), коэффициенты которого вычисляются по формулам (2), называется *рядом Тейлора* функции f в точке z_0.

Теорема 2. *Если f в круге $\mathcal{O}_r(z_0)$ представима как сумма степенного ряда* (1), *то его коэффициенты определяются однозначно равенствами $c_n = f^{(n)}/n!$, $n = 0, 1, 2, \ldots$*

Доказательство. Подставляя в (1) $z = z_0$, находим $f(z_0) = c_0$. Равенство в случае $n = 1, 2, \ldots$ получается в результате n-кратного дифференцирования и последующей подстановки $z = z_0$.

$\square$

Доказанная теорема утверждает единственность разложения функции в степенной ряд с данным центром. Ее иногда формулируют в виде: *всякий сходящийся степенной ряд является рядом Тейлора своей суммы.* В вещественном анализе недостаточно даже бесконечной дифференцируемости, чтобы она была суммой своего ряда Тейлора. Классическим примером является $f(x) = e^{-1/x^2}$.

Точка $a \in \mathbb{C}$ называется *нулем* функции f, если $f(a) = 0$.

Определение. *Порядком (или кратностью) нуля $a \in \mathbb{C}$ функции f, голоморфной в этой точке, называется наименьший номер отличной от нуля производной $f^{(n)}(a)$. Другими словами, точка a называется нулем f порядка m, если*

$$f(a) = \ldots = f^{(m-1)} = 0 \ , \ f^{(m)}(a) \neq 0.$$

Из формул для коэффициентов ряда Тейлора следует, что порядок нуля совпадает с наименьшим номером отличного от нуля коэффициента тейлоровского разложения функции в этой точке. При этом, если a — нуль бесконечного порядка, то $f(z) \equiv 0$ в некоторой окрестности $\mathcal{O}_r(a)$. С другой стороны, если a — нуль конечного порядка m, то найдется окрестность $\mathcal{O}_\delta(a)$, в которой нет нулей функции f, отличных от a. Действительно, в некоторой окрестности $\mathcal{O}_r(a)$ функция f представима рядом Тейлора:

$$f(z) = (z-a)^m \sum_{n=0}^{\infty} c_{m+k}(z-a)^k = (z-a)^m \varphi(z).$$

Здесь φ — голоморфная в $\mathcal{O}_r(a)$ функция и $\varphi(a) = c_m \neq 0$. В силу непрерывности φ найдется окрестность $\mathcal{O}_\delta(a)$, в которой φ не обращается в ноль. Ввиду отсутствия делителей нуля в поле комплексных чисел $f(z) \neq 0$ при $z \in \mathcal{O}_\delta(a) \setminus \{a\}$.

Теорема 3 (Единственности). *Если две голоморфные в области D функции f и g совпадают на множестве E, которое имеет хотя бы одну предельную точку a, принадлежащую D, то $f(z) \equiv g(z)$ всюду в D.*

Доказательство. Нам нужно доказать, что $h(z) = f(z) - g(z)$ обращается в нуль в D тождественно. По условию теоремы h обращается в нуль на E. В силу непрерывности a также является нулем функции h. Из предыдущего видно, что его порядок не может быть конечным и, следовательно, h обращается в нуль в некоторой окрестности $\mathcal{O}_\delta(a)$.

Пусть теперь A — внутренность множества нулей функции h. Очевидно, что A открыто и $a \in A$. Покажем, что $B = D \setminus A$ также является открытым. Действительно, если $b \in B$ не является внутренней точкой, то в любой ее окрестности найдутся точки из A, т. е. b — предельная точка нулей функции h. Но по доказанному она должна тогда принадлежать A. Таким образом, $D = A \cup B$, где A и B — открытые непересекающиеся множества. В силу связности D одно из этих множеств пусто. Однако $A \neq \emptyset$. Следовательно, $B = \emptyset$ и $D = A$. $\square$

Следствие. *Если $f(z) \not\equiv 0$ голоморфна в области D, то все ее нули изолированы и конечного порядка.*

§ 3. Ряды Лорана

Рассмотрим вначале ряд вида:

$$b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \ldots .$$

Простая замена переменной $z = 1/\zeta$ приводит его к обычному степенному ряду $\sum_{n=0}^{\infty} b_n \zeta^n$, областью сходимости которого, как мы знаем, является круг $|\zeta| < R$, где $R = 1/(\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|b_n|})$. Следовательно, областью сходимости исходного ряда является внешность круга $|z| > 1/R$, где его сумма представляет собой аналитическую функцию. Если скомбинировать такой ряд с обычным степенным рядом, то получим более общую форму степенного ряда: $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$, или $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$, областью сходимости которого (если она не пуста) является кольцо.

Теорема 1 (Лорана). *Любую функцию f, голоморфную в кольце*

$$K = \{z : r < |z-a| < R\},$$

можно представить как сумму сходящегося в K ряда

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n, \tag{1}$$

коэффициенты которого определяются по формуле:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - a)^{n+1}}, \tag{2}$$

где γ_ρ — положительно ориентированная окружность $|\zeta - a| = \rho, r < \rho < R$.

Доказательство. Заметим прежде всего, что интервалы в правой части (2) не зависят от значения $\rho \in (r, R)$. Действительно, если $\rho', \rho'' \in (r, R)$, то $\gamma_{\rho'} - \gamma_{\rho''} \sim 0 (\operatorname{mod} K)$ и по теореме Коши, примененной к функции $f(z)/(z-a)^{n+1}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, получаем

$$\int\limits_{\gamma_{\rho'}} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - a)^{n+1}} = \int\limits_{\gamma_{\rho''}} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - a)^{n+1}}.$$

Пусть теперь $r < r' < R' < R$. Тогда цикл $\gamma_{R'} - \gamma_{r'}$ ограничивает кольцо

$$K' = \{z : r' < |z-a| < R'\}.$$

В силу интегральной формулы Коши имеем в K' представление

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_{R'}} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_{r'}} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} = f_1(z) + f_2(z)$$

Функцию f_1 можно рассматривать как интеграл Коши в круге $|z-a| < R'$. Ее разложение в ряд Тейлора (см., например, доказательство теоремы 1 предыдущего параграфа) имеет вид:

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n,$$

где коэффициенты c_n определяются по формуле (2).

Для получения разложения функции f_2 во внешности круга $|z - a| > r'$ представим ядро Коши в виде

$$-\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(z-a)\left(1 - \dfrac{\zeta - a}{z - a}\right)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\zeta - a)^{n-1}}{(z-a)^n}.$$

Поскольку при $|z - a| > z'$ и $\zeta \in \gamma_{r'}$ выполняется неравенство

$$\left|\frac{\zeta - a}{z - a}\right| = \frac{r'}{|z-a|} < 1,$$

то полученный ряд сходится равномерно по $\zeta \in \gamma_{r'}$ и его можно почленно интегрировать. Умножая его на ограниченную функцию $\dfrac{1}{2\pi i} f(\zeta)$ и интегрируя почленно, получим

$$f_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-a)^n},$$

где

$$b_n = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_{r'}} (\zeta - a)^{n-1} f(\zeta)\,d\zeta = c_{-n}.$$

Складывая теперь полученные разложения для f_1 и f_2, получим разложение (1) для функции f в кольце K'. Поскольку r' и R' выбирались произвольно и коэффициенты c_n не зависят от этого выбора, то полученное представление имеет место во всем K.

Определение. *Ряд* (1), *коэффициенты которого вычисляются по формулам* (2), *называется рядом Лорана функции f в кольце K. Совокупность членов этого ряда с неотрицательными степенями называется его правильной частью, а совокупность членов с отрицательными степенями — главной частью.*

Теорема 2 (Единственности). *Если функция f в кольце*

$$K = \{z : r < |z - a| < R\}$$

представима рядом вида (1), *то коэффициенты этого ряда определяются по формулам* (2).

Доказательство. Фиксируем $\rho \in (r, R)$. Ряд (1) сходится равномерно на окружности γ_ρ. Поэтому его можно почленно интегрировать. Равномерная сходимость не нарушается, если его умножить на ограниченную функцию. Умножая равенство (1) на $(z-a)^{-m-1}$, где m — произвольное целое, и переходя к почленному интегрированию, получим

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \int_{\gamma_\rho} (z-a)^{n-m-1}\, dz = \int_{\gamma_\rho} \frac{f(z)\, dz}{(z-a)^{m+1}}.$$

Однако в левой части все слагаемые, кроме соответствующего индексу $n = m$, обращаются в нуль и мы получаем

$$c_m \cdot 2\pi i = \int_{\gamma_\rho} \frac{f(z)\, dz}{(z-a)^{m+1}}.$$

□

Теорему 2 можно сформулировать так: *всякий сходящийся ряд* (1) *является рядом Лорана своей суммы.* Формулы (2) для вычисления коэффициентов ряда Лорана на практике применяются довольно редко ввиду громоздкости сопутствующих вычислений. На основании доказанной теоремы для получения лорановского разложения можно использовать любой корректный прием. Результат будет один и тот же.

§ 4. Изолированные особые точки

Если для $a \in \mathbb{C}$ найдется такая окрестность $\mathcal{O}_r(a)$, что f является голоморфной в проколотой окрестности $\dot{\mathcal{O}}_r(a) = \mathcal{O}_r(a) \setminus \{a\}$, то a называется изолированной особой точкой функции f. В зависимости от поведения функции при приближении к особой точке проведем следующую классификацию.

Определение. *Изолированная особая точка a функции f называется:*

(I) устранимой особой точкой, если существует конечный предел

$$\lim_{z\to a} f(z) = A;$$

(II) полюсом, если $f(z) \to \infty$ при $z \to a$;

(III) существенно особой точкой, если f не имеет ни конечного, ни бесконечного предела при $z \to a$.

Теорема 1. *Изолированная особая точка a функции f является устранимой в том и только в том случае, если f ограничена в некоторой проколотой окрестности $\dot{\mathcal{O}}_r(a)$.*

Доказательство. Необходимость очевидна.

Для доказательства достаточности допустим, что $|f(z)| \le M$ при всех $z \in \dot{\mathcal{O}}_r(a)$ и некотором $M > 0$. По теореме Лорана f представима в $\dot{\mathcal{O}}_r(a)$ рядом вида:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n,$$

где

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - a)^{n+1}},$$

γ_ρ — положительно ориентированная окружность $|z - a| = \rho$, а ρ можно выбрать любым в интервале $(0, r)$. Поскольку

$$|c_n| \le \frac{1}{2\pi} M \cdot \rho^{-n} 2\pi = M\rho^{-n},$$

то $c_n = 0$ при всех отрицательных номерах n. Таким образом, ряд Лорана функции f в $\dot{\mathcal{O}}_r(a)$ является, по существу, обычным степенным рядом и определяет в $\mathcal{O}_r(a)$ голоморфную функцию g, которая совпадает с f в $\dot{\mathcal{O}}_r(a)$.

$\square$

Замечание. *Из доказательства теоремы видно, что переопределение (или доопределение) функции f в устранимой особой точке a делает ее аналитической в полной окрестности $\mathcal{O}_r(a)$. Этим объясняется название.*

Следствие. *Пусть $f \in \mathcal{H}(D)$ и a $(a \in D)$ — нуль порядка m функции f. Тогда в D имеет место равенство:*

$$f(z) = (z-a)^m g(z),$$

где $g \in \mathcal{H}(D)$ и $g(a) \neq 0$.

Доказательство. Функция g, определенная равенством $g(z) = \dfrac{f(z)}{(z-a)^n}$, является аналитической в $D \setminus \{a\}$. Легко видеть также, что a является для g устранимой особой точкой. Следовательно, $g \in \mathcal{H}(D)$. Условие $g(a) = 0$ обозначало бы, что f имеет в a нуль более высокого порядка, чем m. Таким образом, $g(a) \neq 0$.

Теорема 2 (Сохоцкого, Вейерштрасса). *Множество значений, принимаемых аналитической функцией в любой окрестности существенно особой точки, является всюду плотным в $\overline{\mathbb{C}}$.*

Доказательство. Допустим противное. Тогда найдется комплексное число $A \in \mathbb{C}$ и $\varepsilon > 0$ такие, что $|f(z) - A| > \varepsilon$ при $z \in \dot{\mathcal{O}}_r(a)$, где a — существенно особая точка функции f, а $\mathcal{O}_r(a)$ — некоторая ее окрестность. Функция $g(z) = 1/(f(z) - A)$ будет аналитической и ограниченной в $\dot{\mathcal{O}}_r(a)$. По теореме 1 a является устранимой особой точкой функции g. Если $g(a) \neq 0$, то $f(z) \to 1/g(a) + A$ при $z \to a$ и a будет устранимой особой точкой и для f. В случае же $g(a) = 0$ должно выполнятся предельное соотношение $f(z) \to \infty$ при $z \to a$, что означает — a является полюсом функции f. Полученное противоречие с условием теоремы завешает доказательство.

$\square$

При доказательстве теоремы 1 мы установили также, что a является устранимой особой точкой функции f в том и только в том случае, если лорановское разложение в проколотой окрестности этой точки не содержит главной части. Оказывается главная часть лорановского разложения полностью определяет характер особой точки.

Теорема 3. *Изолированная особая точка $a \in \mathbb{C}$ функции f является полюсом (существенно особой) в том и только том случае, если главная часть ряда Лорана функции f в проколотой окрестности $\dot{\mathcal{O}}_r(a)$ содержит конечное (бесконечное) число отличных от нуля членов.*

Доказательство. Пусть лорановское разложение функции f в окрестности $\dot{\mathcal{O}}_r(a)$ имеет вид

$$f(z) = c_{-m}(z-a)^{-m} + c_{-m+1}(z-a)^{-m+1} + \dots, \quad c_{-m} \neq 0.$$

Функция φ, представимая рядом

$$\varphi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{k-m}(z-a)^k,$$

является аналитической в $\mathcal{O}_r(a)$ и $\varphi(a) = c_{-m} \neq 0$. Из равенства $f(z) = (z-a)^{-m}\varphi(z)$ следует, что $f(z) \to \infty$ при $z \to a$. Таким образом, a — полюс функции.

Допустим теперь, что a — полюс. Тогда f не обращается в нуль в некоторой проколотой окрестности $\dot{\mathcal{O}}_r(a)$ и, следовательно, в этой окрестности является аналитической функция $1/f$. Кроме того, $1/f(z) \to 0$ при $z \to a$. Из теоремы 1 следует, что a является устранимой особой точкой для $1/f$. Пусть m — порядок нуля функции $1/f$ в точке a. Тогда

$$\frac{1}{f(z)} = (z-a)^m g(z),$$

где $g \in \mathcal{H}(\mathcal{O}_r(a))$ и g не имеет нулей в $\mathcal{O}_r(a)$. Функция $1/g$ также будет аналитической в $\mathcal{O}_r(a)$ и ее разложение в ряд Тейлора можно записать в виде

$$\frac{1}{g(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n, \qquad c_0 \neq 0.$$

Теперь получаем представление

$$f(z) = (z-a)^{-m} \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n,$$

которое в силу теоремы 2 предыдущего параграфа и есть лорановское разложение функции f.

Из доказанного и заключений относительно устранимой особой точки следует утверждение о существенно особой точке.

□

Определение. *Порядком (или кратностью) полюса a функции f называется порядок этой точки как нуля функции $1/f$.*

Из доказательства теоремы 3 видно, что порядок полюса совпадает с номером старшего члена главной части лорановского разложения функции в окрестности полюса.

Голоморфная в $\mathbb{C}$ функция называется *целой*. В этом случае, как и в случае голоморфности f во внешности круга $|z| > R$, естественно рассмотреть бесконечность как изолированную особую точку. Классификация особых точек на этот случай распространяется путем замены $z = 1/\zeta$ и переноса характера особенности точки $\zeta = 0$ функции $f(1/\zeta)$ на точку $z = \infty$ функции $f(z)$. Если в лорановском разложении в окрестности бесконечности, т. е. по степеням z во внешности круга $|z| > R$, под главной частью понимать совокупность членов с положительными степенями, то связь между классификацией и видом главной части будет такой же, как и в конечных точках.

Характер особенности на бесконечности во многом определяет целую функцию. Действительно, если бесконечность является устранимой особой точкой, то, по теореме Лиувилля, целая функция сводится к тождественной постоянной. Если это — полюс, то главная часть лорановского разложения f в окрестности бесконечно удаленной точки является полиномом $P(z) = c_1 z + \ldots + c_m z^m, \quad c_m \neq 0$. Но тогда $g = f - P$ также будет целой функцией, и бесконечно удаленная точка для g будет устраняемой. Следовательно, $g(z) \equiv const$ и f — полином.

Целые функции с существенной особенностью на бесконечности называются *целыми трансцендентными функциями.* Таковыми являются $e^z, \sin z, \cos z$.

§ 5. Вычеты

Пусть a — изолированная особая точка функции f и $\dot{\mathcal{O}}_r(a)$ — проколотая окрестность, в которой f аналитична. Тогда в силу теоремы Коши, интеграл

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_\rho} f(z)\,dz,$$

где $\gamma_\rho = \partial\mathcal{O}_\rho(a),\ \ 0 < \rho < r$, не зависит от ρ. Его значение называется *вычетом* функции f в точке a и обозначается $\operatorname*{Res}\limits_a f$ или $\operatorname*{Res}\limits_{z=a} f(z)$.

Теорема 1. *Вычет функции f в изолированной особой точке $a \in \mathbb{C}$ равен коэффициенту при $(z-a)^{-1}$ лорановского разложения f в окрестности точки a.*

Доказательство. Поскольку ряд Лорана $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$ сходится равномерно на окружности γ_ρ, то его можно почленно интегрировать:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_\rho} f(z)\,dz = c_{-1}\,J(\gamma_\rho, a) = c_{-1}.$$

$\square$

Замечание. *Из хода доказательства видно, что если γ — замкнутая кусочно–гладкая кривая, расположенная в $\dot{\mathcal{O}}_r(a)$, то*

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz = c_{-1}\,J(\gamma, a) = J(\gamma, a)\,\operatorname*{Res}\limits_a f.$$

Следствие. *В устранимой особой точке вычет равен нулю.*

В случае когда a — полюс, можно привести формулу для вычисления вычета, которая не требует отыскания лорановского разложения. Пусть $m \geq 1$ — порядок полюса. Тогда f имеет в проколотой окрестности $\dot{\mathcal{O}}_r(a)$ разложение вида

$$f(z) = c_{-m}(z-a)^{-m} + c_{-m+1}(z-a)^{-m+1} + \dots$$

где $c_{-m} \neq 0$. Функция $g(z) = (z-a)^m f(z)$ будет иметь a устранимой особой точкой, а c_{-1} будет коэффициентом ее ряда Тейлора при $(z-a)^{m-1}$. Из формул для коэффициентов ряда Тейлора получаем

$$\operatorname*{Res}_a f = c_{-1} = \frac{g^{m-1}(a)}{(m-1)!} = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z\to a}\left[\frac{d^{(m-1)}}{dz^{m-1}}(z-a)^m f(z)\right].$$

Особенно просто эта формула выглядит при $m = 1$:

$$\operatorname*{Res}_a f = \lim_{z\to a}(z-a)f(z).$$

Теорема 2. *Пусть D — область, ограниченная циклом γ, и f — голоморфная на $\overline{D}$ функция, исключая конечное число особых точек $a_1, \dots, a_N$, расположенных в D. Тогда*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)\,dz = \sum_{k=1}^N \operatorname*{Res}_{a_k} f.$$

Доказательство. Пусть $\rho > 0$ таково, что $\overline{\mathcal{O}_\rho(a_k)} \subset D$ при всех $k = 1, \dots, N$ и $\overline{\mathcal{O}_\rho(a_i)} \cap \overline{\mathcal{O}_\rho(a_j)} = \emptyset$ при $i \neq j$. Тогда цикл $\gamma - \sum_{k=1}^N \sigma_k$, где $\sigma_k = \partial\mathcal{O}_\rho(a_k)$, будет гомологичным нулю относительно области голоморфности функции f. Следовательно, по теореме Коши имеем:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)\,dz - \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^N \int_{\sigma_k} f(z)\,dz = 0,$$

что эквивалентно доказываемому равенству.

□

Как уже отмечалось выше, в случае голоморфности f во внешности некоторого круга $|z| > R$ бесконечно удаленную точку естественно причислить к особым. Определим вычет в бесконечности посредством равенства:

$$\operatorname*{Res}_\infty f = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\gamma_\rho} f(z)\,dz,$$

где γ_ρ — положительно ориентированная окружность $|z| = \rho$, $\rho > R$. Интегрируя почленно лорановское разложение $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \, z^n$ на γ_ρ, получаем

$$\operatorname*{Res}_{\infty} f = -c_{-1}.$$

Члены с отрицательными степенями входят в правильную, а не в главную часть лорановского разложения в бесконечности. В отличие от конечных точек вычет в бесконечности может оказаться не равным нулю даже в случае, когда бесконечность является устранимой особой точкой.

Теорема 3. *Пусть f — аналитическая в $\mathbb{C}$ функция, исключая конечное число особых точек $a_1, \ldots, a_N$. Тогда*

$$\operatorname*{Res}_{\infty} f + \sum_{k=1}^{N} \operatorname*{Res}_{a_k} f = 0.$$

Доказательство. Пусть γ — окружность с центром в начале координат и такая, что все a_k, $k = 1, \ldots, N$, попадают внутрь круга, ограниченного γ. Применение предыдущей теоремы дает требуемый результат.

$\square$

Теория вычетов — эффективный инструмент для вычисления определенных интегралов. Следует при этом иметь в виду, что подынтегральная функция должна быть близка к аналитической. Это на практике, как правило, выполняется. Более существенным является то, что теория вычетов связана с интегрированием по замкнутому контуру, в то время как в вещественном анализе интегрирование ведется по отрезку. Рассмотрим на примерах, как эти трудности преодолеваются.

Пример 1. Интеграл вида

$$\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta) \, d\theta,$$

где R — рациональная функция, можно вычислять посредством вычетов. Введение комплексной переменной $z = e^{i\theta}$ преобразует наш интеграл к виду

$$-i\int\limits_{|z|=1} R\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right),\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right)\frac{dz}{z}.$$

Остается найти вычеты в полюсах, попадающих внутрь единичного круга.

Например, вычислим интеграл

$$\int\limits_0^\pi \frac{d\theta}{a+\cos\theta},\quad a>1.$$

Замечая, что расширение интервала интегрирования до $(0,2\pi)$ приводит к удвоению результата, получаем

$$\int\limits_0^\pi \frac{d\theta}{a+\cos\theta}=\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}\frac{d\theta}{a+\cos\theta}=-i\int\limits_{|z|=1}\frac{dz}{z^2+2az+1}.$$

Поскольку

$$z^2+2az+1=(z-z_1)(z-z_2),$$

где $z_k=-a+(-1)^k\sqrt{a^2-1}$, и $|z_1|>1$, $|z_2|<1$, то

$$\int\limits_0^\pi \frac{d\theta}{a+\cos\theta}=2\pi\operatorname*{Res}_{z=z_2}\left\{\frac{-i}{z^2+2az+1}\right\}=\frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}.$$

Пример 2. Интеграл вида

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} R(x)\,dx,$$

где R — рациональная функция, сходится в том и только в том случае, если R не имеет полюсов на вещественной оси, и степень знаменателя, по–крайней мере на 2 порядка выше степени числителя. Выберем $\rho>0$ так, чтобы все полюсы функции R содержались в круге $\mathcal{O}_\rho(0)$. Пусть γ_ρ^+ — часть положительно ориентированной окружности $|z|=\rho$, расположенная в верхней полуплоскости. По теореме о вычетах

$$\int\limits_{-\rho}^{\rho} R(x)\,dx+\int\limits_{\gamma_\rho^+} R(z)\,dz=2\pi i\sum_{\operatorname{Im} a>0}\operatorname*{Res}_{z=a} R(z).$$

Однако при достаточно больших ρ и некоторой константе M будет выполнятся на γ_ρ неравенство $|R(z)| \leq M/\rho^2$. Следовательно, для этих ρ имеем

$$\left|\int\limits_{\gamma_\rho^+} R(z)\,dz\right| \leq \int\limits_{\gamma_\rho^+} |R(z)|\cdot|dz| \leq \frac{\pi M}{\rho} \to 0 \qquad \textit{при} \quad \rho \to \infty.$$

Таким образом,

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} R(x)\,dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} a>0} \operatorname*{Res}_{z=a} R(z).$$

Например,

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=i} \frac{1}{1+z^2} = 2\pi i \frac{1}{2i} = \pi.$$

Глава V

Основные принципы

§ 1. Принцип аргумента

Совокупность $\mathcal{H}(D)$ всех голоморфных в области D функций образует *кольцо*, т. е. замкнуто относительно суммы, разности и произведения функций. Что касается частного f/g двух функций из $\mathcal{H}(D)$, то оно голоморфно в D, за исключением нулей знаменателя g. Допустим, что $g(a) = 0,\ a \in D$. В силу изолированности нулей найдется такая окрестность $\mathcal{O}_r(a) \subset D$, в которой f и g будут иметь представление $f(z) = (z-a)^n f_1(z)$, $g(z) = (z-a)^m g_1(z)$, где f_1 и g_1 — аналитические не обращающиеся в нуль в $\mathcal{O}_r(a)$ функции. Но тогда в $\dot{\mathcal{O}}_r(a)$ будем иметь:

$$\frac{f(z)}{g(z)} = (z-a)^{n-m}\frac{f_1(x)}{g_1(x)}$$

Поскольку $f_1/g_1 \in \mathcal{H}(\mathcal{O}_r(a))$, то f/g имеет в a устранимую особенность при $n \geq m$ и полюс при $n < m$. При этом кратность полюса будет равна $m-n$.

Будем говорить, что функция f *мероморфна* в области D, если она голоморфна всюду в D, за исключением, быть может, некоторого множества полюсов. Очевидно, совокупность $\mathfrak{M}(D)$ всех мероморфных в области D функций образует *поле*. Под *мероморфностью функции в точке* естественно понимать мероморфность в некоторой ее окрестности.

Поскольку полюсы, как и нули, мероморфной в области D функции являются изолированными, то на любом компакте $K \subset D$ их может быть лишь конечное число. Под числом полюсов (или нулей) на множестве K *с учетом их кратности* будем понимать сумму кратностей полюсов (соответственно, нулей), попадающих на K.

Теорема 1. *Пусть D — область, ограниченная циклом γ, и f — мероморфная на $\overline{D}$ функция, не имеющая нулей и полюсов на γ. Тогда число N ее нулей и число P полюсов в области D с учетом их кратности удовлетворяют соотношению*

$$N - P = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz. \tag{1}$$

Доказательство. Поскольку $\overline{D}$ является компактом в области мероморфности функции f, то в D содержится лишь конечное число нулей и полюсов. Пусть $a_1, \ldots, a_n$ — её нули в D с кратностями $s_1, \ldots, s_n$, а $b_1, \ldots, b_m$ — её полюсы с кратностями $q_1, \ldots, q_m$ соответственно. Тогда $N = s_1 + \cdots + s_n$ и $P = q_1 + \cdots + q_m$. Далее рассмотрим функцию

$$g(z) = \prod_{j=1}^{n} (z - a_j)^{-s_j} \cdot \prod_{j=1}^{m} (z - b_j)^{q_j} \cdot f(z).$$

Очевидно, что изолированные особые точки $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m$ функции g являются устранимыми. Следовательно, функция g является голоморфной и не обращается в нуль на $\overline{D}$. Поскольку

$$f(z) = (z - a_1)^{s_1} \cdot \ldots \cdot (z - a_n)^{s_n} \cdot (z - b_1)^{-q_1} \cdot \ldots \cdot (z - b_n)^{-q_m} g(z)$$

и

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{s_j}{z - a_j} - \sum_{j=1}^{m} \frac{q_j}{z - b_j} + \frac{g'(z)}{g(z)},$$

то, применяя теорему Коши к аналитической на $\overline{D}$ функции g'/g, получаем

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \sum_{j=1}^{n} s_j \cdot J(\gamma, a_j) - \sum_{j=1}^{m} q_j \cdot J(\gamma, b_j) = N - P.$$

$\square$

Замечание. *Пусть Γ — цикл, полученный из γ преобразованием $w = f(z)$. Тогда*

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{dw}{w} = J(\Gamma, 0).$$

Другими словами, интеграл в правой части (1) выражает приращение (деленное на 2π) аргумента точки w, совершающей обход цикла Γ. В связи с этим соотношение (1) называется также *принципом аргумента* в теории аналитических функций.

На практике принцип аргумента чаще всего применяется через следующий результат.

Теорема 2 (Руше́). *Пусть D — область, ограниченная циклом γ, и f, g — аналитические на $\overline{D}$ функции, удовлетворяющие условию $|f(z)| < |g(z)|$ при $z \in \gamma$. Тогда g и $g+f$ имеют в D одинаковое число нулей с учетом их кратности.*

Доказательство. Из условия теоремы следует, что g и $g+f$ не обращаются в нуль на γ. Пусть N_1 — число нулей g, а N_2 — число нулей $g+f$ в D с учетом их кратности. Тогда функция $F = (g+f)/g$ является мероморфной на $\overline{D}$ и разность между числом N её нулей и числом P её полюсов в D с учетом их кратности равна $N - P = N_2 - N_1$. Однако, как отмечалось выше,

$$N - P = J(\Gamma, 0),$$

где $\Gamma = F(\gamma)$. С другой стороны, из условия $|F(z) - 1| < 1$ при $z \in \gamma$ следует, что Γ содержится в круге $|w - 1| < 1$ и $J(\Gamma, 0) = 0$. Таким образом, $N_2 - N_1 = 0$ и $N_2 = N_1$.

□

В заключение приведем результат, касающийся локально равномерной сходимости.

Теорема 3 (Гурвица). *Пусть функции $f_n \in \mathcal{H}(D)$, $n = 1, 2, \ldots$, не обращаются в нуль в D и $f_n \to f$ локально равномерно в D. Тогда либо $f(z) \equiv 0$ в D, либо f не обращается в нуль в D.*

Доказательство. Пусть $f(z) \not\equiv 0$. Фиксируем произвольно точку $a \in D$. В силу изолированности нулей найдется $r > 0$ такое, что $\mathcal{O}_r(a) \subset D$ и f не обращается в нуль на $\gamma = \partial\mathcal{O}_r(a)$. Как непрерывная на компакте функция $|f|$ отделена от нуля на γ, т. е. $|f(z)| \geq \delta > 0$ при

$z \in \gamma$. Отсюда и из локально равномерной сходимости последовательности $\{f_n\}$ следует, что $1/f_n \to 1/f$ равномерно на γ. Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f_n'(z)}{f_n(z)}\, dz = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz.$$

Однако интегралы слева выражают числа нулей функций f_n в $\mathcal{O}_r(a)$ и, следовательно, равны нулю. Поэтому равен нулю интеграл справа и f не обращается в нуль в $\mathcal{O}_r(a)$. В частности, $f(a) \neq 0$.

$\square$

Следствие. *Пусть последовательность однолистных в области D функций $f_n \in \mathcal{H}(D)$ сходится локально равномерно в D к функции $f(z) \not\equiv const$. Тогда f также однолистна в D.*

Доказательство. Допустим, что для некоторых $z_1 \neq z_2$ в D имеет место равенство $f(z_1) = f(z_2) = A$. Пусть U_1 и U_2 — две непересекающиеся окрестности точек z_1 и z_2 соответственно, расположенные в D. В силу однолистности функции f_n в одной из окрестностей, U_1 или U_2, она не принимает значение A. Следовательно, можно выделить подпоследовательность $\{f_{n_k}\}$ функций, которые не принимают значение A в одной из окрестностей. Пусть для определенности ею будет U_1. Применяя теорему Гурвица к последовательности функций $f_{n_k}(z) - A$ в области U_1, получаем, что $f(z) - A$ не обращается в нуль в U_1. Это противоречит предположению, что $f(z_1) = A$.

$\square$

Другое доказательство теоремы Гурвица. Допустим $f(z) \not\equiv 0$ и $f(a) = 0$ для некоторой $a \in D$. В силу изолированности нулей найдется такое $r > 0$, что в проколотой окрестности $\dot{\mathcal{O}}_r(a)$ функция f не обращается в нуль. Можно также считать, что f не обращается в нуль и на $\gamma = \partial\mathcal{O}_r(a)$. Поскольку γ является компактом, то $\min\limits_{z\in\gamma} |f(z)| = \delta > 0$. В силу локально равномерной сходимости последовательности $\{f_n\}$ найдется номер N такой, что $|f_n(z) - f(z)| < \delta/2$ при всех $n \geq N$ и $z \in \gamma$. Но тогда по теореме Руше́ функция $f_n = f + (f_n - f)$ будет иметь в $\mathcal{O}_r(a)$ столько же нулей, сколько их имеет там f, т.е. по крайней мере один. Полученное противоречие с условиями теоремы доказывает требуемое утверждение.

$\square$

§ 2. Принцип открытости

Вначале установим один результат, который даёт представление о локальной структуре отображения, осуществляемого непостоянной аналитической функцией.

Теорема 1 (О локальной структуре отображения). *Пусть f голоморфна в области D и $f(z_0) = w_0$, $z_0 \in D$. Допустим также, что функция $f(z) - w_0$ имеет в z_0 нуль порядка n, т.е. $f'(z_0) = \ldots = f^{(n-1)}(z_0) = 0$ и $f^{(n)}(z_0) \neq 0$. Тогда найдутся также окрестности $\mathcal{O}_r(z_0)$ и $\mathcal{O}_\rho(w_0)$, что уравнение $w' = f(z)$ имеет ровно n различных корней в $\dot{\mathcal{O}}_r(z_0)$ при любом $w' \in \dot{\mathcal{O}}_\rho(w_0)$.*

Доказательство. Из условия теоремы следует, что $f(z) \not\equiv const$. В силу изолированности нулей аналитической функции найдется окрестность $\mathcal{O}_r(z_0)$, которая вместе с замыканием содержится в области D и функции $f(z) - w_0$, $f'(z)$ не обращаются в нуль в $\overline{\mathcal{O}_r(z_0)} \setminus \{z_0\}$. Пусть $\gamma = \partial\mathcal{O}_r(z_0)$ и $\Gamma = f(\gamma)$. Замечая, что Γ не проходит через точку w_0, выберем число $\rho > 0$ меньше, чем расстояние от w_0 до Γ. Фиксируем произвольное $w' \in \dot{\mathcal{O}}_\rho(w_0)$. Из условия выбора ρ следует выполнение неравенства

$$|w_0 - w'| < |f(z) - w_0|$$

при всех $z \in \gamma$. Но тогда по теореме Руше́ функции

$$f(z) - w_0 \quad \text{и} \quad f(z) - w' = (f(z) - w_0) + (w_0 - w')$$

имеют в $\mathcal{O}_r(z_0)$ одинаковое число нулей с учетом их кратности. Однако функция $f(z) - w_0$ имеет в $\mathcal{O}_r(z_0)$ один нуль $z = z_0$ порядка n. Поскольку $f'(z) \neq 0$ при $z \in \dot{\mathcal{O}}_r(z_0)$, то все нули функции $f(z) - w'$ в $\mathcal{O}_r(z_0)$ являются простыми. Таким образом, в $\mathcal{O}_r(z_0)$ содержится ровно n точек $z_1, \ldots, z_n$, которые являются решениями уравнения $f(z) = w'$.

□

Следствие. *Условие $f'(z) \neq 0$ является необходимым для однолистности функции f в области D.*

Теорема 2 (Принцип открытости или сохранения области). *Непостоянная аналитическая функция переводит открытые множества в открытые, а область — в область.*

Доказательство. Утверждение сразу же следует из теоремы 1.

□

Теорема 3 (Принцип максимума модуля). *Если f — непостоянная аналитическая в области D функция, то максимум модуля $|f|$, а также максимумы и минимумы* $\mathrm{Re} f$ *и* $\mathrm{Im} f$ *не могут достигаться во внутренних точках области D.*

Задача. В какой точке квадрата достигается максимум произведений четырех расстояний от точек до вершин квадрата.

Теорема 4 (Лемма Шварца). *Пусть аналитическая в единичном круге $\mathbb{D}$ функция f удовлетворяет условиям: $f(0) = 0$ и $|f(z)| \leq 1$ при $z \in \mathbb{D}$. Тогда*

$$|f'(0)| \leq 1 \text{ и } |f(z)| \leq |z| \text{ при } z \in \mathbb{D}.$$

При этом знак равенства достигается лишь в случае, когда $f(z) \equiv e^{i\alpha} z$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Из предположений теоремы следует аналитичность в $\mathbb{D}$ функции $\varphi(z) = f(z)/z$. Для каждого $r \in (0,1)$ в силу принципа максимума имеем

$$\max_{|z| \leq r} |\varphi(z)| = \max_{|z|=r} |\varphi(z)| = \frac{1}{r} \max_{|z|=r} |f(z)| \leq \frac{1}{r}.$$

Для фиксированного $z \in \mathbb{D}$ можно осуществить предельный переход в неравенстве $|\varphi(z)| \leq 1/r$ при $r \to 1$. Таким образом, $|\varphi(z)| \leq 1$ при $z \in \mathbb{D}$, что эквивалентно неравенству $|f(z)| \leq |z|$. Неравенство $|f'(0)| \leq 1$ следует из полученного неравенства и замечания, что $\varphi(0) = f'(0)$.

Допустим теперь, что в одном из доказанных неравенств достигается знак равенства. Это означало бы, что $|\varphi(z_0)| = 1$ для некоторой $z_0 \in \mathbb{D}$. В силу принципа максимума тогда следовало бы, что $\varphi(z) \equiv e^{i\alpha} z$.

□

§ 3. Принцип компактности

В этом параграфе мы рассмотрим вопрос об условиях на семейство голоморфных в области D функций, которые позволяли бы из любой её последовательности выделять сходящуюся локально равномерно в D подпоследовательность.

Определение. *Семейство $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}(D)$ называется локально равномерно ограниченным в D, если для всякой $z_0 \in D$ найдутся окрестность $\mathcal{O}_r(z_0) \subset D$ и число $M > 0$, такие, что $|f(z)| \leq M$ при всех $z \in \mathcal{O}_r(z_0)$ и $f \in \mathcal{F}$.*

Другими словами, для каждого компактного множества $K \subset D$ семейство $\mathcal{F}$ является равномерно ограниченным на K.

Теорема 1. *Пусть $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}(D)$ — локально равномерно ограниченное в D семейство. Тогда $\mathcal{F}' = \{f' : f \in \mathcal{F}\}$ также является локально равномерно ограниченным в D семейством.*

Доказательство. Пусть z_0 — произвольная точка области D. По условию найдутся $r > 0$ и $M > 0$, такие, что $\overline{\mathcal{O}_r(z_0)} \subset D$ и $|f(z)| \leq M$ для любых $z \in \mathcal{O}_r(z_0)$ и $f \in \mathcal{F}$. Пусть $\gamma = \partial\mathcal{O}_r(z_0)$. Тогда, используя интегральную формулу Коши для производных, получаем для любого $z \in \mathcal{O}_{r/2}(z_0)$ и любой $f \in \mathcal{F}$:

$$|f'(z)| = \frac{1}{2\pi}\left|\int\limits_\gamma \frac{f(\varsigma)\,d\varsigma}{(\varsigma - z)^2}\right| \leq \frac{1}{2\pi}\int\limits_\gamma \frac{M}{r^2/4}\,|d\varsigma| = \frac{4M}{r}.$$

□

Теорема 2. *Пусть $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}(D)$ — локально равномерно ограниченное в D семейство. Тогда на любом компакте $K \subset D$ это семейство является равностепенно непрерывным.*

Доказательство. Пусть K — компактное подмножество в области D. Выберем $r > 0$ меньшим расстояния от K до ∂D. Тогда множество

$$K_1 = \{z : \; dist(z, K) \leq r\}$$

также будет компактным подмножеством области D. По предыдущей теореме найдется такое $M > 0$, что

$$|f'(z)| \le M \text{ при всех } z \in K_1 \text{ и } f \in \mathcal{F}.$$

Пусть теперь $\varepsilon > 0$ произвольное. Выберем $\delta < \min\{r, \varepsilon/M\}$. Тогда для любых z', z'' принадлежащих K и удовлетворяющих условию $|z' - z''| < \delta$ будем иметь $[z', z''] \subset K_1$ и

$$|f(z') - f(z'')| = \left| \int\limits_{[z',z'']} f'(z)\,dz \right| \le M \cdot |z' - z''| < M\delta \le \varepsilon.$$

$\square$

Теорема 3 (Монтеля). *Если $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}(D)$ — локально равномерно ограниченное в D семейство, то из всякой последовательности $\{f_n\} \subset \mathcal{F}$ можно выбрать подпоследовательность $\{f_{n_k}\}$, сходящуюся локально равномерно в D.*

Доказательство. Пусть $K_1 \subset K_2 \subset \cdots$ — компактное исчерпание области D, т. е. K_j — компактные подмножества в D и $\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} K_j = D$. Такую последовательность компактных множеств можно построить, например, следующим образом. Выберем $R > 0$ и натуральное N так, чтобы множество

$$\{z \in D : \ dist(z, \partial D) \ge \frac{1}{N}, \ |z| \le R\}$$

было не пусто. Тогда в качестве искомой последовательности можно взять множества

$$K_j = \{z \in D : \ dist(z, \partial D) \ge \frac{1}{N+j}, \ |z| \le R + j\}, \quad j = 1, 2, \dots .$$

В силу предыдущей теоремы семейство $\mathcal{F}$ удовлетворяет на каждом компакте K_j условиям теоремы Арцела, т. е. оно является на каждом K_j равномерно ограниченным и равностепенно непрерывным семейством функций. Следовательно, если $\{f_n\}$ — произвольная последовательность функций из $\mathcal{F}$, то из неё можно выделить подпоследовательность $\{f_{1,k}\}$, сходящуюся равномерно на K_1. Из этой подпоследовательности, в свою очередь, можно выделить подпоследовательность $\{f_{2,k}\}$, которая будет сходиться равномерно на K_2. Продолжая этот процесс, получим подпоследовательности

$$\begin{array}{cccc} f_{1,1}, & f_{1,2}, & f_{1,3}, & \dots \\ f_{2,1}, & f_{2,2}, & f_{2,3}, & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}$$

Для каждого $j = 2, 3, \dots$ выполняются следующие условия. $\{f_{j,k}\}_{k=1}^{\infty}$ — подпоследовательность из $\{f_{j-1,k}\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{f_{j,k}\}$ сходится равномерно на K_j.

Заметим теперь, что диагональная последовательность $f_{n_k} = f_{k,k}$ будет, начиная с некоторого номера, подпоследовательностью каждой из $\{f_{j,k}\}$. Следовательно, $\{f_{n_k}\}$ будет сходиться равномерно на каждом K_j. Поскольку $\{K_j\}$ является исчерпанием области D, то для любого компакта $K \subset D$ найдется такое j, что $K \subset K_j$. Это означает, что $\{f_{n_k}\}$ сходится локально равномерно в области D.

□

§ 4. Теорема Римана об отображении

В геометрически ориентированной части теории аналитических функций проблема конформного отображения играет доминирующую роль. Теоремы существования и единственности позволяет определить аналитические функции с важными свойствами, минуя аналитическую их запись.

В 1851 г. Риман объявил о фундаментальной теореме, согласно которой каждую односвязную область, отличную от всей плоскости, можно конформно отобразить на единичный круг. Однако его доказательство оказалось не лишенным недостатков, на которые обращал внимания Вейерштрасс. Около половины века понадобилось для отыскания строгого доказательства этой теоремы. Одним из первых его получил Кебе. Приведенный здесь вариант доказательства близок к предложенному им.

Заметим вначале, что в силу теоремы Лиувилля не существует конформного отображения всей плоскости на единичный круг.

Теорема 1. *Пусть D — односвязная область, отличная от всей плоскости, и $z_0 \in D$. Тогда существует единственная аналитическая в D функция f, которая отображает взаимно однозначно область D на единичный круг $\mathbb{D}$ и удовлетворяет условиям $f(z_0) = 0$, $f'(z_0) > 0$.*

Доказательство. Докажем вначале единственность. Допустим, мы имеем две функции f_1 *и* f_2, удовлетворяющие условиям из формулировки теоремы. Тогда функция $\varphi = f_2 \circ f_1^{-1}$ будет конформно отображать единичный круг $\mathbb{D}$ на себя и $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) > 0$. В силу леммы Шварца $|\varphi(w)| \le |w|$. С другой стороны, обратная функция $\varphi^{-1}(\zeta)$ также удовлетворяет условиям леммы Шварца и $|\varphi^{-1}(\zeta)| \le |\zeta|$. Подставляя в последнее неравенство вместо ζ выражение $\zeta = \varphi(w)$, получаем $|w| \le |\varphi(w)|$. Таким образом, $|\varphi(w)| \equiv |w|$ *и* $\varphi(w) = e^{i\alpha}w$. Из условия $\varphi'(0) > 0$ следует $\varphi(w) \equiv w$ *и* $f_1(z) \equiv f_2(z)$.

Для доказательства существования отображающей функции f введем в рассмотрение класс $\mathcal{F}$ однолистных в D функций g, удовлетворяющих условиям: $g(z_0) = 0$, $g'(z_0) > 0$ *и* $|g(z)| \le 1$ *при* $z \in D$.

Покажем вначале непустоту введенного класса функций. По условию $D \ne \mathbb{C}$ и найдется точка $a \notin D$. Поскольку D — односвязная область, то в ней выделяются однозначные ветви функций $\ln(z - a)$ и

$$Q(z) = \sqrt{z - a} = e^{\frac{1}{2}\ln(z-a)}$$

(см. последний параграф главы III). Заметим, что для любой пары точек z_1, z_2 *из* D любое из равенств

$$Q(z_1) = \pm Q(z_2)$$

влечет равенство $z_1 = z_2$. Это означает, что Q однолистна в D и $Q(D)$ не содержит пары точек, симметричных относительно начала координат. Поскольку $Q(z_0) = w_0$ принадлежит $Q(D)$ вместе с некоторой окрестностью $\mathcal{O}_r(w_0)$, то $\mathcal{O}_r(-w_0) \cap Q(D) = \emptyset$. Следовательно, $|Q(z) + w_0| > r$ для всех $z \in D$ и функция

$$h(z) = \frac{r}{w_0 + Q(z)}$$

является однолистной в области D со значениями из $\mathbb{D}$. Условия нормировки можно добиться дополнительным дробно–линейным преобразованием

$$g(z) = \frac{\overline{h'(z_0)}}{|h'(z_0)|} \frac{h(z) - h(z_0)}{1 - \overline{h'(z_0)} h(z)} \ .$$

Заметим, что в силу однолистности функции h ее производная $h'(z)$ в нуль не обращается. Таким образом, $g \in \mathcal{F}$ и непустота $\mathcal{F}$ доказана.

Пусть теперь

$$\alpha = \sup \left\{ g'(z_0) : g \in \mathcal{F} \right\} \ .$$

Мы не исключаем здесь возможности $\alpha = \infty$. Из определения супремума следует существование такой последовательности $\{f_n\} \subset \mathcal{F}$, что $f_n'(z_0) \to \alpha$ при $n \to \infty$. Поскольку $\mathcal{F}$ является равномерно–ограниченным в D семейством, то в силу принципа компактности можно выделить подпоследовательность $\{f_{n_k}\}$, сходящуюся локально–равномерно в D к некоторой функции f. Из теоремы Вейерштрасса следует аналитичность функции f и равенство $f'(z_0) = \alpha$, что, в частности, означает конечность α. По следствию из теоремы Гурвица имеем также однолистность функции f. В результате $f \in \mathcal{F}$ и является решением поставленной выше экстремальной задачи.

Покажем теперь, что f — искомая функция. При этом мы воспользуемся ее экстремальным свойством.

Допустим, что некоторая точка w^* из $\mathbb{D}$ не принадлежит области $f(D)$. Тогда выделяется однозначная ветвь

$$H(z) = \left(\frac{f(z) - w^*}{1 - \overline{w^*} f(z)} \right)^{1/2} \ ,$$

которая представляет собой однолистную в D функцию. При этом $|H(z)| < 1$ *при* $z \in D$ *и* $H(z_0) = \sqrt{-w^*} = \zeta^*$ Дифференцируя равенство

$$(H(z))^2 = \frac{f(z) - w^*}{1 - \overline{w^*} f(z)} \ ,$$

получаем также

$$H'(z_0) = \frac{1 - |w^*|^2}{2\zeta^*} \ \alpha = \frac{1 - |w^*|^2}{2\sqrt{-w^*}} \ \alpha \ .$$

Перейдем теперь к нормированной функции

$$F(z) = \frac{\overline{H'(z_0)}}{|H'(z_0)|}\,\frac{H(z) - \zeta^*}{1 - \overline{\zeta^*}H(z)}\ .$$

Очевидно, что $F \in \mathcal{F}$. Кроме того,

$$F'(z_0) = \frac{|H'(z_0)|}{1 - |\zeta^*|^2} = \frac{\alpha(1 - |w^*|^2)}{2\sqrt{|w^*|}(1 - |w^*|)} = \alpha\frac{1 + |w^*|}{2\sqrt{|w^*|}} > \alpha\ ,$$

что противоречит определению α.

□

Заметим, что полученное в конце доказательства неравенство не является совсем неожиданным. Действительно, из построения функции F видно, что $f(z) = \Phi(F(z))$, где

$$\Phi(W) = \frac{\left(\dfrac{æW + \zeta^*}{1 + \overline{\zeta^*}æW}\right)^2 + w^*}{1 + \overline{w^*}\left(\dfrac{æW + \zeta^*}{1 + \overline{\zeta^*}æW}\right)^2}\ , \qquad æ = \frac{H'(z_0)}{|H'(z_0)|}\ .$$

Поскольку Φ удовлетворяет условиям леммы Шварца, то $|\Phi'(0)| < 1$. Отсюда

$$f'(z_0) = \Phi'(0)F'(z_0) < F'(z_0),\ \textit{т.е.}\ f'(z_0) < F'(z_0)\ .$$

§ 5. Аналитическое продолжение и принцип симметрии

Согласно теореме единственности голоморфная функция однозначно определяется ее значениями в сколь угодно малой окрестности какой–либо одной точки. Во времена Ньютона считалось, что все функции только такие, а трудности видели лишь в вычислении значений там, где исходная формула ее не определяла, т. е. в аналитическом продолжении. Основная логическая трудность, связанная с аналитическим продолжением, состоит в его неоднозначности. Напомним, что ранее при определении однозначной ветви $\ln f(z)$ функции $f(z)$, не обращающейся в нуль в односвязной области D, мы продолжали ее из точки $z_0 \in D$ путем интегрирования $f'(z)/f(z)$.

Односвязность области D гарантировала нам однозначность такого продолжения.

Опишем кратко понятийный аппарат, связанный с представлением об аналитической функции как о совокупности ее продолжений.

Аналитическая функция fв области Dобразует *функциональный элемент* и обозначается (f, D). Два функциональных элемента (f_1, D_1) *и* (f_2, D_2) называются *прямыми аналитическими продолжениями* друг друга, если $D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$ *и* $f_1(z) = f_2(z)$ *при* $z \in D_1 \cap D_2$. Более конкретно говорят, что (f_2, D_2) является аналитическим продолжением (f_1, D_1) в область D_2. Такое продолжение может и не существовать, но если оно существует, то оно единственно.

Если (f_1, D_1) *и* (f_2, D_2) являются прямыми аналитическими продолжениями друг друга, то можно было бы рассмотреть функциональный элемент (f, D), где $D = D_1 \cup D_2$, а f совпадает с f_1*и*f_2*в*D_1*и*D_2 соответственно. Таким образом, рассмотрение только пар функциональных элементов нового содержания не дает.

Более общим понятием является цепь функциональных элементов (f_1, D_1), $(f_2, D_2), \ldots, (f_n, D_n)$, в которой (f_k, D_k) является прямым аналитическим продолжением функционального элемента (f_{k-1}, D_{k-1}). Элементы в такой цепи называются *аналитическими продолжениями* друг друга.

Пример функции $\sqrt{z}$ и областей

$$D_1 = \{z : \operatorname{Im} z > 0\},\ D_2 = \{z : \operatorname{Re} z > 0\},$$

$$D_3 = \{z : \operatorname{Im} z < 0\},\ D_4 = \{z : \operatorname{Re} z < 0\}$$

показывает, что в результате аналитического продолжения мы можем вернуться в некоторую область, но с другой функцией.

Отметим также, что, как и в случае прямого аналитического продолжения, продолжение посредством цепи с фиксированным набором областей определяется однозначно.

Определение. *Глобальной аналитической функцией является непустое семейство $\mathfrak{f}$ функциональных элементов (f, D), в котором каждая пара элементов представляет собой аналитическое продолжение друг друга посредством цепи с элементами из $\mathfrak{f}$.*

Полная аналитическая функция — глобальная аналитическая функция, которая содержит все аналитические продолжения каждого своего элемента.

Полная аналитическая функция является, очевидно, *максимальной* в том смысле, что ее нельзя расширить. Очевидно также, что каждый функциональный элемент принадлежит *единственной* (а следовательно, и полностью определяет ее) полной аналитической функции. Глобальные аналитические функции являются более произвольными. Разные семейства функциональных элементов могут определять одну и ту же глобальную аналитическую функцию. Например, однозначная аналитическая функция f, определенная в области D, может идентифицироваться либо с семейством, состоящим из одного функционального элемента (f, D), либо с семейством элементов (f, D'), $D' \subset D$.

Глобальная аналитическая функция $\mathfrak{f}$ имеет однозначно определяемую производную $\mathfrak{f}'$, определяемую функциональными элементами (f', D). Действительно, если (f_1, D_1) *и* (f_2, D_2) — прямые аналитические продолжения друг друга, то таковыми же являются (f_1', D_1) *и* (f_2', D_2).

Аналогичное соотношение может существовать между двумя глобальными аналитическими функциями $\mathfrak{f}$ и $\mathfrak{g}$. Мы предполагаем, что каждому $(f, D) \in \mathfrak{f}$ сопоставляется единственный функциональный элемент $(g, D) \in \mathfrak{g}$ так, что прямые аналитические продолжения переходят в прямые аналитические продолжения. В этом случае мы говорим, что $\mathfrak{f}$ *подчинена* $\mathfrak{g}$, и можно определить $\mathfrak{f} + \mathfrak{g}$ и $\mathfrak{f} \cdot \mathfrak{g}$ как семейства, состоящие из элементов $(f + g, D)$ *и* $(f \cdot g, D)$, соответствующих элементам (f, D) *из* $\mathfrak{f}$. Например, $\mathfrak{f}$ подчинена любой целой функции $\mathfrak{h}$, откуда следует, что $\mathfrak{f} + \mathfrak{h}$ *и* $\mathfrak{f} \cdot \mathfrak{h}$ корректно определены.

Приведенное понятие полной аналитической функции называют "в смысле Вейерштрасса". Оно далеко отходит от обычного понятия функции. Однако есть другой подход, основанный на понятии *римановой поверхности*, который рассматривает полную аналитическую функцию как однозначную, но определенную уже не на плоскости.

Рассмотрим теперь специальный случай аналитического продолжения, когда области D_1 *и* D_2 не пересекаются, а имеют общий участок границы. Приводимый ниже результат известен как *принцип симметрии Римана–Шварца.*

Теорема 1. *Пусть D — область, симметричная относительно вещественной оси, D^+ — ее часть, расположенная в верхней полуплоскости, и σ — часть вещественной оси, расположенная в D. Допустим, что f является непрерывной в $D^+ \cup \sigma$, голоморфной в D^+ и принимает вещественные значения на σ. Тогда она имеет аналитическое продолжение во всю область D, где удовлетворяет соотношению симметрии:*

$$f(z) = \overline{f(\overline{z})}. \tag{1}$$

Доказательство. Определим в области D функцию F, полагая $F(z) = f(z)$ при $z \in D^+ \cup \sigma$ и $F(z) = \overline{f(\overline{z})}$ при $z \in D^- = D \cap \{z : \operatorname{Im} z < 0\}$. Если мы покажем, что F аналитична в D, то (F, D) будет прямым аналитическим продолжением (f, D^+).

Из определения F и вещественности f на σ следует, что F непрерывна в D. Легко также показать аналитичность F в D^-. Действительно, если $z_0 \in D^-$, то $\overline{z_0} \in D^+$ и

$$\lim_{z \to z_0} \frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{\overline{f(\overline{z})} - \overline{f(\overline{z_0})}}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \overline{\left(\frac{f(\overline{z}) - f(\overline{z_0})}{\overline{z} - \overline{z_0}} \right)} = \overline{f'(\overline{z_0})}.$$

Пусть $x_0 \in \sigma$. Тогда найдется $r > 0$, такое, что $\overline{\mathcal{O}_r(x_0)} \subset D$. Обозначим $\gamma = \partial \mathcal{O}_r(x_0)$ и определим

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{F(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z} .$$

Как интеграл Коши с непрерывной плотностью $F(\zeta)$ функция $\varphi(z)$ является аналитической в $\mathcal{O}_r(x_0)$. Если $\gamma^{\pm} = \gamma \cap D^{\pm}$, то

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma^+} \frac{F(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z} + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{[x_0 - r, x_0 + r]} \frac{F(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z} + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{[x_0 + r, x_0 - r]} \frac{F(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z} +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma^-} \frac{F(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma^+} \frac{F(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z} + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma^-} \frac{F(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z} = \varphi^+(z) + \varphi^-(z) ,$$

где $\Gamma^{\pm}$ — ориентированная граница $\mathcal{O}_r(x_0) \cap D^{\pm}$. Если $z \in D^+ \cap \mathcal{O}_r(x_0)$, то $\varphi^+(z) = f(z)$ по интегральной формуле Коши, а $\varphi^- = 0$ по интегральной теореме Коши, примененной к функции $F(\zeta)/(\zeta - z)$, $\zeta \in D^-$. В действительности, для применения этих результатов мы должны отступить от отрезка $[x_0 - r, x_0 + r]$ внутрь области аналитичности функции F и затем совершить предельный переход. Аналогично, если $z \in D^- \cap \mathcal{O}_r(x_0)$, *то* $\varphi^+(z) = 0$ *и* $\varphi^-(z) = \overline{f(\overline{z})}$. Таким образом, $\varphi(z) = F(z)$ *в* $\mathcal{O}_r(x_0)$, что означает аналитичность F.

$\square$

Доказанная теорема имеет очевидные обобщения. Область D можно выбирать симметричной относительно окружности C и предполагать, что $f(z)$ приближается к другой окружности C', когда z стремится к C. При этих условиях f имеет аналитическое продолжение, которое отображает точки, симметричные относительно C, в точки, симметричные относительно C'. Принцип симметрии часто используется для построения конформных отображений.

Глава VI

Гармонические функции

§ 1. Основные свойства гармонических функций

Как уже ранее отмечалось, под <u>*гармонической*</u> *в области D функцией понимается дважды непрерывно дифференцируемая функция*

$$u(z) = u(x,y), \; z = x + iy,$$

удовлетворяющая уравнению Лапласа

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Непосредственно из линейности оператора Лапласа Δ следует, что совокупность $h(D)$ всех гармонических в области D функций образует линейное пространство.

Уместно провести аналогию с линейными функциями одного переменного, поскольку в этом случае уравнение Лапласа приводит нас именно к ним. Отметим, что для линейных функций выполняются теоремы о среднем и принцип максимума.

Если $f(z) = u(z) + iv(z)$ — аналитическая в области D функция, то в силу уравнений Коши–Римана функции u и v являются гармоническими в D.

Теорема 1. *Пусть D — односвязная область и $u \in h(D)$. Тогда найдется такая функция $f \in \mathcal{H}(D)$, что $u(z) = \operatorname{Re} f(z)$.*

Доказательство. Пусть $u \in h(D)$. Рассмотрим функцию g, определенную в области D равенством:

$$g(z) = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}, \qquad x + iy = z.$$

Поскольку u удовлетворяет уравнению Лапласа, для функции g выполнено условие комплексной дифференцируемости, т. е. $g \in \mathcal{H}(D)$. В силу односвязности области D однозначно определена также голоморфная функция

$$f(z) = U(z) + iV(z) = \int g(\zeta)\, d\zeta,$$

которую мы нормируем условием $U(z_0) = u(z_0)$, $z_0 \in D$. В этом случае f определена с точностью до мнимой константы.

Равенство $f'(z) = g(z)$ влечет

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Таким образом, $U(z) \equiv u(z)$.

□

Применение этой теоремы сразу же дает локальные свойства гармонических функций:

a) *Бесконечная дифференцируемость.*

b) *Конформная инвариантность.* Если u — гармоническая в области G функция, а g — аналитическая в области D функция и $g(D) \subseteq G$, то $v = u \circ g$ является гармонической в области D.

c) *Принцип экстремума.* Непостоянная гармоническая в области D функция u не может достигать локального максимума или минимума во внутренней точке.

Доказательство. a) Пусть $u \in h(D)$ и $z_0 \in D$. Тогда найдется $r > 0$ такое, что $\mathcal{O}_r(z_0) \subset D$. По теореме 1, найдется $f \in \mathcal{H}(\mathcal{O}_r(z_0))$, для которой $\operatorname{Re} f(z) = u(z)$. Отсюда следует бесконечная дифференцируемость функции u в $\mathcal{O}_r(z_0)$.

b) Если $g(z) \equiv const$, то доказывать нечего. Поэтому допустим, что $g(z) \not\equiv const$. Фиксируем произвольно $z_0 \in D$. Пусть $\mathcal{O}_r(z_0) \subset D$. В силу принципа открытости $g(\mathcal{O}_r(z_0))$ содержит некоторую окрестность точки $w_0 = g(z_0)$. Допустим, $\mathcal{O}_\rho(w_0) \subset g(\mathcal{O}_r(z_0))$. По теореме 1, найдется функция $f \in \mathcal{H}(\mathcal{O}_\rho(w_0))$, такая, что $u(w) = \operatorname{Re} f(w)$ при $w \in \mathcal{O}_\rho(w_0)$. Сужая окрестность $\mathcal{O}_r(z_0)$ до $\mathcal{O}_{r'}(z_0)$ так, чтобы выполнялось включение $g(\mathcal{O}_{r'}(z_0)) \subset \mathcal{O}_\rho(w_0)$, мы получим $v(z) = \operatorname{Re} f \circ g(z)$ в $\mathcal{O}_{r'}(z_0)$. Таким образом, v гармонична в окрестности точки z_0 как вещественная часть аналитической функции.

c) Допустим, что $u(z_0)$ является наибольшим (или наименьшим) значением функции u в окрестности $\mathcal{O}_r(z_0) \subset D$. По теореме 1, найдется функция $f \in \mathcal{H}(\mathcal{O}_r(z_0))$, для которой $u(z) = \operatorname{Re} f(z)$ в $\mathcal{O}_r(z_0)$. Но тогда по принципу экстремума для вещественной части аналитической функции будем иметь $f(z) \equiv const$, что влечет $u(z) \equiv const$ в $\mathcal{O}_r(z_0)$. Чтобы распространить это на всю область D, снова рассмотрим функцию

$$g(z) = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y},$$

которая определена и аналитична во всей области D. Однако в $\mathcal{O}_r(z_0)$ мы имеем $g(z) = f'(z) = 0$. По теореме единственности для аналитических функций $g(z) \equiv 0$ в D, что влечет $u(z) \equiv const$ в области D.

□

Принцип экстремума сразу же влечет два варианта теоремы единственности для гармонических функций.

Теорема 2 (Единственности). *Пусть $u \in h(D)$ и выполнено одно из следующих условий:*

(i) $u(z) = 0$ *в некоторой окрестности* $\mathcal{O}_r(z_0) \subset D$;

(ii) u *непрерывно продолжается в замыкание* $\overline{D}$ *ограниченной области* D *и* $u(z) = 0$ *на* ∂D.

Тогда $u(z) \equiv 0$ *в* D.

Из теоремы единственности, в частности, следует, что граничные значения вполне определяют гармоническую функцию в области. Задача восстановления гармонической функции по ее граничным значениям известна как *задача Дирихле.* В последующих двух параграфах она будет решена в случае, когда в качестве области выступает единичный круг.

Теорема 3 (О среднем). *Пусть u — гармоническая в $\mathcal{O}_r(z_0)$ и непрерывная в $\overline{\mathcal{O}_r(z_0)}$ функция. Тогда*

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta})\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{T}} u(z_0 + r\text{æ})|\,d\text{æ}|.$$

Здесь и в дальнейшем через $\mathbb{T}$ будем обозначать ориентированную границу $\partial\,\mathbb{D}$.

Доказательство. Поскольку u — непрерывная в $\overline{\mathcal{O}_r(z_0)}$ функция, то достаточно доказать равенство:

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} u(z_0 + \rho e^{i\theta})\,d\theta$$

для всех $\rho \in (0, r)$. Однако в круге $\mathcal{O}_r(z_0)$ функция u представима как вещественная часть аналитической функции. Применяя к последней теорему о среднем и отделяя в полученном равенстве вещественную часть, приходим к требуемому утверждению.

$\square$

Упражнение. Покажите, что гармоническая функция u, зависящая только от $r = |z - z_0|$, имеет вид:

$$u(z) = \alpha\ln|z - z_0| + \beta.$$

Решение. Если $u(z) = \lambda(r)$, то

$$\frac{\partial\,u}{\partial\,x} = \lambda'(r)\frac{\partial\,r}{\partial\,x} = \frac{x}{r}\lambda'(r), \qquad \frac{\partial^2\,u}{\partial\,x^2} = \frac{x^2}{r^2}\lambda''(r) + \frac{y^2}{r^3}\lambda'(r)$$

и

$$\Delta u = \lambda''(r) + \frac{1}{r}\lambda'(r).$$

Решая уравнение
$$\lambda''(r) + \frac{1}{r}\lambda'(r) = 0,$$
приходим к требуемому утверждению.

□

§ 2. Интегральные формулы Пуассона и Шварца

Теорема 1. *Пусть $u \in h(\mathbb{D})$ и непрерывно продолжается в $\overline{\mathbb{D}}$. Тогда для любого $a \in \mathbb{D}$ выполняется равенство:*
$$u(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-|a|^2}{|e^{i\theta}-a|^2} u(e^{i\theta})\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} u(æ)\frac{1-|a|^2}{|æ-a|^2}|\,dæ|. \qquad (1)$$

Доказательство. В случае $a = 0$ равенство (1) выражает теорему о среднем. В случае $a \neq 0$ рассмотрим дробно–линейное отображение
$$\ell(z) = (z-a)/(1-\overline{a}z)$$
и определим функцию $v = u\circ\ell^{-1}$. В силу конформной инвариантности свойства гармоничности $v \in h(\mathbb{D})$ и также непрерывно продолжается в $\overline{\mathbb{D}}$. По теореме о среднем
$$u(a) = v(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} u(\ell^{-1}(\zeta))\,|d\zeta|.$$

Выполним в этом интеграле замену переменной:
$$\ell^{-1}(\zeta) = æ, \quad \zeta = \ell(æ), \quad d\zeta = \ell'(æ)\,dæ,$$
и
$$u(a) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} u(æ)|\ell'(æ)||dæ| = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} u(æ)\frac{1-|a|^2}{|1-\overline{a}æ|^2}\,|dæ|.$$
Поскольку при $u \in \mathbb{T}$ имеет место равенство
$$|1-\overline{a}æ| = |1-a\overline{æ}| = |æ-a|,$$
то мы приходим к равенству (1).

□

Теорема 2. *Пусть f — голоморфная в $\mathbb{D}$ функция, вещественная часть которой $u(z) = \operatorname{Re} f(z)$ непрерывно продолжается в $\overline{\mathbb{D}}$. Тогда для любого $z \in \mathbb{D}$ выполняется равенство:*

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \frac{æ + z}{æ - z} u(æ)\,|dæ| + i\,\operatorname{Im} f(0) \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}} \frac{æ + z}{æ - z} u(æ)\frac{dæ}{æ} + i\,\operatorname{Im} f(0). \end{aligned} \tag{2}$$

Доказательство. По теореме 1 функция u имеет представление в виде

$$u(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} u(æ)\frac{1 - |z|^2}{|æ - z|^2}\,|dæ| = \operatorname{Re}\Big\{\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \frac{æ + z}{æ - z} u(æ)\,|dæ|\Big\}.$$

Заметим теперь, что функция в фигурных скобках является аналитической в единичном круге. Чтобы убедиться в этом, представим u в виде $(|dæ| = |iæ\,d\theta| = d\theta,\ æ = e^{i\theta})$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \frac{æ + z}{æ - z} u(æ)\,|dæ| &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}} \frac{æ + z}{æ - z} u(æ)\frac{dæ}{æ} = \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}} \frac{u(æ)}{æ - z}\,dæ + z\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}} \frac{u(æ)}{æ - z}\frac{dæ}{æ} \end{aligned}$$

Выражение в правой части последнего равенства является интегралом Коши с плотностью

$$\frac{æ + z}{æ}\,u(æ)$$

и потому представляет собой аналитическую в $\mathbb{D}$ функцию. Следовательно, функция f, определенная равенством (2), аналитична в $\mathbb{D}$ и $\operatorname{Re} f(z) = u(z)$. Остается заметить, что мнимая часть аналитической функции восстанавливается однозначно с точностью до аддитивной константы по вещественной части.

□

Замечание. *Формулы* (1) *и* (2) *называются соответственно формулами Пуассона и Шварца.*

§ 3. Интегралы Пуассона и Шварца. Задача Дирихле

Пусть φ — интегрируемая на $\mathbb{T}$ вещественнозначная функция. Тогда для $z \in \mathbb{D}$ определен интеграл

$$P(z;\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{T}} \frac{1-|z|^2}{|æ - z|^2}\varphi(æ)\,|dæ| = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{1-|z|^2}{|e^{i\theta} - z|^2}\varphi(e^{i\theta})\,d\theta,$$

который называется *интегралом Пуассона* с плотностью φ. Определим также *интеграл Шварца*

$$S(z;\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{T}} \frac{æ + z}{æ - z}\varphi(æ)\,|dæ|.$$

Легко видеть, что между интегралами Пуассона и Шварца с одной и той же плотностью φ имеет место соотношение

$$\operatorname{Re} S(z;\varphi) = P(z;\varphi).$$

Теорема 1. *Пусть $\varphi \in L_1(\mathbb{T})$ — вещественнозначная функция. Тогда $S(z;\varphi)$ является аналитической в $\mathbb{D}$ функцией. Кроме того, если φ обращается в нуль на некоторой открытой дуге $\gamma \in \mathbb{T}$, то $S(z;\varphi)$ аналитически продолжается через γ во внешность единичного круга и принимает на γ чисто мнимое значение.*

Доказательство. Пусть z_0 — произвольная точка круга $\mathbb{D}$. Выберем $\delta > 0$ меньше половины расстояния от z_0 до $\mathbb{T} = \partial\,\mathbb{D}$. Тогда

$$\frac{S(z;\varphi) - S(z_0;\varphi)}{z - z_0} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{T}} \frac{2\,æ\,\varphi(æ)}{(æ - z)(æ - z_0)}\,|dæ|$$

и в силу неравенства

$$\left|\frac{æ\,\varphi(æ)}{(æ - z)(æ - z_0)}\right| \le \frac{1}{\delta^2}|\varphi(æ)|$$

под знаком интеграла можно совершить предельный переход при $z \to z_0$. Это означает комплексную дифференцируемость функции $S(z;\varphi)$ в $\mathbb{D}$. Пусть теперь $\varphi(æ) = 0$ на открытой дуге $\gamma \subset \mathbb{T}$. Для любого

$z_0 \in \gamma$ расстояние от z_0 до $\mathbb{T} \setminus \gamma$ будет положительным и поскольку в этом случае

$$S(z;\varphi) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{T}\setminus\gamma} \frac{æ + z}{æ - z} \varphi(æ)\, |dæ|,$$

то рассуждения, аналогичные проведенным в случае $z_0 \in \mathbb{D}$, дают непрерывность и комплексную дифференцируемость функции $S(z;\varphi)$ на дуге γ. Аналитическое продолжение $S(z;\varphi)$ через γ во внешность единичного круга следует из принципа симметрии Римана–Шварца. Отметим при этом, что условие $\operatorname{Re} S(z;\varphi) = 0$ при $z \in \gamma$ следует из равенства:

$$\operatorname{Re} \frac{æ + z}{æ - z} = \frac{1 - |z|^2}{|æ - z|^2} = 0, \qquad z, æ \in \mathbb{T}, \quad z \neq æ.$$

□

Отметим теперь некоторые свойства интеграла Пуассона, характеризующие его как оператор, действующий из $L_1(\mathbb{T})$ в пространство $h(\mathbb{D})$.

(а) *Линейность*

$$P(\,\cdot\,;\varphi_1 + \varphi_2) = P(\,\cdot\,;\varphi_1) + P(\,\cdot\,;\varphi_2), \qquad P(\,\cdot\,;\alpha\varphi) = \alpha P(\,\cdot\,;\varphi).$$

(б) *Монотонность*

$$P(z;\varphi) \geq 0, \qquad \text{если} \quad \varphi \geq 0.$$

(в) $P(z;1) \equiv 1$ и

$$\inf \varphi \leq P(z;\varphi) \leq \sup \varphi.$$

Доказательство. Линейность является следствием свойств интеграла. Для доказательства монотонности достаточно отметить, что ядро Пуассона неотрицательно в $\mathbb{D}$. Равенство $P(z;1) \equiv 1$ следует из интегральной формулы Пуассона для функции $u(z) \equiv 1$. Наконец, неравенство для $P(z;\varphi)$ следует из монотонности и линейности.

□

Теорема 2 (Шварца). *Пусть φ — функция, интегрируемая на $\mathbb{T}$ и непрерывная в точке $æ_0 \in \mathbb{T}$. Тогда*

$$\lim_{z \to æ_0} P(z;\varphi) = \varphi(æ_0).$$

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$ задано. Выберем дугу $\gamma \subset \mathbb{T}$ с центром в точке $æ_0$ так, чтобы неравенство

$$|\varphi(æ) - \varphi(æ_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

выполнялось для всех $æ \in \gamma$. Обозначим через γ^* дополнительную дугу $\mathbb{T} \setminus \gamma$ и определим

$$\varphi_1(æ) = \begin{cases} \varphi(æ) - \varphi(æ_0) & \text{при} \quad æ \in \gamma, \\ 0 & \text{при} \quad æ \in \gamma^*; \end{cases}$$

$$\varphi_2(æ) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad æ \in \gamma, \\ \varphi(æ) - \varphi(æ_0) & \textbf{при} \quad æ \in \gamma^*. \end{cases}$$

Тогда

$$P(z;\varphi) - \varphi(æ_0) = P(z;\varphi_1) + P(z;\varphi_2).$$

Заметим теперь, что $P(z;\varphi_2)$ непрерывно продолжается на дугу γ и обращается на ней в нуль (см. теорему 1). Следовательно, найдется такое $\delta > 0$, что

$$|P(z;\varphi_2)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

при $|z - æ_0| < \delta$. Кроме того, из свойств интеграла Пуассона следует, что

$$|P(z;\varphi_1)| \le \sup_{æ \in \gamma} |\varphi(æ) - \varphi(æ_0)| \le \frac{\varepsilon}{2}.$$

Таким образом, для любого $z \in \mathbb{D}$, удовлетворяющего условию $|z - æ_0| < \delta$ получаем

$$|P(z;\varphi) - \varphi(æ_0)| \le |P(z;\varphi_1)| + |P(z;\varphi_2)| < \varepsilon.$$

$\square$

Доказанная теорема показывает, что задача Дирихле (отыскание гармонической функции по ее непрерывным граничным значениям) всегда разрешима в случае круга. Этот результат можно перенести с помощью конформного отображения на другие односвязные области, ограниченные жордановыми кривыми.

§ 4. Характеристическое свойство гармонических функций

Ранее было установлено, что гармонические функции обладают свойством среднего значения. Оказывается, что это свойство является для них характеристическим.

Определение. *Будем говорить, что непрерывная в области* $\mathbb{D}$ *функция* u *обладает локально свойством среднего значения, если для каждой точки* $z_0 \in D$ *найдется такое* $r > 0$*, что* $\mathcal{O}_r(z_0) \subset D$ *и*

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} u(z_0 + \rho e^{i\theta})\, d\theta = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{T}} u(z_0 + \rho æ)\, |dæ| \qquad (1)$$

для всех $\rho \in (0, r)$*.*

Теорема 1. *Непостоянная непрерывная в области* D *функция* u*, обладающая в* D *локально свойством среднего значения, не может достигать внутри* D *ни минимума, ни максимума.*

Доказательство. Допустим, что функция u достигает в точке $z_0 \in D$ своего максимума (или минимума). По определению свойства найдется такое $r > 0$, что при всех $\rho \in (0, r)$ выполняется равенство (1). Поскольку для всех $æ \in \mathbb{T}$ имеет место неравенство $u(z_0 + \rho æ) \leq u(z_0)$ (или $u(z_0 + \rho æ) \geq u(z_0)$), то равенство (1) вместе с непрерывностью функции u дает $u(z_0 + \rho æ) = u(z_0)$ при всех $\rho \in (0, r)$ и $æ \in \mathbb{T}$. Таким образом, множество A точек области D, в которых u достигает своего максимума (или минимума) открыто. С другой стороны, множество $B = D \setminus A$ в силу непрерывности функции u также должно быть открытым. Поскольку D связно, то одно из множеств A или B должно быть пустым. По предположению $A \neq \emptyset$. Следовательно, $B = \emptyset$ и $A = D$. Однако это влечет условие $u(z) \equiv u(z_0)$, которое противоречит непостоянности функции u.

□

Теорема 2. *Непрерывная в области* D *функция* u*, обладающая в* D *локально свойством среднего значения, является гармонической.*

Доказательство. Пусть $z_0 \in D$ и $r > 0$, такие, что $\overline{\mathcal{O}_r(z_0)} \subset D$. Определим

$$V(z) = P(z; u_r) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{T}} \frac{1 - |z|^2}{|æ - z|^2} u(z_0 + ræ)\, |dæ|.$$

Из свойств интеграла Пуассона следует, что функция V является гармонической в $\mathbb{D}$ и непрерывной в $\overline{\mathbb{D}}$. Кроме того, $V(æ) = u(z_0 + ræ)$ для всех $æ \in \mathbb{T}$.

Рассмотрим теперь функцию

$$v(z) = V\left(\frac{z - z_0}{r}\right),$$

которая гармонична в $\mathcal{O}_r(z_0)$, непрерывна в $\overline{\mathcal{O}_r(z_0)}$ и совпадает с u на $\partial\,\mathcal{O}_r(z_0)$. Очевидно, что разность $u(z) - v(z)$ является непрерывной в $\overline{\mathcal{O}_r(z_0)}$ функцией, обладающей в $\mathcal{O}_r(z_0)$ локально свойством среднего значения. Следовательно, по предыдущей теореме $u - v$ не достигает в $\mathcal{O}_r(z_0)$ ни максимума, ни минимума, если только она не тождественно постоянна. Однако $u(z) - v(z) = 0$ при $z \in \partial\,\mathcal{O}_r(z_0)$ и потому $u(z) \equiv v(z)$ в $\mathcal{O}_r(z_0)$.

□

Полученное характеристическое свойство гармонических функций делает интуитивно понятным, почему установившееся распределение температур в однородной плоской пластине D есть гармоническая функция. В противном случае в какой–нибудь точке $z_0 \in D$ значение температуры было бы строго больше или строго меньше, чем среднее температуры на достаточно малой окружности с центром в z_0. Следовательно, в этой точке происходило бы соответственно уменьшение или увеличение температуры.

§ 5. Неравенства и принцип Гарнака

В этом параграфе мы приведем два результата Гарнака, касающиеся сходимости гармонических функций и неравенств для ограниченных гармонических функций.

Теорема 1. *Пусть u — неотрицательная гармоническая в $\mathcal{O}_r(z_0)$ и непрерывная в $\overline{\mathcal{O}_r(z_0)}$ функция. Тогда для всех $z \in \mathcal{O}_r(z_0)$ выполняются неравенства*

$$\frac{r-|z-z_0|}{r+|z-z_0|}u(z_0) \le u(z) \le \frac{r+|z-z_0|}{r-|z-z_0|}u(z_0). \qquad (1)$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $v(\zeta) = u(z_0 + r\zeta)$. Для нее выполнены условия применимости формулы Пуассона, согласно которой

$$v(\zeta) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{T}} \frac{1-|\zeta|^2}{|æ-\zeta|^2}v(æ)\,|dæ|.$$

Замечая, что

$$\frac{1-|\zeta|}{1+|\zeta|} \le \frac{1-|\zeta|^2}{|æ-\zeta|^2} \le \frac{1+|\zeta|}{1-|\zeta|},$$

и учитывая неотрицательность $v(æ)$, получаем

$$\frac{1-|\zeta|}{1+|\zeta|}\,\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{T}} v(æ)\,|dæ| \le v(\zeta) \le \frac{1+|\zeta|}{1-|\zeta|}\,\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{T}} v(æ)\,|dæ|.$$

В силу теоремы о среднем эти неравенства переписываются в виде:

$$\frac{1-|\zeta|}{1+|\zeta|}v(0) \le v(\zeta) \le \frac{1+|\zeta|}{1-|\zeta|}v(0).$$

Остается в этих неравенствах положить $\zeta = (z-z_0)\,/\,r$ и заметить,что

$$v(0) = u(z_0), \qquad v\left(\frac{z-z_0}{r}\right) = u(z).$$

□

Упражнение. Покажите, что неотрицательная гармоническая во всей плоскости функция тождественно постоянная.

Теорема 2 (Гарнака). *Пусть последовательность гармонических в области D функций u_n удовлетворяет условию $u_n(z) \le u_{n+1}(z)$ при всех $z \in D$ и $n = 1, 2, \ldots$. Тогда выполняется одно из следующих утверждений:*

(i) *$u_n(z) \to \infty$ локально равномерно в D при $n \to \infty$;*

(*ii*) *последовательность* $\{u_n\}$ *сходится локально равномерно в* D *при* $n \to \infty$ *к некоторой гармонической в* D *функции* u.

Доказательство. Пусть z_0 — произвольная точка области D. В силу открытости D найдется такое $r > 0$, что $\overline{\mathcal{O}_r(z_0)} \subset D$. Поскольку при любых натуральных n и p функция $u_{n+p} - u_n$ является неотрицательной, то в силу (1)

$$\tfrac{r-|z-z_0|}{r+|z-z_0|}(u_{n+p}(z_0) - u_n(z_0)) \le u_{n+p}(z) - u_n(z) \le \tfrac{r+|z-z_0|}{r-|z-z_0|}(u_{n+p}(z_0) - u_n(z_0))$$

при всех $z \in \mathcal{O}_r(z_0)$. В круге же $\mathcal{O}_{r/2}(z_0)$ будет выполняться неравенство

$$\frac{1}{3}(u_{n+p}(z_0) - u_n(z_0)) \le u_{n+p}(z) - u_n(z) \le 3(u_{n+p}(z_0) - u_n(z_0)). \qquad (2)$$

Левая часть неравенства (2) показывает, что если $u_n(z_0) \to \infty$ при $n \to \infty$, то $u_n(z) \to \infty$ равномерно в $\mathcal{O}_{r/2}(z_0)$ при $n \to \infty$. Правая часть неравенства (2) показывает, что если $\{u_n(z_0)\}$ сходится, то $\{u_n(z)\}$ также сходится равномерно в круге $\mathcal{O}_{r/2}(z_0)$ к некоторой функции $u(z)$. Очевидно, что предельная функция $u(z)$ будет непрерывной в $\mathcal{O}_{r/2}(z_0)$.

Таким образом, область D распадается на два открытых непересекающихся множества: D_1, на котором $u_n(z) \to \infty$ локально равномерно при $n \to \infty$, и D_2, на котором $u_n(z)$ сходится к некоторой непрерывной функции $u(z)$ также локально равномерно. В силу связности области D одно из этих множеств должно быть пустым.

Остается доказать, что в случае $D_2 = D$ предельная функция $u(z)$ является гармонической. Пусть $z_0 \in D$ и $r > 0$, такое, что $\overline{\mathcal{O}_r(z_0)} \subset D$ и $u_n(z) \to u(z)$ равномерно в $\mathcal{O}_r(z_0)$ при $n \to \infty$. Тогда для всех $\zeta \in \mathbb{D}$ получаем

$$u(z_0 + r\zeta) = \lim_{n\to\infty} u_n(z_0 + r\zeta) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{T}} \frac{1 - |\zeta|^2}{|æ - \zeta|^2} u_n(z_0 + ræ)\,|dæ| = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{T}} \frac{1 - |\zeta|^2}{|æ - \zeta|^2} u(z_0 + ræ)\,|dæ|.$$

Поскольку в правой части равенства мы имеем интеграл Пуассона, то $u(z_0 + r\zeta)$ является гармонической в $\mathbb{D}$ функцией. Следовательно, $u(z)$ гармонична в $\mathcal{O}_r(z_0)$.

□

Список использованной и рекомендуемой литературы

1. Бицадзе А.В. Основы теории аналитических функций комплексного переменного.– М.: Наука, 1969.–240 с.

2. Евграфов М.А. Аналитические функции.– М.: Наука, 1991.–448 с.

3. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного.–М.: Наука.–1988.–736 с.

4. Маркушевич А.И. Теория аналитических функций. Том 1: Начала теории.–М.: Наука, 1968.–486 с.

5. Маркушевич А.И. Теория аналитических функций. Том 2: Дальнейшее построение теории.–М.: Наука, 1968.–624 с.

6. Математика XIX века. Геометрия. Теория аналитических функций. (Под редакцией А.Н.Колмогорова и А.П.Юшкевича).– М.: Наука, 1981.–280 с.

7. Неванлинна Р. Однозначные аналитические функции.–М.: ГТТИ, 1941.–388 с.

8. Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1967.–444 с.

9. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. Ч. 1. Функции одного переменного.– М.: Наука, 1976.–320 с.

10. Ahlfors L.V. Complex analysis. New York: McGraw–Hill, 1966.

Содержание

Учебное издание

Горяйнов Виктор Владимирович

Курс лекций
по теории функций
комплексного переменного

Главный редактор А.В. Шестакова
Редактор О.С. Кашук
Технический редактор

ЛР N 020406 от 12.02.97

Подписано в печать 30.10.98. Формат $60 \times 84/16$.
Бумага типографская N 1. Гарнитура Таймс. Усл. печ. л. 7,2
Уч. изд. л. 7,8 Тираж 100 экз. Заказ 116. "С" 25.

Издательство Волгоградского государственного университета
400062, Волгоград, ул. 2-я Продольная, 30.