

Московский физико-технический институт
(государственный университет)

О.В. Бесов

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ РЯДЫ ФУРЬЕ

Учебно-методическое пособие

Москва, 2004

Составитель О.В.Бесов

УДК 517.

Тригонометрические ряды Фурье.
Учебно-методическое пособие (для студентов 2-го курса).
МФТИ. М., 2004. 31 с.

В соответствии с программой кафедры высшей математики МФТИ излагаются начальные сведения по теории тригонометрических рядов Фурье, теоремы о сходимости и равномерной сходимости рядов Фурье, теоремы Вейерштрасса об аппроксимации непрерывных функций.

В центре внимания вопросы равномерной сходимости ряда Фурье. В отличие от многих курсов математического анализа, равномерная сходимость ряда Фурье непрерывной и кусочно-гладкой функции доказывается с неулучшаемой оценкой скорости сходимости ряда Фурье. Зависимость скорости сходимости ряда Фурье функции от ее гладкости также устанавливается вместе с точными оценками.

СОДЕРЖАНИЕ

§ 1. Определение ряда Фурье и принцип локализации	4
§ 2. Сходимость ряда Фурье	10
§ 3. Равномерная сходимость ряда Фурье	13
§ 4. Приближение непрерывных функций многочленами	18
§ 5. Почленное дифференцирование тригонометрических рядов. Скорость стремления к нулю коэффициентов и остатка ряда Фурье	22
Заключительное замечание	30

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ РЯДЫ ФУРЬЕ

§ 1. Определение ряда Фурье и принцип локализации

Определение 1.1. Ряд вида

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx \quad (a_k, b_k \in \mathbb{R})$$

называется *тригонометрическим рядом*.

Множество функций

$$\frac{1}{2}, \quad \cos x, \quad \sin x, \quad \cos 2x, \quad \sin 2x, \quad \cos 3x, \quad \sin 3x, \dots$$

называется *тригонометрической системой*.

Тригонометрическая система функция является *ортogonalь-ной* системой в том смысле, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos mx \, dx = 0, \quad k, m \in \mathbb{N}_0, \quad k \neq m,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin mx \, dx = 0, \quad k, m \in \mathbb{N}_0, \quad k \neq m,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \sin mx \, dx = 0, \quad k, m \in \mathbb{N}_0, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Кроме того,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 kx \, dx = \pi, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Лемма 1.1. Пусть

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx, \quad (1.1)$$

и этот ряд сходится равномерно на \mathbb{R} . Тогда

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \\ a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx, \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx, \quad k \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Функция f непрерывна на $[-\pi, \pi]$ как сумма равномерно сходящегося ряда непрерывных функций. Домножим равенство (1.1) почленно на $\cos nx$ или $\sin nx$ ($n \in \mathbb{N}$). Полученные ряды также будут сходиться равномерно и их почленное интегрирование с использованием свойства ортогональности функций системы дает

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx &= \int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos^2 nx dx = \pi a_n, \\ \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx &= \int_{-\pi}^{\pi} b_n \sin^2 nx dx = \pi b_n, \end{aligned}$$

откуда получаем вторую и третью формулы из (1.2). Первая из формул (1.2) получается почленным интегрированием ряда (1.1).

Заметим, что члены тригонометрического ряда являются определенными на действительной оси 2π -периодическими функциями. Поэтому и сумма тригонометрического ряда (если этот ряд сходится) также является 2π -периодической функцией.

Определение 1.2. Пусть f — 2π -периодическая функция, абсолютно интегрируемая на отрезке $[-\pi, \pi]$. Тригонометрический ряд с коэффициентами a_k, b_k , определенными формулами (1.2), называется (*тригонометрическим*) *рядом Фурье* функции f , а коэффициенты a_k, b_k — *коэффициентами ряда Фурье* функции f .

В этом случае пишут

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx, \quad (1.3)$$

понимая под такой записью, что функции f поставлен в соответствие ее ряд Фурье.

Лемму 1.1 можно переформулировать так: *равномерно сходящийся тригонометрический ряд является рядом Фурье своей суммы.*

Упражнение 1.1. Показать, что тригонометрический ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^{1+\varepsilon}}$, $\varepsilon > 0$, является рядом Фурье.

Заметим, что если 2π -периодическая функция f абсолютно интегрируема на каком-либо отрезке $[a, a+2\pi]$ длины 2π , то она будет абсолютно интегрируемой и на любом сдвинутом отрезке $[b, b+2\pi]$ и при этом

$$\int_b^{b+2\pi} f(x) dx = \int_a^{a+2\pi} f(x) dx.$$

Это свойство, очевидное с геометрической точки зрения, без труда можно доказать и аналитически. В частности, коэффициенты Фурье 2π -периодической функции f можно вычислять, заменив в формулах (1.2) интеграл по отрезку $[-\pi, \pi]$ на интеграл по любому отрезку $[a, a+2\pi]$.

С другой стороны, каждую заданную на $[a-\pi, a+\pi]$ абсолютно интегрируемую функцию можно (изменив при необходимости ее значение в точке $a-\pi$ или в точке $a+\pi$, или и в той и в другой точке) продолжить до определенной на всей оси 2π -периодической функции. При этом изменение ее значения в одной или двух точках не изменит коэффициентов Фурье ее 2π -периодического продолжения (1.2), а значит, и ряда Фурье (1.3). Поэтому сходимость и другие свойства ряда Фурье можно изучать, считая, что функция f задана лишь на отрезке длиной 2π , например, на $[-\pi, \pi]$.

Мы будем изучать в первую очередь вопросы сходимости ряда Фурье в данной точке, на отрезке, равномерной сходимости на всей числовой оси и т.п. Наибольший интерес представляет случай, когда ряд Фурье функции f сходится в том или ином смысле к функции f . В этом случае говорят, что функция f разложена в ряд Фурье.

Теорема 1.1 (Римана об осцилляции). Пусть функция f абсолютно интегрируема на конечном или бесконечном интервале (a, b) . Тогда

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \cos \lambda x \, dx = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \sin \lambda x \, dx = 0.$$

Доказательство. Без ограничения общности будем считать, что $(a, b) = (-\infty, +\infty)$ (если это не так, то функцию f можно доопределить нулем на $(-\infty, +\infty) \setminus (a, b)$). Известно, что всякая абсолютно интегрируемая на $(-\infty, \infty)$ функция f является непрерывной по сдвигу в среднем, т.е.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+h) - f(x)| \, dx \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad h \rightarrow 0. \quad (1.4)$$

Это свойство можно доказать, аппроксимируя f в среднем непрерывной финитной функцией.

Заменив переменную x на $x + \frac{\pi}{\lambda}$, получаем:

$$\begin{aligned} I(\lambda) &:= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos \lambda x \, dx = - \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(x + \frac{\pi}{\lambda}\right) \cos \lambda x \, dx = \\ &= - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[f\left(x + \frac{\pi}{\lambda}\right) - f(x) \right] \cos \lambda x \, dx. \end{aligned}$$

В силу (1.4)

$$|I(\lambda)| \leq \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| f\left(x + \frac{\pi}{\lambda}\right) - f(x) \right| \, dx \rightarrow 0 \quad (\lambda \rightarrow \infty).$$

Для интеграла $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin \lambda x \, dx$ доказательство аналогично.

Следствие 1. Коэффициенты Фурье (1.2) абсолютно интегрируемой на отрезке $[-\pi, \pi]$ функции стремятся к нулю при $k \rightarrow \infty$.

Пусть 2π -периодическая функция f абсолютно интегрируема на $[-\pi, \pi]$. Частичная сумма ряда Фурье

$$S_n(x; f) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

называется суммой ряда Фурье порядка $n \in \mathbb{N}_0$ функции f . Приведем ее к компактному виду, удобному для дальнейших исследований.

Назовем *ядром Дирихле* функцию

$$D_n(x) := \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos kx = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{2 \sin \frac{x}{2}}. \quad (1.5)$$

Последнее равенство (правая часть понимается при $x = 2m\pi$, $m \in \mathbb{Z}$, как предел частного при $x \rightarrow 2m\pi$) устанавливается следующим образом. При $x \neq 2m\pi$

$$\begin{aligned} D_n(x) &= \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2}} \left(\sin \frac{x}{2} + \sum_{k=1}^n 2 \sin \frac{x}{2} \cos kx \right) = \\ &= \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2}} \left(\sin \frac{x}{2} + \sum_{k=1}^n \sin \frac{2k+1}{2} x - \sin \frac{2k-1}{2} x \right) = \\ &= \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{2 \sin \frac{x}{2}}. \end{aligned}$$

Ядро Дирихле (1.5) является, очевидно, 2π -периодической, четной, непрерывной функцией,

$$\begin{aligned} \max |D_n(x)| &= D_n(0) = n + \frac{1}{2}, \\ \frac{2}{\pi} \int_0^\pi D_n(x) dx &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^\pi D_n(x) dx = 1. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Преобразуем сумму Фурье $S_n(x; f)$, подставив в нее вместо коэффициентов Фурье их выражения (1.2). Получим

$$\begin{aligned} S_n(x; f) &= \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt + \sum_{k=1}^n \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) (\cos kt \cos kx + \sin kt \sin kx) dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos k(t-x) \right] dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t-x) f(t) dt. \quad (1.7) \end{aligned}$$

Произведя в последнем интеграле (называемом интегралом Дирихле) замену переменной t на $t+x$ и сдвиг отрезка интегрирования, получим

$$\begin{aligned} S_n(x; f) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t) f(x+t) dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\pi}^0 + \int_0^{\pi} \right) D(t) f(x+t) dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} D_n(t) [f(x+t) + f(x-t)] dt. \quad (1.8) \end{aligned}$$

Для произвольного δ , $0 < \delta < \pi$, представим последний интеграл в виде

$$S_n(x; f) = \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{\delta} + \int_{\delta}^{\pi} \right) \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2 \sin \frac{t}{2}} \sin \left(\left(n + \frac{1}{2} \right) t \right) dt.$$

Во втором из этих интегралов знаменатель дроби $2 \sin \frac{t}{2} \geq 2 \sin \frac{\delta}{2} > 0$, поэтому сама дробь абсолютно интегрируема как функция t .

Следовательно, второй интеграл стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$ по теореме Римана об осцилляции. Мы приходим, таким образом, к следующему утверждению.

Теорема 1.2 (принцип локализации). Пусть 2π -периодическая функция f абсолютно интегрируема на отрезке $[-\pi, \pi]$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $0 < \delta < \pi$. Пределы

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x; f),$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^\delta \frac{f(x_0 + t) + f(x_0 - t)}{2 \sin \frac{t}{2}} \sin \left(\left(n + \frac{1}{2} \right) t \right) dt$$

существуют или не существуют одновременно и совпадают в случае их существования.

Мы видим, таким образом, что сходимость ряда Фурье функции f в точке x_0 и величина его суммы в случае сходимости определяются поведением функции f на интервале $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, т.е. в сколь угодно малой окрестности точки x_0 .

§ 2. Сходимость ряда Фурье

Пусть x_0 — точка разрыва первого рода функции f . Введем следующие обобщения односторонних производных:

$$f'_+(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0+0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 + 0)}{h},$$

$$f'_-(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0+0} \frac{f(x_0 - h) - f(x_0 - 0)}{-h},$$

которые также будем называть односторонними производными.

Определение 2.1. Точку x_0 назовем *почти регулярной* точкой функции f , если существуют $f(x_0 + 0)$, $f(x_0 - 0)$, $f'_+(x_0)$, $f'_-(x_0)$. Если при этом $f(x_0) = \frac{f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)}{2}$, то x_0 назовем *регулярной* точкой функции f .

Если функция f непрерывна в точке x_0 и имеет в ней правую и левую производные, то x_0 — регулярная точка функции f .

Теорема 2.1. Пусть 2π -периодическая функция f абсолютно интегрируема на отрезке $[-\pi, \pi]$, и x_0 — ее почти регулярная точка. Тогда ряд Фурье функции f сходится в точке x_0 к $\frac{f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)}{2}$. Если же при этом x_0 — регулярная

точка f (в частности, если f непрерывна в точке x_0), то ряд Фурье в точке x_0 сходится к $f(x_0)$.

Доказательство. Пусть x_0 — почти регулярная точка функции f . Из формулы (1.8) с помощью (1.6) получаем

$$\begin{aligned} S_n(x; f) - \frac{f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)}{2} &= \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi D_n(t) [f(x_0 + t) + f(x_0 - t)] dt - \\ &- \frac{f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)}{2} \frac{2}{\pi} \int_0^\pi D_n(t) dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{f(x_0 + t) + f(x_0 - t) - 2f(x_0)}{2 \sin \frac{t}{2}} \sin \left(\left(n + \frac{1}{2} \right) t \right) dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left[\frac{f(x_0 + t) - f(x_0 + 0)}{t} + \right. \\ &\left. + \frac{f(x_0 - t) - f(x_0 - 0)}{t} \right] \frac{t}{2 \sin \frac{t}{2}} \left(\sin \left(n + \frac{1}{2} \right) t \right) dt. \end{aligned}$$

Дробь $\frac{t}{2 \sin \frac{t}{2}}$, доопределенная единицей при $t = 0$, является непрерывной на $[0, \pi]$ функцией. Дробь $\frac{f(x_0 + t) - f(x_0 + 0)}{t}$ является абсолютно интегрируемой на $[0, \pi]$ функцией, поскольку таковой является ее числитель, и при $t \rightarrow 0+0$ она имеет конечный предел. То же относится и ко второй дроби в квадратной скобке. Следовательно, множитель при $\sin \left(\left(n + \frac{1}{2} \right) t \right)$ в подынтегральном выражении последнего интеграла представляет собой абсолютно интегрируемую на $[0, \pi]$ функцию. По теореме Римана об осцилляции, последний интеграл стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$, т.е.

$$S_n(x_0; f) \rightarrow \frac{f(x_0 - 0) - f(x_0 + 0)}{2} \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

З а м е ч а н и е 2.1. Требование существования $f'_+(x_0)$, $f'_-(x_0)$ в условии теоремы можно (как это видно из до-

казательства) заменить более слабым требованием выполнения неравенств

$$\begin{aligned} |f(x_0 + h) - f(x_0 + 0)| &\leq Mh^\alpha, \quad \forall h \in (0, \delta), \\ |f(x_0 - h) - f(x_0 - 0)| &\leq Mh^\alpha, \quad \forall h \in (0, \delta), \end{aligned} \quad (2.1)$$

при некоторых $\alpha \in (0, 1]$, $\delta > 0$, $M > 0$. Условия (2.1) называются (односторонними) условиями Гёльдера степени α , а при $\alpha = 1$ еще и (односторонними) условиями Липшица.

Следствие 1. Пусть 2π -периодическая функция f абсолютно интегрируема на отрезке $[-\pi, \pi]$, и существует $f'(x_0)$. Тогда ряд Фурье функции f сходится в точке x_0 к $f(x_0)$.

З а м е ч а н и е 2.2. Непрерывность на \mathbb{R} 2π -периодической функции не является достаточным условием сходимости ее ряда Фурье в данной точке x_0 . Существуют примеры 2π -периодической непрерывной на \mathbb{R} функций, ряды Фурье которых расходятся в каждой рациональной точке.

В теореме 2.1, замечании 2.1 и следствии приводятся достаточные условия сходимости ряда Фурье в данной точке. Существуют и значительно более общие достаточные условия такой сходимости.

З а м е ч а н и е 2.3. Пусть функция f задана и абсолютно интегрируема на отрезке длиной 2π , например на $[-\pi, \pi]$. Для выяснения сходимости ее ряда Фурье в концах отрезка можно применить теорему 2.1, продолжив функцию f (изменив при необходимости ее значения на одном или обоих концах) до 2π -периодической функции. После такого продолжения точка $x = -\pi$ будет почти регулярной тогда и только тогда, когда $\exists f'_+(-\pi)$, $f'_-(\pi)$. В этом случае ряд Фурье функции f сходится в точке $x_0 = -\pi$ к $\frac{f(-\pi + 0) + f(\pi - 0)}{2}$.

Аналогично решается вопрос о сходимости ряда Фурье в точке $x_0 = \pi$.

Пример 2.1. Найдем ряд Фурье функции $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$, $x \in [0, 2\pi]$.

Пусть $\tilde{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — 2π -периодическая функция, $\tilde{f}(x) = f(x)$ при $0 < x < 2\pi$, $\tilde{f}(0) = 0$. Как мы знаем, коэффициенты Фурье функции \tilde{f} можно вычислить по формулам (1.2) либо отличающихся от них сдвигом отрезка интегрирования. В силу нечетности \tilde{f} , $a_k = 0 \forall k \in \mathbb{N}_0$. Интегрируя по частям, получаем

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\pi - x}{2} \sin kx \, dx = \\ &= -\frac{1}{\pi} (\pi - x) \frac{\cos kx}{x} \Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{2\pi k} \int_0^{2\pi} \cos kx \, dx = \frac{1}{k}. \end{aligned}$$

Заметим, что всякая точка $x \in \mathbb{R}$ является регулярной точкой функции \tilde{f} . Следовательно,

$$\tilde{f}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k} \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (2.2)$$

Итак, на отрезке $[0, 2\pi]$ сумма ряда Фурье \tilde{f} функции f совпадает с f на интервале $(0, 2\pi)$ и отличается от f в концах интервала.

§ 3. Равномерная сходимость ряда Фурье

Определение 3.1. Функцию f называют *кусочно-непрерывно дифференцируемой* на отрезке $[a, b]$, если существует такое разбиение $\{a_i\}_{i=0}^m$ отрезка $[a, b]$ ($a = a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_m = b$), что:

- 1° Производная f' непрерывна на каждом интервале (a_{i-1}, a_i) ;
- 2° Существуют односторонние пределы $f'(a_{i-1} + 0)$, $f'(a_i - 0)$ для $i = 1, 2, \dots, m$.

2π -периодическую функцию будем называть *кусочно-непрерывной* (кусочно-непрерывно дифференцируемой), если она кусочно-непрерывна (кусочно-непрерывно дифференцируема) на отрезке $[-\pi, \pi]$.

Теорема 3.1. Пусть f — 2π -периодическая непрерывная и кусочно-непрерывно дифференцируемая функция.

Тогда ряд Фурье функции f сходится к f равномерно на \mathbb{R} и

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |S_n(x; f) - f(x)| \leq C \frac{\ln n}{n} \quad \text{при } n \geq 2,$$

где C не зависит от n .

Доказательство. Пусть $M_0 = \max |f|$, $M_1 = \max |f'|$,

$$g_x(t) := \frac{f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)}{2 \sin \frac{t}{2}}.$$

С помощью теоремы Лагранжа о конечных приращениях получаем, что при $0 < t \leq \pi$

$$|f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)| \leq 2M_1 t.$$

Следовательно,

$$|g_x(t)| \leq \frac{2M_1 t}{2 \sin \frac{t}{2}} \leq \pi M_1,$$

$$\begin{aligned} \left| \frac{d}{dt} g_x(t) \right| &\leq |f'(x+t) - f'(x-t)| \frac{1}{2 \sin \frac{t}{2}} + \\ &+ |f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)| \frac{\cos \frac{t}{2}}{4 \sin^2 \frac{t}{2}} \leq \\ &\leq \frac{\pi M_1}{t} + \frac{\pi^2 M_1}{2t} \leq \frac{\pi^2 M_1}{t}. \end{aligned}$$

Пусть $0 < \delta = \delta_n < \pi$. Как и при доказательстве теоремы 2.1

$$S_n(x; f) - f(x) = \frac{1}{\pi} \left(\int_0^\delta + \int_\delta^\pi \right) g_x(t) \sin \left(\left(n + \frac{1}{2} \right) t \right) dt = I_n + J_n.$$

Очевидно, что $|I_n| \leq \delta M_1$.

С помощью интегрирования по частям имеем

$$J_n = -\frac{1}{\pi} g_x(t) \frac{\cos \left(n + \frac{1}{2} \right) t}{n + \frac{1}{2}} \Big|_\delta^\pi - \frac{1}{\pi} \int_\delta^\pi \frac{d}{dt} g_x(t) \frac{\cos \left(n + \frac{1}{2} \right) t}{n + \frac{1}{2}} dt.$$

Отсюда

$$|J_n| \leq \frac{M_1}{n + \frac{1}{2}} + \frac{nM_1}{\delta \left(n + \frac{1}{2}\right)} = \left(1 + \frac{\pi}{\delta}\right) M_1 \frac{1}{n + \frac{1}{2}}.$$

Полагая $\delta = \delta_n = \frac{1}{n}$, получаем, что при $n \geq 2$

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |S_n(x; f) - f(x)| \leq |I_n| + |J_n| \leq \frac{C \ln n}{n},$$

где C не зависит от n .

Из последнего неравенства следует утверждение теоремы.

Подчеркнем, что теорема 3.1 не только устанавливает равномерную сходимость ряда Фурье, но и дает оценку быстроты стремления к нулю остатка этого ряда.

Равномерная сходимость ряда Фурье периодической функции может быть установлена и при условиях более общих, чем в теореме 3.1, например, для функций, удовлетворяющих условию Гёльдера.

Определение. Говорят, что функция $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет условию Гёльдера степени α , $0 < \alpha \leq 1$ (или условию Липшица в случае $\alpha = 1$), если $\exists M_\alpha > 0$:

$$|f(x) - f(y)| \leq M_\alpha |x - y|^\alpha \quad \forall x, y \in [a, b].$$

Заметим, что функции, удовлетворяющие условию Гёльдера, непрерывны и что класс функций, удовлетворяющих условию Гёльдера степени α сужается при увеличении α .

Если функция f непрерывна и кусочно-непрерывно дифференцируема на $[a, b]$, то она удовлетворяет на $[a, b]$ условию Липшица.

Следующая теорема обобщает теорему 3.1.

Теорема 3.2. Пусть 2π -периодическая функция f удовлетворяет на \mathbb{R} условию Гёльдера степени α , $0 < \alpha \leq 1$.

Тогда ее ряд Фурье сходится к ней равномерно на \mathbb{R} и

$$\sup_x |S_n(x; f) - f(x)| \leq C_\alpha \frac{\ln n}{n^\alpha} \quad \forall n \geq 2,$$

где C_α не зависит от n .

Доказательство. Воспользуемся формулой (2.1) в виде

$$S_n(x; f) - f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x+t) - f(x)}{2 \sin \frac{t}{2}} \sin \left(\left(n + \frac{1}{2} \right) t \right) dt.$$

Положим

$$h_x(t) = \frac{f(x+t) - f(x)}{2 \sin \frac{t}{2}}, \quad \lambda = \lambda_n = n + \frac{1}{2}, \quad \delta \geq \frac{8}{n} > 2 \frac{\pi}{\lambda}.$$

Так же, как при доказательстве теоремы Римана об осцилляции, получаем

$$\begin{aligned} |S_n(x; f) - f(x)| &\leq \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \left| h_x \left(t + \frac{\pi}{\lambda} \right) - h_x(t) \right| dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\delta}^{\delta} \dots dt + \frac{1}{2} \left(\int_{-\pi}^{-\delta} + \int_{\delta}^{\pi} \right) \dots dt = I_{\delta, n}(x) + J_{\delta, n}(x). \end{aligned} \quad (3.1)$$

Напомним, что $\frac{2}{\pi} t < \sin t < t$ при $0 < t < \frac{\pi}{2}$. Заметим, что при $|t| \leq 2\delta$

$$|h_x(t)| \leq \frac{M_\alpha |t|^\alpha}{2|t|} = \frac{\pi}{2} M_\alpha |t|^{\alpha-1},$$

так что

$$I_{\delta, n}(x) \leq \frac{\pi}{2} M_\alpha \int_0^{2\delta} t^{\alpha-1} dt = \frac{\pi}{2\alpha} M_\alpha 2^\alpha \delta^\alpha. \quad (3.2)$$

Если же $|t| > \delta$, то

$$\begin{aligned} h_x \left(t + \frac{\pi}{\lambda} \right) - h_x(t) &= \frac{f \left(x + t + \frac{\pi}{\lambda} \right) - f(x)}{2 \sin \frac{t + \frac{\pi}{\lambda}}{2}} - \frac{f(x+t) - f(x)}{2 \sin \frac{t}{2}} = \\ &= \frac{f \left(x + t + \frac{\pi}{\lambda} \right) - f(x)}{2 \sin \frac{t + \frac{\pi}{\lambda}}{2}} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sin \frac{t + \frac{\pi}{\lambda}}{2}} - \frac{1}{\sin \frac{t}{2}} \right) \times \\ &\quad \times (f(x+t) - f(x)), \end{aligned} \quad (3.3)$$

так что

$$\left| h_x \left(t + \frac{\pi}{\lambda} \right) - h_x(t) \right| \leq \frac{M_\alpha \left(\frac{\pi}{\lambda} \right)^\alpha \pi}{2 \left| t + \frac{\pi}{\lambda} \right|} + \frac{2 \sin \frac{\pi}{2\lambda} \pi^2 M_\alpha |t|^\alpha}{2 \left| t + \frac{\pi}{\lambda} \right| |t|} \leq \\ \leq C_2 \frac{M_\alpha}{|t| \lambda^\alpha},$$

$$J_{\delta, n}(x) \leq \int_\delta^\pi \frac{C_2 M_\alpha}{\lambda^\alpha} \frac{dt}{t} \leq \frac{C_2 M_\alpha}{\lambda^\alpha} \ln \frac{1}{\delta}.$$

Полагая $\delta = \frac{\delta}{n}$ и собирая оценки, приходим к утверждению теоремы.

Часть теоремы 3.1, касающаяся лишь факта равномерной сходимости, допускает следующее обобщение.

Теорема 3.3. Пусть 2π -периодическая функция f абсолютно интегрируема на $[-\pi, \pi]$. Пусть на некотором интервале (a', b') f непрерывна и f' кусочно-непрерывна.

Тогда ряд Фурье функции f равномерно сходится к f на любом отрезке $[a, b] \subset (a', b')$.

Доказательство. Пусть $\frac{\delta}{n} \leq \delta < \delta$, $[a - 2\delta, b + 2\delta] \subset (a', b')$, $x \in [a, b]$. Воспользуемся оценкой (3.1). В силу (3.2) при $\alpha = 1$

$$I_{\delta, n}(x) \leq C_1 M_1 \delta.$$

Для получения оценки $J_{\delta, n}$ используем преобразование (3.3) разности в подынтегральном выражении. Тогда

$$J_{\delta, n}(x) \leq \frac{1}{4\pi\delta} \int_{-\pi}^\pi \left| f \left(u + \frac{\pi}{\lambda} \right) - f(u) \right| du + \\ + \frac{\pi^3}{4\delta^2 \lambda} \left(\int_{-\pi}^\pi |f(u)| du + 2\pi \sup_{[a, b]} |f| \right).$$

Пусть задано $\varepsilon > 0$. Тогда существует такое достаточно малое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что $\sup_{[a, b]} I_{\delta, n} < \frac{\varepsilon}{2}$. При выбранном δ

$$\exists n_\delta \in \mathbb{N} : \sup_{[a, b]} J_{\delta, n} < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n \geq n_\delta.$$

Тогда из (3.1) и полученных оценок следует, что

$$\sup_{x \in [a, b]} |S_n(x; f) - f(x)| \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty$$

и теорема установлена.

Отметим, что теорема 3.3 расширяет сформулированный ранее принцип локализации, показывая, что для утверждения о равномерной сходимости ряда Фурье на отрезке $[a, b]$ достаточно знать поведение этой функции лишь на окрестности $(a - \varepsilon, b + \varepsilon)$ этого отрезка при сколь угодно малом $\varepsilon > 0$.

Из теоремы 3.3 следует, например, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}$ на любом отрезке $[\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]$, $\varepsilon > 0$, равномерно сходится к функции $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$.

Теорему 3.3 можно обобщить, заменив условие кусочно-непрерывной дифференцируемости на условие Гёльдера степени $\alpha > 0$ на $[a', b']$.

§ 4. Приближение непрерывных функций многочленами

Определение 4.1. Функция вида

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^n A_k \cos kx + B_k \sin kx \quad (A_n^2 + B_n^2 > 0)$$

называется *тригонометрическим многочленом* (тригонометрическим полиномом) степени n .

Теорема 4.1 (Вейерштрасса). Пусть f — 2π -периодическая непрерывная функция. Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ существует такой тригонометрический многочлен T , что

$$\max_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - T(x)| < \varepsilon.$$

Доказательство. Зададим $\varepsilon > 0$. Пусть $\tau = \{x_j\}_{j=0}^J$, $x_j = -\pi + j \frac{2\pi}{J}$, — разбиение отрезка $[-\pi, \pi]$. Построим ломаную (вписанную в график функции f), соединив отрезками

последовательно точки $(x_j, f(x_j))$ графика f . Обозначим через $\Lambda_J: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 2π -периодическую непрерывную функцию, график которой совпадает на $[-\pi, \pi]$ с построенной ломаной. Очевидно, Λ_J — кусочно линейная на $[-\pi, \pi]$ функция, а значит, и кусочно-непрерывно дифференцируемая (т.е. Λ_J' кусочно-непрерывна).

Непрерывная функция f является равномерно непрерывной. Поэтому

$$|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{при} \quad |x' - x''| \leq \frac{2\pi}{J},$$

если $J = J(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ достаточно велико. Тогда

$$\max |f(x) - \Lambda_J(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Функция Λ_J удовлетворяет условиям теоремы 2.1, поэтому ее ряд Фурье сходится к ней равномерно на \mathbb{R} . Следовательно, существует такое $n = n(\varepsilon)$, что

$$\max_{x \in \mathbb{R}} |\Lambda_J(x) - S_n(x; \Lambda_J)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Из последних двух неравенств получаем, что

$$\max_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - S_n(x; \Lambda_J)| < \varepsilon,$$

т.е. утверждение теоремы при

$$T(x) = S_n(x; \Lambda_J).$$

Теорему 4.1 в эквивалентной форму можно сформулировать следующим образом:

Теорема 4.1'. (Вейерштрасса). Пусть функция f непрерывна на отрезке $[-\pi, \pi]$ и $f(-\pi) = f(\pi)$. Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ существует такой тригонометрический многочлен T , что

$$\max_{-\pi \leq x \leq \pi} |f(x) - T(x)| < \varepsilon.$$

Упражнение 4.1. Показать, что последняя теорема перестает быть верной, если отбросить условие $f(-\pi) = f(\pi)$.

Заметим, что в теореме 4.1 в качестве тригонометрического многочлена T нельзя (вообще говоря) взять $S_n(x; f)$ (частичную сумму ряда Фурье функции f), поскольку ряд Фурье непрерывной функции не обязан равномерно сходиться (не обязан даже и поточечно сходиться) к функции f . Однако, в качестве T можно взять $\sigma_n(x; f)$ (сумму Фейера функции f) при достаточно большом n , где

$$\sigma_n(x; f) = \frac{S_0(x; f) + S_1(x; f) + \dots + S_n(x; f)}{n + 1}$$

— среднее арифметическое сумм Фурье, как это следует из теоремы Фейера:

Теорема 4.2 (Фейера). Пусть f — 2π -периодическая непрерывная функция. Тогда

$$\sigma_n(x; f) \underset{\mathbb{R}}{\rightrightarrows} f(x) \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Доказательства этой теоремы приводить не будем.

Факт сходимости последовательности сумм Фейера в теореме Фейера выражают еще и следующим образом:

Ряд Фурье 2π -периодической непрерывной функции f суммируем к $f(x)$ методом средних арифметических.

Метод суммирования ряда средними арифметическими (последовательности его частичных сумм) дает возможность и для некоторых расходящихся рядов определить понятие их суммы как предела последовательности этих средних арифметических. Для сходящегося ряда это понятие совпадает с понятием суммы ряда.

Пример 4.1. Расходящийся ряд $1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ суммируем методом средних арифметических к числу $\frac{1}{2}$.

С помощью теоремы 4.1 (Вейерштрасса) доказывается и возможность приближения с любой точностью непрерывной на отрезке функции подходящим алгебраическим многочленом P .

Теорема 4.3 (Вейерштрасса). Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такой алгебраический многочлен P , что

$$\max_{a \leq x \leq b} |f(x) - P(x)| < \varepsilon.$$

Доказательство. Отобразим линейно отрезок $[0, \pi]$ на отрезок $[a, b]$:

$$x = a + \frac{b-a}{\pi} t, \quad 0 \leq t \leq \pi, \quad a \leq x \leq b,$$

и положим $f^*(t) = f\left(a + \frac{b-a}{\pi} t\right)$, $0 \leq t \leq \pi$. Продолжим ее четным образом на отрезок $[-\pi, 0]$ и затем на всю ось с периодом 2π , сохранив обозначение f^* . Полученная функция $f^*: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ является 2π -периодической и непрерывной на \mathbb{R} . По теореме 4.1 для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такой тригонометрический многочлен T , что

$$\max_{0 \leq t \leq \pi} |f^*(t) - T(t)| \leq \max_{x \in \mathbb{R}} |f^*(t) - T(t)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Функции $\cos kt$, $\sin kt$ (а значит и $T(t)$) раскладываются в степенные ряды с радиусом сходимости $\mathbb{R} = +\infty$, и, следовательно, равномерно сходящиеся на каждом отрезке. Поэтому существует такой номер $n = n(\varepsilon)$, что

$$\max_{0 \leq t \leq \pi} |T(t) - P_n(t)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

где P_n — многочлен Тейлора функции T .

Из последних двух неравенств получаем, что

$$\max_{0 \leq t \leq \pi} |f^*(t) - P_n(t)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

или (возвращаясь к переменной x)

$$\max_{a \leq x \leq b} \left| f(x) - P_n \left(\pi \frac{x-a}{b-a} \right) \right| < \varepsilon.$$

Теорема доказана.

Теорему 4.3 можно переформулировать следующим образом:

Всякая непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция является равномерным пределом некоторой последовательности алгебраических многочленов.

§ 5. Почленное дифференцирование тригонометрических рядов. Скорость стремления к нулю коэффициентов и остатка ряда Фурье

Теорема 5.1. Пусть 2π -периодическая функция f непрерывна и кусочно-непрерывно дифференцируема и пусть

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

— ее разложение в ряд Фурье. Тогда

$$f'(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} -ka_k \sin kx + kb_k \cos kx,$$

т.е. ряд Фурье производной получается из ряда Фурье функции почленным дифференцированием.

Доказательство. Пусть

$$f'(x) \sim \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx.$$

Тогда, интегрируя по частям, получим

$$\alpha_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) dx = \frac{1}{\pi} [f(\pi) - f(-\pi)] = 0,$$

$$\alpha_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \cos kx dx =$$

$$= \frac{1}{\pi} f(x) \cos kx \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{k}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx = kb_k,$$

$$\beta_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \sin kx dx =$$

$$= \frac{1}{\pi} f(x) \sin kx \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{k}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx = -ka_k.$$

Лемма 5.1. Пусть 2π -периодическая функция f имеет непрерывные производные до порядка $m - 1$ включительно и кусочно-непрерывную производную порядка $m \in \mathbb{N}$.

Тогда для коэффициентов Фурье функции f выполняются оценки

$$|a_k| + |b_k| = o\left(\frac{1}{k^m}\right) \quad \text{при } k \rightarrow \infty. \quad (5.1)$$

Доказательство. Пусть $m \geq 1$ и

$$f^{(m)}(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx.$$

Применяя m раз теорему 5.1, получаем, что

$$|\alpha_k| + |\beta_k| = k^m(|a_k| + |b_k|), \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Поскольку $\alpha_k, \beta_k \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$) по лемме о стремлении к нулю коэффициентов Фурье, из последнего равенства получаем (5.1).

Лемма 5.1 показывает, что коэффициенты Фурье функции f тем быстрее стремятся к нулю, чем лучше дифференциальные свойства функции f .

Утверждение леммы 5.1 можно несколько усилить, если использовать неравенства Бесселя для кусочно-непрерывных 2π -периодических функций:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx. \quad (5.2)$$

Это неравенство будет установлено ниже. Применяя (5.2) к производной $f^{(m)}$, получаем, что в условиях леммы 5.1

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{2m} (a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f^{(m)}(x))^2 dx < \infty.$$

Установим оценки скорости приближения функции ее суммами Фурье в зависимости от дифференциальных свойств функции. Изучим для этого характер сходимости ряда, сопряжен-

ного с рядом Фурье 2π -периодической непрерывной и кусочно-непрерывно дифференцируемой функции f , т.е. ряда

$$\tilde{S}(x; f) := \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin kx - b_k \cos kx, \quad (5.3)$$

где a_k, b_k — коэффициенты Фурье функции f .

Сопряженным ядром Дирихле называется

$$\tilde{D}_n(x) = \sum_{k=1}^n \sin kx = \frac{\cos \frac{x}{2} - \cos \left(n + \frac{1}{2}\right) x}{2 \sin \frac{x}{2}}.$$

Последнее равенство устанавливается так же, как (1.5). Так же, как (1.8) устанавливается, что частичную сумму

$$\tilde{S}_n(x; f) = \sum_{k=1}^n a_k \sin kx - b_k \cos kx$$

ряда (5.3) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \tilde{S}_n(x; f) &= - \int_0^{\pi} \tilde{D}_n(t) [f(x+t) - f(x-t)] dt = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} h_x(t) \cos \left(\left(n + \frac{1}{2}\right) t \right) dt + \tilde{f}(x), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} h_x(t) &:= \frac{f(x+t) - f(x-t)}{2 \sin \frac{t}{2}}, \\ \tilde{f}(x) &:= - \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{f(x+t) - f(x-t)}{2 \operatorname{tg} \frac{t}{2}} dt. \end{aligned}$$

Лемма 5.2. Пусть 2π -периодическая функция f непрерывна и кусочно-непрерывно дифференцируема, a_k, b_k — ее коэффициенты Фурье.

Тогда при некотором $C > 0$ и $\forall n \geq 2$

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \sum_{n+1}^{\infty} a_k \sin kx - b_k \cos kx \right| \leq C \frac{\ln n}{n}. \quad (5.4)$$

Доказательство. Положим $M_1 := \max_{\mathbb{R}} |f'|$. С помощью теоремы Лагранжа о конечных приращениях получаем

$$|f(x+t) - f(x-t)| \leq 2M_1 t, \quad 0 < t \leq \pi,$$

откуда следует, в частности, что $\tilde{f}(x)$ существует для каждого x (как интеграл от непрерывной на $(0, \pi]$ и ограниченной функции). Оценим

$$\tilde{f}(x) - \tilde{S}_n(x; f) = -\frac{1}{\pi} \int_0^\pi h_x(t) \cos\left(n + \frac{1}{2}\right) t dt,$$

используя оценки

$$\begin{aligned} |h_x(t)| &\leq \pi M_1, \\ \left| \frac{d}{dt} h_x(t) \right| &\leq |f'(x+t) + f'(x-t)| \frac{1}{2 \sin \frac{t}{2}} + \\ &+ |f(x+h) - f(x-h)| \frac{\cos \frac{t}{2}}{4 \sin^2 \frac{t}{2}} \leq \frac{\pi M_1}{t} + \frac{\pi^2 M_1}{2t} \leq \frac{\pi^2 M_1}{t}. \end{aligned}$$

Так же, как при доказательстве теоремы 1.2 получаем

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |\tilde{f}(x) - \tilde{S}_n(x; f)| \leq C \frac{\ln n}{n} \quad \text{при } n \geq 2,$$

откуда следует (5.4).

Теорема 5.2. Пусть при $m \in \mathbb{N}$ 2π -периодическая функция f имеет непрерывные производные до порядка $m-1$ включительно и кусочно-непрерывную производную $f^{(m)}$.

Тогда ряд Фурье функции f сходится к f равномерно и

$$\begin{aligned} \max_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - S_n(x; f)| &= O\left(\frac{\ln n}{n^m}\right) = \\ &= o\left(\frac{1}{n^{m-\varepsilon}}\right) \quad \text{при } n \rightarrow \infty \text{ и } \forall \varepsilon > 0. \end{aligned}$$

Доказательство. Случай $m = 1$ совпадает с теоремой 3.1. Пусть $\varphi := f^{(m-1)}$ и α_k, β_k — коэффициенты Фурье функции φ . По теореме 3.1

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx \right| \leq C \frac{\ln n}{n} \quad \forall n \geq 2. \quad (5.5)$$

Пусть a_k, b_k — коэффициенты Фурье функции f . Пусть сначала $m-1$ — четно. Тогда в силу $m-1$ раз примененной теоремы 5.1 при $x \in \mathbb{R}$ имеем

$$\begin{aligned} |r_n(x; f)| &= \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx \right| = \\ &= \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^{m-1}} (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx) \right|. \end{aligned}$$

Применим к последнему ряду преобразование Абеля, учитывая сходимость ряда $\sum_{k=n+1}^{\infty} \alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx$ и оценку (установленные в случае $m = 1$ данной теоремы)

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx \right| \leq C \frac{\ln n}{n}.$$

Получим

$$\begin{aligned} |r_n(x; f)| &= \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\sum_{j=n+1}^{\infty} \alpha_j \cos jx + \beta_j \sin jx \right) \times \right. \\ &\times \left. \left(\frac{1}{(k+1)^{m-1}} - \frac{1}{k^{m-1}} \right) \right| \leq C \frac{\ln n}{n} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^{m-1}} - \frac{1}{k^{m-1}} \right| = \\ &= C \frac{\ln n}{n} \frac{1}{(n+1)^{m-1}} \leq C \frac{\ln n}{n^m}, \end{aligned}$$

и (5.5) в этом случае установлено.

Пусть теперь $m - 1$ нечетно. Тогда

$$\begin{aligned} |r_n(x; f)| &= \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx \right| = \\ &= \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^{m-1}} (\alpha_k \sin kx - \beta_k \cos kx) \right|. \end{aligned}$$

Ряд $\sum_{k=n+1}^{\infty} \alpha_k \sin kx - \beta_k \cos kx$ сходится по лемме 5.2. Применяя преобразование Абеля и оценку (5.5), получим, что

$$\begin{aligned} |r_n(x; f)| &= \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\sum_{j=n+1}^{\infty} \alpha_j \sin jx - \beta_j \cos jx \right) \right| \times \\ &\times \left(\frac{1}{(k+1)^{m-1}} - \frac{1}{k^{m-1}} \right) \Big| \leq C \frac{\ln n}{n} \frac{1}{(n+1)^{m-1}} \leq C \frac{\ln n}{n^m}, \end{aligned}$$

и теорема доказана.

Теорема 5.2 показывает, что чем больше производных имеет функция f , тем с большей скоростью сходится ее ряд Фурье.

З а м е ч а н и е. Лемму 5.1 и теорему 5.2 можно переформулировать для функции f , заданной лишь на отрезке $[-\pi, \pi]$, добавив условия в концах отрезка, гарантирующие выполнение для ее 2π -периодического продолжения условий соответственно леммы 5.1 и теоремы 5.2. Именно, следует для функции $f: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ считать выполненными следующие дополнительные условия на односторонние производные:

$$f^{(j)}(-\pi) = f^{(j)}(\pi) \quad \text{при } j = 0, 1, \dots, m-1.$$

При соответствующей переформулировке теоремы 3.1 и теоремы 5.1 для функции $f: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ следует считать выполненным равенство $f(-\pi) = f(\pi)$.

Наряду с теоремой 5.2 установим и другую теорему 5.2', хотя и менее сильную, но также указывающую на связь между диф-

ференциальными свойствами 2π -периодической функции и скоростью сходимости ее ряда Фурье.

Доказательство теоремы 5.2' в отличие от теоремы 5.2 опирается не на анализ сходимости сопряженного с рядом Фурье ряда, а на неравенство Бесселя (5.2), которое будет предварительно установлено.

Читатель может по своему усмотрению ограничиться изучением одной из этих двух теорем.

Лемма 5.3. Пусть f — 2π -периодическая и кусочно-непрерывная функция, a_k, b_k — ее коэффициенты Фурье.

Тогда справедливо неравенство Бесселя (5.2).

Доказательство. Пусть сначала f является 2π -периодической непрерывной и кусочно-непрерывно дифференцируемой функцией. По теореме 5.2, она раскладывается в равномерно сходящийся ряд Фурье:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx. \quad (5.6)$$

Умножим равенство (5.6) почленно на $f(x)$ и проинтегрируем полученный ряд (также равномерно сходящийся) почленно. Получим в силу формул (1.2) для коэффициентов Фурье равенство

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx, \quad (5.7)$$

следствием которого является (2.2)

Равенство Парсеваля (5.7) и неравенство Бесселя (5.2) будут позднее распространены на функции f со значительно более общими свойствами.

Пусть теперь функция f удовлетворяет условиям леммы и $\Lambda_J: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — 2π -периодическая непрерывная функция, кусочно линейная на $[-\pi, \pi]$, построенная при доказательстве теоремы Вейерштрасса 4.1 (график Λ_J представляет собой вписанную в

график f ломаную). Обозначим через $a_k(f)$, $b_k(f)$ — коэффициенты Фурье функции f . Из (5.2) следует неравенство

$$\frac{a_0^2(\Lambda_J)}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k^2(\Lambda_J) + b_k^2(\Lambda_J)) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Lambda_J^2(x) dx \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (5.8)$$

Пусть $n \in \mathbb{N}$ фиксировано, а $J \rightarrow \infty$. Тогда, как легко видеть,

$$a_k(\Lambda_J) \rightarrow a_k(f), \quad b_k(\Lambda_J) \rightarrow b_k(f), \quad \int_{-\pi}^{\pi} \Lambda_J^2(x) dx \rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx.$$

Переходя к пределу в неравенстве (5.5), получаем, что

$$\frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k^2(f) + b_k^2(f)) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx.$$

Переходя в последнем неравенстве к пределу при $n \rightarrow \infty$, приходим к утверждению леммы.

Теорема 5.2'. Пусть при $m \in \mathbb{N}$ 2π -периодическая функция f имеет непрерывные производные до порядка $m - 1$ включительно и кусочно-непрерывную производную $f^{(m)}$.

Тогда ряд Фурье функции f сходится к ней равномерно на \mathbb{R} и

$$\max_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - S_n(x; f)| = o\left(\frac{1}{n^{m-\frac{1}{2}}}\right) \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (5.9)$$

Доказательство. Равномерная сходимость к функции f ее ряда Фурье установлена в теореме 3.1. Оценим остаток ее ряда Фурье.

$$\begin{aligned} |r_n(x; f)| &= \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx \right| \leq \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} (|a_k| + |b_k|) \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} (|\alpha_k| + |\beta_k|) \frac{1}{k^m}, \end{aligned}$$

где α_k, β_k — коэффициенты Фурье функции $f^{(m)}$, а последнее неравенство получено m -кратным применением теоремы 5.1. В силу неравенства Коши–Шварца

$$\sum_{k=n+1}^N (|\alpha_k| + |\beta_k|) \frac{1}{k^m} \leq \sqrt{\sum_{k=n+1}^N (|\alpha_k| + |\beta_k|)^2} \sqrt{\sum_{k=n+1}^N \frac{1}{k^{2m}}}.$$

Предельный переход в последнем неравенстве при $N \rightarrow \infty$ показывает, что оно остается верным, если в нем вместо N поставить ∞ . Используя его, получаем, что

$$\begin{aligned} |r_n(x; f)| &\leq \sqrt{2 \sum_{k=n+1}^{\infty} (\alpha_k^2 + \beta_k^2)} \sqrt{\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^{2m}}} = \\ &= \varepsilon_n \sqrt{\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^{2m}}}, \quad (5.10) \end{aligned}$$

причем $\varepsilon_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) в силу сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k^2 + \beta_k^2)$, вытекающей из неравенства Бесселя для функции $f^{(m)}$ (см. лемму 5.3). Заметим, что

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^{2m}} \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \int_{k-1}^m \frac{dx}{x^{2m}} \leq \int_n^{\infty} \frac{dx}{x^{2m}} = \frac{1}{(2m-1)n^{2m-1}}.$$

Отсюда и из (5.10) следует (5.9).

Заключительное замечание

В этом пособии не рассмотрены вопросы почленного интегрирования рядов Фурье, рядов Фурье $2l$ -периодических функций и комплексной формы рядов Фурье. Стандартное изложение этих вопросов можно найти во многих учебниках.

Мы не коснулись также вопросов сходимости рядов Фурье в смысле среднего квадратичного, в которых в полной мере про-

является свойство ортогональности функций тригонометрической системы.