Московский физико-технический институт
(государственный университет)

О.В. Бесов

КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ, УСЛОВНЫЙ ЭКСТРЕМУМ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

Москва, 2002

Составитель О.В.Бесов

УДК 517.

Методические указания по математическому анализу. Кратные интегралы, условный экстремум (для студентов 2-го курса).
МФТИ. М., 2002. 28 с.

Изложение указанных в заглавии разделов курса математического анализа, изучаемых в МФТИ в третьем семестре, отличается от изложения этих вопросов в учебниках и учебных пособиях.

Содержание

§ 1. Критерий измеримости множества

Обозначения: $\mathbb{R}^n$ — n-мерное евклидово пространство точек $x = (x_1, \ldots, x_n)$; Q_k — замкнутый куб ранга k; $S_k(E)$ и $S_k^*(E)$ — соответственно внутреннее и внешнее (замкнутые) ступенчатые тела множества $E \subset \mathbb{R}^n$; μE — мера Жордана множества E.

Лемма 1.1. *Пусть $Q_k \cap E \neq \phi$, $Q_k \not\subset E$. Тогда $Q_k \cap \partial E \neq \phi$.*

Доказательство. Пусть $x \in Q_k \cap E$, $y \in Q_k \setminus E$. Тогда принадлежащий Q_k отрезок с концами в точках x, y обладает тем свойством, что один из его концов лежит в E, а другой — вне E. Применяя к этому отрезку процесс неограниченного деления пополам и отбирая каждый раз ту половину, которая обладает указанным свойством, получим стягивающуюся систему вложенных отрезков с некоторой общей точкой z. Всякая окрестность точки z содержит как точки из E, так и не из E. Поэтому $z \in \partial E$.

Лемма 1.2. $\partial E = \overline{E} \setminus \operatorname{int} E$, $\overline{E} \subset S_k^*(E)$.

Лемма 1.3. $\mu\, \partial Q_k = 0$, $\mu\, \partial S_k(E) = 0$ *для ограниченного множества E.*

Критерий измеримости множества (по Жордану)
Неограниченное множество неизмеримо. Ограниченное множество E измеримо тогда и только тогда, когда $\mu\, \partial E = 0$.

Доказательство для ограниченного множества E.

I. Покажем, что $\mu\, \partial E = 0$ влечет измеримость E. С помощью леммы 1.1 имеем, очевидно,

$$S_k^*(E) \subset S_k^*(\partial E) \cup S_k(E).$$

Поэтому

$$\mu S_k^*(E) \leqslant \mu S_k^*(\partial E) + \mu S_k(E),$$

т.е.

$$\mu S_k^*(E) - \mu S_k(E) \leqslant \mu S_k^*(\partial E) \to 0 \quad (k \to \infty),$$

и, следовательно, измеримо.

II. Покажем, что измеримость E влечет $\mu\,\partial E = 0$. В силу леммы 1.2

$$\partial E \subset \overline{E} \setminus \operatorname{int} E \subset S_k^*(E) \setminus \operatorname{int} S_k(E) \subset$$
$$\subset [S_k^*(E) \setminus S_k(E)] \cup [S_k(E) \setminus \operatorname{int} S_k(E)] \subset$$
$$\subset S_k^{\triangle}(E) \cup \partial S_k(E),$$

где

$$S_k^{\triangle}(E) = \underset{Q_k \subset S_k^*(E),\, Q_k \not\subset S_k(E)}{U Q_k}.$$

Отсюда в силу полуаддитивности верхней меры и леммы 1.3 имеем

$$\mu^* \partial E \leqslant \mu^* S_k^{\triangle}(E) + \mu^* \partial S_k(E) = \mu S_k^{\triangle}(E) =$$
$$= \mu S_k^*(E) - \mu S_k(E) \to 0 \quad (k \to \infty),$$

так что $\mu^* \partial E = 0$, что и требовалось доказать.

§ 2. Геометрический смысл модуля якобиана отображения

В этом параграфе изучается отображение

$$F : \begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v), \end{cases} \tag{1}$$

открытого множества G двумерного евклидова пространства $\mathbb{R}^2_{uv}$ на открытое множество G^* евклидова пространства $\mathbb{R}^2_{xy}$:

$$\mathbb{R}^2_{uv} \supset \underset{\text{откр.}}{G} \overset{F}{\rightleftarrows} \underset{\text{откр.}}{G^*} \subset \mathbb{R}^2_{xy}$$

со свойствами:

1°. F взаимно однозначно отображает G на G^*,

2°. F непрерывно дифференцируемо на G, 3°. $J(u,v) := \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \neq 0$ на G.

Лемма 2.4. *) *Пусть квадрат*

$$Q := \{(u,v) : u_0 \leqslant u \leqslant u_0 + h, \quad v_0 \leqslant v \leqslant v_0 + h\} \subset G,$$
$$\varkappa := \max_Q \quad \max\left\{|x'_u|, |x'_v|, |y'_u, |y'_v|\right\}.$$

Тогда F удовлетворяет условию Липшица на Q с постоянной $2\varkappa$, т.е. для любых двух точек (u_1,v_1), $(u_2,v_2) \in Q$

$$|F(u_2,v_2) - F(u_1,v_1)| \leqslant 2\varkappa\,|(u_2,v_2) - (u_1,v_1)| = \\ = 2\varkappa\sqrt{(u_2-u_1)^2 + (v_2-v_1)^2}. \qquad (2)$$

Доказательство. Пусть $(x_i,y_i) = F(u_i,v_i)$, $i = 1,2$. Тогда в силу теоремы Лагранжа о конечных приращениях

$$|x_2 - x_1| = |x\,[u_1 + t(u_2-u_1), \quad v_1 + t(v_2-v_1)]|_{t=0}^1\,| = \\ = \left|x'_u(\tilde u,\tilde v)(u_2-u_1) + x'_v(\tilde u,\tilde v)(v_2-v_1)\right| \leqslant \\ \leqslant \sqrt{2}\varkappa\sqrt{(u_2-u_1)^2 + (v_2-v_1)^2}.$$

Аналогично

$$|y_2 - y_1| \leqslant \sqrt{2}\varkappa\sqrt{(u_2-u_1)^2 + (v_2-v_1)^2}.$$

Из двух последних оценок следует (2).

Лемма 2.5. *Пусть ограниченное множество $E \subset \overline{E} \subset G$,*

$$Q := \{(u,v) : u_0 \leqslant u \leqslant u_0 + h, \quad v_0 \leqslant v \leqslant v_0 + h\} \subset G.$$

Тогда:

1°. $\partial F(E) = F(\partial E)$,

2°. $F(Q)$ — *замкнутое измеримое множество,*

3°. *Если $\mu E = 0$, то $\mu F(E) = 0$,*

4°. *Если E — измеримо, то $F(E)$ измеримо.*

---

*) Используется лишь при доказательстве теоремы 3.3

Доказательство. В силу теоремы о локальном взаимно однозначном соответствии для точек $(\overline{u},\overline{v}) \in G$ и $(\overline{x},\overline{y}) = F(\overline{u},\overline{v})$ существуют окрестности, находящиеся во взаимно однозначном соответствии, причем эти окрестности можно брать сколь угодно малыми по диаметру. Следовательно, точки $(\overline{u},\overline{v})$ и $(\overline{x},\overline{y})$ лишь одновременно могут являться внутренними, или граничными, или предельными точками соответственно для E и $F(E)$. Отсюда следует утверждение 1° леммы и замкнутость множества $F(Q)$. Ограниченность $F(Q)$ следует из теоремы Вейерштрасса об ограниченности непрерывной функции, примененной к $x(u,v)$, $y(u,v)$. Заметим, что $\partial F(Q) = F(\partial Q)$ состоит из четырех гладких кривых. Поэтому $\mu\partial F(Q) = 0$. В силу критерия измеримости $F(Q)$ измеримо и свойство 2° установлено.

Свойства 3° и 4° будут использованы лишь при доказательстве теоремы 3.3

Установим свойство 3°. Покажем, что $\mu F(E) = 0$. Заметим, что $S_k^* = S_k^*(E) \subset G$ для всех k, больших некоторого k_0, в силу положительности расстояния между замкнутыми множествами $\overline{E}$ и $\mathbb{R}^2 \backslash G$. Пусть

$$\kappa := \max_{S_{k_0}^*} \max\left\{|x_u'|, x_v'|, |y_u'|, |y_v'|\right\}.$$

В силу (2) образ каждого из составляющих S_k^* квадратов содержится в квадрате в 4κ раз сторонами, параллельными координатным осям. Поэтому при $k \geqslant k_0$

$$\mu^* F(E) \leqslant \mu^* F(S_k^*) \leqslant 16\kappa^2 \mu S_k^*.$$

Правая часть неравенства стремится к нулю при $k \to \infty$, откуда следует, что $\mu F(E) = 0$.

Свойство 4° следует из ограниченности $F(E) \subset F(\overline{E})$, вытекающей из теоремы Вейерштрасса, свойств 1°,3° и критерия измеримости.

Теорема 2.1 (геометрический смысл модуля якобиана отображения). *Пусть* $(u_0,v_0) \in G$, $h_0 > 0$,

$$G \supset Q_h := \{(u,v) : u_h \leqslant u \leqslant u_h + h, \quad v_h \leqslant v \leqslant v_h + h\} \ni (u_0,v_0)$$

при всех h, $0 < h \leqslant h_0$.

Тогда

$$\lim_{h\to 0} \frac{\mu F(Q_h)}{\mu Q_h} = |J(u_0,v_0)|. \tag{3}$$

Доказательство будет приведено ниже в виде следствия из теоремы 3.1 о замене переменных в интеграле. Частичное выяснение геометрического смысла модуля якобиана отображения доставляет

Лемма 2.6. *В условиях теоремы 2.1 при* $h \to 0$

$$\mu F(Q_h) \leqslant |J(u_0,v_0)|\mu Q_h + o(h^2). \tag{4}$$

Доказательство. Поясним, что точка (u_0,v_0) необязательно является центром Q_h. Отображение F дифференцируемо, поэтому

$$F: \begin{cases} x = x_0 & +a_{11}(u-u_0) + a_{12}(v-v_0)+ \\ & +\varepsilon_1(u-u_0, v-v_0)\sqrt{(u-u_0)^2+(v-v_0)^2}, \\ y = y_0 & +a_{21}(u-u_0) + a_{22}(v-v_0)+ \\ & +\varepsilon_2(u-u_0, v-v_0)\sqrt{(u-u_0)^2+(v-v_0)^2}, \end{cases}$$

где $a_{11} = x'_u(u_0,v_0)$, $a_{12} = x'_v(u_0,v_0)$, $a_{21} = y'_u(u_0,v_0)$, $a_{22} = y'_v(u_0,v_0)$, $\varepsilon_i(u-u_0,v-v_0) \to 0$ при $(u,v) \to (u_0,v_0)$.

Сравним F с линейным отображением

$$\hat{F}: \begin{cases} x = \hat{x}(u,v) = x_0 + a_{11}(u-u_0) + a_{12}(v-v_0), \\ y = \hat{y}(u,v) = y_0 + a_{21}(u-u_0) + a_{22}(v-v_0). \end{cases}$$

Из аналитической геометрии известно, что

$$\frac{\mu \hat{F}(Q_h)}{\mu Q_h} = \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix} \right\| = |J(u_0,v_0)|.$$

Сравним параллелограмм $\hat{F}(Q_h)$ и криволинейный параллелограмм $F(Q_h)$. Положим

$$\varepsilon(h) := \sup_{\substack{|u-u_0|\leqslant h \\ |v-v_0|\leqslant h}} \max\left\{|\varepsilon_1|,|\varepsilon_2|\right\}, \quad \varepsilon(h) \to 0 \text{ при } h \to 0.$$

Тогда для $(u,v) \in Q_h$

$$|x(u,v) - \hat{x}(u,v)| \leqslant \varepsilon(h)\sqrt{2}h, \quad |y(u,v) - \hat{y}(u,v)| \leqslant \varepsilon(h)\sqrt{2}h.$$

Отсюда, очевидно, следует, что:

$$F(Q_h) \subset U_{3\varepsilon(h)h}\left(\hat{F}(Q_h)\right). \tag{5}$$

Поэтому
$\mu F(Q_h) \leqslant \mu U_{3\varepsilon(h)h}\left(\hat{F}(Q_h)\right) \leqslant$
$\leqslant \mu\hat{F}(Q_h) + o(h^2) =$
$= |J(u_0,v_0)|h^2 + o(h^2)$, и (4) установлено (см. рис. 1).

<ins>Замечание</ins>. Оценка (4) и ее доказательство сохраняются и при $J(u_0,v_0) = 0$, если в левой части (4) вместо $\mu F(Q_h)$ написать $\mu^* F(Q_h)$.

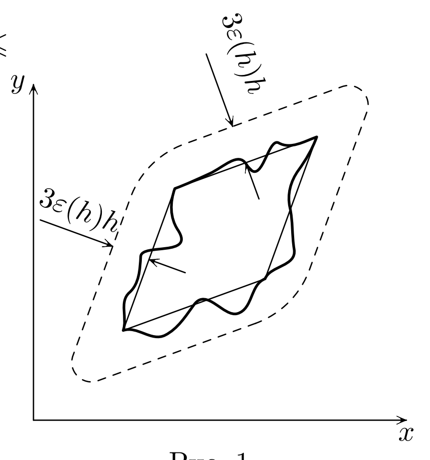


Рис. 1.

§ 3. Замена переменных в кратном интеграле

Теорема 3.2. *Пусть*

$$F : \begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$$

— отображение открытого измеримого множества $G \subset \mathbb{R}^2_{uv}$ на открытое измеримое множество $G^* \subset \mathbb{R}^2_{xy}$:

$$\mathbb{R}^2_{u,v} \supset \underset{\substack{\text{откр.}\\ \text{измер.}}}{G} \overset{F}{\rightrightarrows} \underset{\substack{\text{откр.}\\ \text{измер.}}}{G^*} \subset \mathbb{R}^2_{x,y},$$

со свойствами:

1°. *F взаимно однозначно отображает G на G^*,*
2°. *F непрерывно дифференцируемо на G,*
3°. *$J(u,v) = \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \neq 0$ на G,*
4°. *F,J непрерывно продолжимы на $\overline{G}$,*
5°. *функция f непрерывна на G^* и непрерывно продолжима на $\overline{G}^*$.*

Тогда

$$\iint\limits_{G^*} f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_{G} f[x(u,v),\, y(u,v)] \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| du\,dv\,. \qquad (1)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обе части (1) существуют в силу непрерывности подынтегральных выражений на замыканиях измеримых множеств интегрирования.

Будем считать до конца доказательства, что $f > 0$ на G^*. Это ограничение не снижает общности. В самом деле, если

$$M > \sup_{G^*} |f|, \quad f(x) = f_1(x) - f_2(x),$$

где

$$f_1(x) = f(x) + M > 0, \quad f_2(x) = M > 0,$$

и (1) установлено для f_1 и f_2, то оно оказывается верным и для $f = f_1 - f_2$.

1-й шаг. Покажем, что

$$\iint f(x,y)\,dx\,dy \leqslant \iint f[x(u,v),y(u,v)]|J(u,v)|\,du\,dv, \qquad (2)$$

где $Q = \{(u,v) : u_1 \leqslant u \leqslant u_1 + h, v_1 \leqslant v \leqslant v_1 + h\} \subset G$, $Q^* = F(Q)$. Рассуждая от противного, предположим, что равенство (2) нарушено, т.е. при некотором $\varepsilon_0 > 0$

$$\int\limits_{F(Q)}\int f(x,y)\,dx\,dy \geqslant (1+\varepsilon_0)\iint\limits_{G} f[x(u,v),y(u,v)] \times |J(u,v)|\,du\,dv\,. \qquad (3)$$

Разобьем G на 4 равных замкнутых квадрата. Обозначим через $Q^{(1)}$ тот из них, для которого (при $k = 1$)

$$\int\limits_{F(Q^{(k)})}\int f(x,y)\,dx\,dy \geqslant (1+\varepsilon_0)\iint\limits_{Q^{(k)}} [x(u,v),\, y(u,v)]|J(u,v)|\,du\,dv\,. \qquad (4)$$

Такой квадрат $Q^{(1)}$ существует : предположив противное и сложив 4 неравенства, противоположных неравенству типа (4) при $k = 1$, входим в противоречие с (3). Разобьем $Q^{(1)}$ на 4 равных замкнутых квадрата и обозначим через $Q^{(2)}$ тот из них, для которого выполняется (с $k = 2$) неравенство (4). Продолжая деление, получим систему вложенных квадратов $\left\{Q^{(k)}\right\}_1^\infty$ со свойством (4). В силу принципа вложенных отрезков (таковыми являются проекции $Q^{(k)}$) существует точка $(u_0,v_0) \in Q^{(k)}$ при всех k. Из (4) в силу теоремы о среднем для интеграла имеем

$$f(\tilde{x}_k,\tilde{y}_k)\mu F(Q^{(k)}) \geqslant$$
$$\geqslant (1+\varepsilon_0) f[x(\overline{u}_k,\overline{v}_k),\, y(\overline{u}_k,\overline{v}_k)]|J(\overline{u}_k,\overline{v}_k)|\mu Q^{(k)}.$$

Оценивая $\mu F(Q^{(k)})$ с помощью леммы 2.3, при $k \to \infty$ имеем

$$[f(x_0,y_0) + o(1)]\,[|J(u_0,v_0)| + o(1)] \geqslant$$
$$\geqslant (1+\varepsilon_0)\,[f(x_0,y_0) + o(1)]\,[|J(u_0,v_0)| + o(1)]\,,$$

что неверно при $f > 0$, $|J| > 0$. Этим неравенство (2) установлено.

2-й шаг. Пусть $S_k = S_k(G)$ — внутреннее замкнутое ступенчатое тело для G. В силу аддитивности интеграла по множествам интегрирования почленным сложением нескольких неравенств вида (2) получаем, что

$$\int\!\!\int\limits_{F(S_k)} f(x,y)\,dx\,dy \leqslant \iint\limits_{S_k} f[x(u,v),\,y(u,v)]|J(u,v)|\,du\,dv\,. \qquad (5)$$

3-й шаг. Установим неравенство

$$\iint\limits_{G^*} f(x,y)\,dx\,dy \leqslant \iint\limits_{G} f[x(u,v),\,y(u,v)]|J(u,v)|\,du\,dv\,. \qquad (6)$$

Для этого заменим правую часть неравенства (5) правой частью (6) и перейдем к пределу при $k \to \infty$. Остается показать лишь, что пределом левой части (5) является левая часть (6). В силу ограниченности подынтегральной функции некоторой постоянной M разность левых частей (6) и (5) не превосходит

$$M\mu\,(G^*\backslash F(S_k)) = M\,[\mu G^* - \mu F(S_k)]\,,$$

и вопрос сводится к доказательству того, что

$$\mu F(S_k) \to \mu G^* \text{ при } k \to \infty. \qquad (7)$$

Для этого достаточно показать, что для каждого m

$$S_m(G^*) \subset F\,(S_k(G)) \subset G^*, \quad \forall k \geqslant k(m), \qquad (8)$$

и учесть, что

$$\mu S_m(G^*) \to \mu G^* \quad (m \to \infty)$$

в силу измеримости G^*.

Для обоснования левого включения (8) заметим, что оно равносильно включению

$$F^{-1}[S_m(G^*)] \subset S_k(G), \quad \forall k \geqslant k(m). \tag{9}$$

Левая часть (9) в силу леммы 2.2 есть ограниченное замкнутое подмножество множества G. Оно удалено от замкнутого множества $\mathbb{R}^2 \backslash G$ на положительное расстояние $\rho = \rho(m) > 0$ (в силу положительности расстояния между двумя замкнутыми непересекающимися множествами, из которых одно ограничено). Следовательно, (9) выполняется при всех k таких, что $\sqrt{\lambda} \cdot 10^{-k} < \rho$.

4-й шаг. Установим равенство (1). Применим доказанное неравенство (6) к обратному отображению F^{-1} (якобиан которого $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)^{-1} = \frac{1}{J(u,v)}$ ограничен на FS_k) и к функции $g(u,v) := f[x(u,v), y(u,v)]|J(u,v)|$. Имеем

$$\iint\limits_{S_k} f[x(u,v), y(u,v)] \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv \leqslant \iint\limits_{F(S_k)} f(x,y)\,dx\,dy. \tag{10}$$

Из (10) предельным переходом при $k \to \infty$, как и на третьем шаге, получаем неравенство, противоположное неравенству (6). Из него и из (6) следует (1). Теорема доказана.

Замечание. Теорема 3.1 справедлива и при более общих условиях: вместо условия 4° достаточно предположить, что произведение $f[x(u,v), y(u,v)]|J(u,v)|$ непрерывно продолжимо на $\overline{G}$. Для обоснования в равенстве (1), написанном для S_k и $F(S_k)$ вместо соответственно G и G^*, следует перейти к пределу при $k \to \infty$.

Следствие 1. *В условиях теоремы 3.1*

$$\mu G^* = \iint\limits_{G^*} 1\,dx\,dy = \iint\limits_{G} \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv\,. \qquad (11)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 3.2. Применим (11) к Q_h. По теореме о среднем для интеграла имеем

$$\mu F(Q_h) = |J(\tilde u_h,\tilde v_h)|\,\mu Q_h, \quad G_h \ni (\tilde u_h,\tilde v_h) \to (u_0,v_0) \quad \text{при} \quad h \to 0.$$

Отсюда следует утверждение теоремы 2.1

Теорема 3.3. *Пусть выполнены условия* 1°, 2°, 3° *теоремы 3.1 и, кроме того,* f *ограничена на* G^*, *произведение*

$$f[x(u,v),y(u,v)]J(u,v) \text{ ограничено на } G.$$

Тогда, если существует один из интегралов в (1), то существует и другой, и справедливо равенство (1).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим для определенности лишь случай, когда существует интеграл из правой части (1).

Будем считать, что $f \geqslant 0$, так как общий случай функции f произвольного знака немедленно сводится к этому с помощью представления $f = f_+ - f_-$, где $f_+ = \frac{1}{2}(|f| + f) \geqslant 0$ и $f_- = \frac{1}{2}(|f| - f) \geqslant 0$. Покажем, что существует интеграл из левой части (2) и справедливо неравенство (2). Из ограниченности $|J|^{-1}$ на Q и существования интеграла в правой части (2) следует существование интеграла $\iint\limits_G \tilde f(u,v)\,du\,dv$, где

$$\tilde f(u,v) := f[x(u,v),y(u,v)] = \tilde f|J| \cdot \frac{1}{|J|}\,.$$

Пусть

$$\tau = \tau(Q) = \{D_i\}_1^{i_\tau}\,, \quad \tau^* = \tau^*(Q^*) = \{D_i^*\}_1^{i_\tau} = \{F(D_i)\}_{i=1}^{i_\tau} \quad (12)$$

— разбиения соответственно Q и Q^*. В силу леммы 2.1, примененной к отображению F^{-1}, $\mathrm{diam} D_i \leqslant K \mathrm{diam} D_i^*$ при некоторой постоянной K, откуда

$$|\tau| \leqslant K|\tau^*|. \tag{13}$$

Пусть, далее, $\omega(\tilde{f},D_i)$, $\omega(f,D_i^*)$ — колебания функций $\tilde{f},f$ соответственно на D_i,D_i^*. Тогда

$$\sum_{i=1}^{i_\tau} \omega(f,D_i^*)\mu D_i^* = \sum_{i=1}^{i_\tau} \omega(\tilde{f},G_i) \iint\limits_{D_i} |J(u,v)|\,du\,dv \leqslant$$

$$\leqslant \max_Q |J| \sum_{i=1}^{i_\tau} \omega(\tilde{f},D_i)\mu D_i \to 0$$

при $|\tau^*| \to 0$, поскольку при этом в силу (13) и $|\tau| \to 0$.

В силу критерия интегрируемости существует интеграл в левой части (2). Установим теперь само неравенство (2). Воспользуемся разбиениями (12), в которых будем считать замкнутыми множества $D_i = \overline{D}_i$. Пусть в точке (u_i,v_i) достигается

$$\max_{D_i} |J| = |J(u_i,v_i)|, \quad x_i = x(u_i,v_i), \quad y_i = y(u_i,v_i).$$

Тогда

$$\sum_{i=1}^{i_\tau} f(x_i,y_i)\mu D_i^* = \sum_{i=1}^{i_\tau} f(x_i,y_i) \iint\limits_{D_i} |J(u,v)|\,du\,dv \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{i_\tau} f[x(u_i,v_i), \quad y(u_i,v_i)]|J(u_i,v_i)|\mu D_i.$$

Переходя к пределу в этом неравенстве для сумм Римана при $|\tau| \to 0$ (а, значит, и $|\tau^*| \to 0$), приходим к неравенству (2).

Оставшаяся часть доказательства теоремы 3.2 повторяет соответствующую часть доказательства теоремы 3.1, если использовать свойство полной аддитивности интеграла по множествам в более общей форме. Сформулируем его в виде леммы.

Лемма 3.7. *Пусть G, G_i — измеримые множества n-мерного евклидова пространства, $G_1 \subset G_2 \subset \ldots \subset G$, $\mu(G \setminus G_i) \to 0$ при $i \to \infty$. Пусть функция f ограничена на G и интегрируема на любом G_i.*

Тогда f интегрируема на G и

$$\lim_{i\to\infty} \int\limits_{G_i} f\,dx = \int\limits_{G} f\,dx.$$

Доказательство леммы предоставляется читателю.

§ 4. Обобщения на n-мерный случай

В этом параграфе через $F: x = x(t)$ обозначим отображение

$$\mathbb{R}^n_t \supset \underset{\text{откр.}}{G} \overset{F}{\rightleftarrows} \underset{\text{откр.}}{G^*} \subset \mathbb{R}^n_x$$

открытого множества G евклидова пространства $\mathbb{R}^n_t$ на открытое множество $G^* \subset \mathbb{R}^n_x$ со свойствами:

1°. F взаимно однозначно отображает G на G^*;

2°. F непрерывно дифференцируемо на G;

3°. $J(t) = \dfrac{\partial(x_1, \ldots, x_n)}{\partial(t_1, \ldots, t_n)} \neq 0$ на G.

Теорема 4.4. *Пусть выполнены условия* 1°, 2°, 3°, $t^{(\circ)} \in G$, $G \supset Q_h = \{t : t_i^{(h)} \leqslant t_i \leqslant t_i^h + h,\ \ i = 1,2,\ldots,n\} \ni t^{(\circ)},\ \ 0 < h \leqslant h_0$.

Тогда

$$\lim_{h \to 0} \frac{\mu F(Q_h)}{\mu Q_h} = |J(t^{(\circ)})|$$

Теорема 4.5. *Пусть выполнены условия* 1°,2°,3°,G,G^* *— открытые измеримые множества, функция* f *ограничена на* G^*,$f(x(t))J(t)$ *ограничена на* G.

Тогда

$$\int\limits_{G^*} f(x)\,dx = \int\limits_{G} f[x(t)]|J(t)|\,dt,$$

если хотя бы один из этих интегралов существует.

Следствие 2. *Пусть выполнены условия* 1°,2°,3°,G,G^* *— открытые измеримые множества, якобиан* J *ограничен на* G. *Тогда*

$$\mu G^* = \int\limits_{G^*} dx = \int\limits_{G} |J(t)|\,dt,$$

Доказательства теорем и следствия аналогичны приведенным выше для случая $n = 2$.

§ 5. Геометрический смысл знака якобиана отображения

Для двух векторов

$$\vec{a} = a_1 i + a_2 j$$
$$\vec{b} = b_1 i + b_2 j$$

из формулы

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} (i \times j)$$

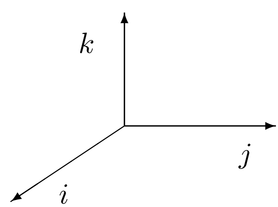


Рис. 2.

видно, что

$$\operatorname{sgn}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

показывает направление кратчайшего поворота от первого вектора ко второму. Именно при

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} > 0 \quad [< 0]$$

кратчайший поворот от $\vec{a}$ к $\vec{b}$ производится в плоскости i,j против [по] часовой стрелки.

Пусть задано взаимно однозначное непрерывно дифференцируемое отображение

$$F : \begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$$

области G плоскости (u,v), содержащей две пересекающиеся гладкие ориентированные кривые, на область в плоскости (x,y)

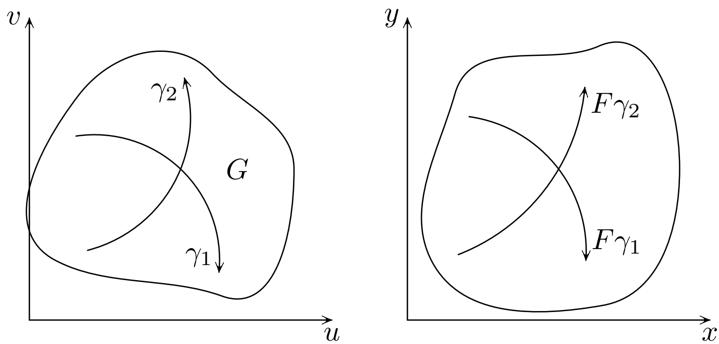


Рис. 3

$$\begin{aligned}
\gamma_1 \quad &= \{(u,v) : u = u_1(t), v = v_1(t)\},\\
\gamma_2 \quad &= \{(u,v) : u = u_2(t), v = v_2(t)\},\\
F\gamma_1 &= \{(x,y) : x = x_1(t), y = y_1(t)\},\\
F\gamma_2 &= \{(x,y) : x = x_2(t), y = y_2(t)\},
\end{aligned}$$

где

$$x_1(t) := x(u_1(t),v_1(t)), y_1(t) := y(u_1(t),v_1(t)),$$
$$x_2(t) := x(u_2(t),v_2(t)), y_2(t) := y(u_2(t),v_2(t)).$$

Будем считать, что в точке пересечения кривых γ_1 и γ_2 значение параметров $t = t_0$. Сравним направление кратчайшего поворота касательного вектора к γ_1 до касательного вектора к γ_2 в точке пересечения кривых с соответствующим направлением для их образов $F\gamma_1, F\gamma_2$. Преобразуем для этого векторное произведение касательных векторов.

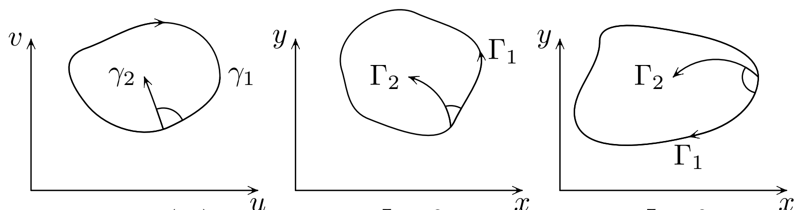
$$\begin{vmatrix} \dfrac{dx_1}{dt} & \dfrac{dx_2}{dt} \\ \dfrac{dy_1}{dt} & \dfrac{dy_2}{dt} \end{vmatrix} (i \times j) = \left(\frac{dx_1}{dt} i + \frac{dy_1}{dt} j\right) \times \left(\frac{dx_2}{dt} i + \frac{dy_2}{dt} j\right) =$$
$$= [(x'_u u'_1 + x'_v v'_1)i + (y'_u u'_1 + y'_v v'_1)j] \times [(x'_u u'_2 + x'_v v'_2)i +$$
$$+ (y'_u u'_2 + y'_v v'_2)j] = (x'_u u'_1 y'_v v'_2 + x'_v v'_1 y'_u u'_2)(i \times j) -$$
$$- (x'_u u'_2 y'_v v'_1 + x'_v v'_2 y'_u u'_1)(i \times j) =$$
$$= (x'_u y'_v - x'_v y'_u)(u'_1 v'_2 - v'_1 u'_2)(i \times j).$$

Здесь было учтено, что $j \times i = -i \times j$. Сравнивая коэффициенты при $i \times j$ в левой и правой частях цепочки равенств, получаем

$$\begin{vmatrix} \dfrac{dx_1}{dt} & \dfrac{dx_2}{dt} \\ \dfrac{dy_1}{dt} & \dfrac{dy_2}{dt} \end{vmatrix} = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \begin{vmatrix} u'_1 & u'_2 \\ v'_1 & v'_2 \end{vmatrix}.$$

По столбцам определителей стоят координаты касательных векторов к γ_1 и γ_2 (правый определитель) и к $F\gamma_1$ и $F\gamma_2$ (левый определитель). Сравнивая знаки этих определителей, приходим к выводу: при $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} > 0$ $[< 0]$ направление кратчайшего поворота от первого касательного вектора ко второму после отображения сохраняется [меняется на противоположное].

Пусть теперь гладкая кривая γ_1 является частью границы некоторой области Ω, замыкание которой содержится в G. Пусть γ_1 ориентирована положительно относительно Ω. Сравним ориентацию γ_1 относительно Ω и ориентацию $\Gamma_1 = F(\gamma_1)$ относительно $F(\Omega)$. Возьмем кривую γ_2, пересекающую γ_1, с касательным вектором в точке пересечения, направленным по нормали к γ_1 внутрь Ω. Из предыдущего видно, что возможны случаи:



$\Gamma_i = F(\gamma_i)$ $\qquad$ $J > 0$ $\qquad$ $J < 0$

Рис. 4

Тем самым приходим к окончательной формулировке. Геометрический смысл знака якобиана состоит в следующем.

При положительном якобиане сохраняется после отображения направление кратчайшего поворота от одной из пересекающихся кривых до другой, а также ориентация кривой, являющейся частью границы области Ω, относительно Ω.

При отрицательном якобиане указанные направления кратчайшего поворота и ориентация относительно области меняется на противоположные.

§ 6. Условный экстремум

Пусть на открытом множестве $G \subset \mathbb{R}^n$ заданы функции $f,\varphi_1,\ldots,\varphi_m$ $(1 \leqslant m < n)$. Уравнения

$$\{\varphi_j(x) = 0\}_{j=1}^{m} \tag{1}$$

будем называть уравнениями связи. Пусть $E := \{x : x \in G,\varphi_j(x) = 0,1 \leqslant j \leqslant m\}$.

Определение 1. Точка $x^\circ \in E$ называется точкой условного минимума [строго условного минимума] функции f при связях (1), если $\exists \delta > 0$, при котором

$$f(x^\circ) \leqslant f(x) \quad [f(x^\circ) < f(x)]$$

для $\forall x \in \ E \cap \overset{\circ}{U}_\delta(x^\circ)$.

Аналогично определяется точка условного максимума [строго условного максимума], условного экстремума [строго условного экстремума].

Замечание о терминологии. Вместо термина «условный» употребляется также термин «относительный». Ради краткости вместо «при связях (1)» , будем писать «при (1)».

З а д а ч а. $G = \mathbb{R}^2, f(x_1,x_2) = x_1^2 + x_2^2, m = 1, \varphi(x_1,x_2) = x_1 + x_2 - 1$. Найти условный экстремум функции f при $x_1 + x_2 - 1 = 0$.

Решение. На прямой $\varphi = 0$ $f(x_1,x_2) = f(x_1,1-x_1) = 2x_1^2 - 2x_1 + 1 = 2\left(x_1 - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}$. Следовательно, точка $\left(\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\right)$ является точкой строго условного минимума.

В дальнейшем будем считать, что $f,\varphi_1,\ldots,\varphi_m$ — непрерывно дифференцируемы на G, $\operatorname{rang}\left\|\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\right\| = m$ на $G, x^\circ \in$

$\in E$, $\left.\dfrac{\partial(\varphi_1,\ldots,\varphi_m)}{\partial(x_1,\ldots,x_m)}\right|_{x_0} \neq 0$. Тогда по теореме о системе неявных функций в некоторой окрестности $U(x^\circ)$ $\quad (1) \Longleftrightarrow (1')$, где

$$\{x_j = \mu_j(x_{m+1},\ldots,x_n)\}_{j=1}^m, \tag{1'}$$

причем μ_j — непрерывно дифференцируемы

$$\{\varphi_j(\mu_1(x_{m+1},\ldots,x_n),\mu_2(),\ldots,\mu_m(),x_{m+1},\ldots,x_n) = 0\}_{j=1}^m. \tag{2}$$

Отметим эквивалентность систем линейных уравнений относительно дифференциалов: $(3) \Longleftrightarrow (3')$, где

$$\left\{\sum_{i=1}^n \frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\, dx_i = 0\right\}_{j=1}^m, \tag{3}$$

$$\left\{dx_j = \sum_{i=m+1}^n \frac{\partial\mu_j}{\partial x_i} dx_i\right\}_{j=1}^m, \tag{3'}$$

с коэффициентами, взятыми в точке x°. В самом деле, при любых фиксированных $dx_{m+1},\ldots,dx_n$ решение (3) единственно, так как ее определитель отличен от нуля; решение $(3')$ также, очевидно, единственно. В то же время решение $(3')$ удовлетворяет (3), так как результат подстановки решения $(3')$ в (3) совпадает с дифференцированием тождеств (2).

Определение 2. Через $\widehat{dx_1}, \ldots, \widehat{dx_n}$ будем обозначать дифференциалы, удовлетворяющие системам (3), $(3')$.

Определение 3. Точка $x^\circ \in E$ называется условно стационарной точкой функции f при (1), если $\widehat{df} := \sum\limits_{i=1}^n \dfrac{\partial f}{\partial x_i}\, \widehat{dx_i} = 0$.

Теорема 6.6 (Необходимое условие условного экстремума). *Точка x° условного экстремума f при (1) является условно стационарной точкой f при (1).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Введем функцию

$$\Phi(x_{m+1},\ldots,x_n) :=$$
$$:= f(\mu_1(x_{m+1},\ldots,x_n),\mu_2(),\ldots,\mu_m(),x_{m+1},\ldots,x_n).$$

Имеем

$[x^\circ$ — точка условного экстремума f при (1)$] \iff$ $\iff [(x^\circ_{m+1},\ldots,x^\circ_n)$ — точка (абсолютного) экстремума функции $\Phi] \Longrightarrow [d\Phi = 0] \iff \left[0 = \sum\limits_1^n \frac{\partial f}{\partial x_i}\,dx_i\Big|_{(1')} = \sum\limits_1^n \frac{\partial f}{\partial x_i}\,dx_i\Big|_{(3')} = \right.$ $\left. = \sum\limits_1^n \frac{\partial f}{\partial x_i}\,\widehat{dx_i} =: \widehat{df}\right]$, что и требовалось доказать. Отметим, что при доказательстве была использована инвариантность формы первого дифференциала.

Теорема 6.7 (метод множителей Лагранжа). *Точка $x^\circ \in$ $\in E$ является условно стационарной точкой функции f при (1) тогда и только тогда, когда существуют числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ такие, что x° является стационарной точкой функции Лагранжа*

$$F(x) := f(x) - \sum_1^m \lambda_j \varphi_j(x).$$

При этом числа λ_j определяются однозначно.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим систему из $(m+1)$-го уравнения

$$\left.\begin{array}{c} \left\{\sum\limits_{i=1}^n \dfrac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\,dx_i = 0\right\}_{j=1}^m \\ \sum\limits_{i=1}^n \dfrac{\partial f}{\partial x_i}\,dx_i = 0 \end{array}\right\}. \tag{3*}$$

Имеем

$[x^\circ$ — условно стационарная точка f при (1)$] \iff [\widehat{df} = 0] \iff$

$$\iff [(3) \Longrightarrow (df = 0)] \iff [\mathrm{rang}(3) = \mathrm{rang}(3^*) = m] \iff$$

$$\iff\left[\exists\lambda_1,\ldots,\lambda_m:\left(\frac{\partial f}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)=\sum_{j=1}^{m}\lambda_j\left(\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_n}\right)\right]\iff$$
$$\iff\left[\operatorname{grad} f=\sum_{j=1}^{m}\lambda_j\operatorname{grad}\varphi\right]\iff[\operatorname{grad} F=0].$$

Следствие 3 (Необходимое условие условного экстремума). *Точка x° условного экстремума f при (1) является стационарной точкой функции Лагранжа F.*

Достаточные условия условного экстремума.

Дополнительно будем считать, что $f,\varphi_1,\ldots,\varphi_m$ дважды непрерывно дифференцируемы в некоторой окрестности точки x°, где x° — условно стационарная точка f при (1), т.е. стационарная точка функции Лагранжа из E. Пусть $\delta>0$ достаточно мало,

$$x\in E\cap U_\delta(x^\circ)\Longrightarrow\Phi(x_{m+1},\ldots,x_n)=f(x)|_{(1')}=$$
$$=\left(f(x)-\sum_{j=1}^{n}\lambda_j\varphi_j(x)\right)\Bigg|_{(1')}=:F(x)\Bigg|_{(1')}.$$

Вычислим $d\Phi$, $d^2\Phi$ в точке x°, считая x_{m+1}, …, x_n независимыми переменными.

$$d\Phi=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial x_i}\,dx_i\Bigg|_{(1')},$$
$$d^2\Phi=\sum_{i,k=1}^{n}\frac{\partial^2 F}{\partial x_i\partial x_k}\,dx_i\,dx_k\Bigg|_{(1')}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial x_i}\,d^2x_i\Bigg|_{(1')}=$$
$$=\sum_{i,k}^{n}\frac{\partial^2 F}{\partial x_i\partial x_k}\,\widehat{dx_i}\widehat{dx_k}\,.$$

Следовательно, существенно поведение квадратичной формы
$$\widehat{d^2F} := \sum_{i,k=1}^{n} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_k}\, \widehat{dx_i}\widehat{dx_k}\ .$$

Вспоминая достаточные условия (абсолютного) экстремума, приходим к следующей теореме.

Теорема 6.8 (Достаточные условия строгого условного экстремума). *Пусть $f,\varphi_1,\ldots,\varphi_m$ дважды непрерывно дифференцируемы в некоторой окрестности стационарной точки x° функции Лагранжа F.*

Тогда:

1) $d^2F > 0[< 0]$ *при* $|dx| > 0 \Longrightarrow x^\circ$ *— точка строгого условного минимума [максимума] f при (1);*
2) $d^2F > 0[< 0]$ *при* $|\ \widehat{dx}\ | > 0 \Longrightarrow x^\circ$ *— точка строгого условного минимума [максимума] f при (1);*
3) d^2F *— неопределенная квадратичная форма $\Longrightarrow$ ничего сказать нельзя;*
4) $\widehat{d^2F}$ *— неопределенная квадратичная форма $\Longrightarrow$ в точке x° — нет условного экстремума.*

План исследования функции на условный экстремум методом множителей Лагранжа.

Пусть функции $f,\varphi_1,\ldots,\varphi_m$ $(1 \leqslant m < n)$ непрерывно дифференцируемы на открытом множестве $G \subset \mathbb{R}^n$, $\operatorname{rang}\left\|\dfrac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\right\| = m$ на G. Для нахождения точек условного экстремума функции f при связях (1) поступают так:

1°. Составляют функцию Лагранжа:
$$F(x) := f(x) - \sum_{1}^{m} \lambda_j \varphi_j(x).$$

2°. Находят стационарные точки функции Лагранжа, лежащие на E (только они могут являться точками условного экстремума), т.е. решают систему $n+m$ уравнений

$$\left.\begin{array}{c} \left\{\dfrac{\partial}{\partial x_i}\,F(x)=0\right\}_1^n \\ \\ \{\varphi_j(x)=0\}_1^m \end{array}\right\}$$

относительно $n+m$ неизвестных $x_1,x_2,\ldots,x_n,\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m$. В каждой из этих точек множители Лагранжа находятся однозначно

Отметим, что система $\{\varphi_j(x)=0\}_1^m$ формально может быть записана в виде $\left\{\dfrac{\partial}{\partial\lambda_j}\,F(x)=0\right\}_1^m$.

3°. Для каждой стационарной точки x° функции Лагранжа, в окрестности которой $f,\varphi_1,\ldots,\varphi_m$ дважды непрерывно дифференцируемы, составляют d^2F и, если потребуется, $\widehat{d^2F}$. Применяют теорему 6.3 для выяснения типа условного экстремума.

4°. Находят значения функции f в точках условного экстремума.

З а д а ч а . Найти точки условного экстремума функции $f(x,y,z)=xyz$, если $x^2+y^2+z^2=1,\ x+y+z=0$.

Р е ш е н и е. Здесь $\varphi_1(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-1,\ \varphi_2(x,y,z)= = x+y+z$. В качестве G можно взять, например,

$$G=\left\{(x,y,z):|\varphi_j(x,y,z)|<\frac{1}{2},\ j=1,2\right\}.$$

Для функции Лагранжа

$$F(x,y,z)=xyz-\lambda_1(x^2+y^2+z^2-1)-\lambda_2(x+y+z)$$

найдем стационарные точки, удовлетворяющие уравнениям связи, решив систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} F'_x &\equiv yz - 2\lambda_1 x - \lambda_2 = 0 \\ F'_y &\equiv xz - 2\lambda_1 y - \lambda_2 = 0 \\ F'_z &\equiv xy - 2\lambda_1 z - \lambda_2 = 0 \\ x^2 + y^2 &+ z^2 - 1 = 0 \\ x + y &+ z = 0 \end{aligned}\right\}. \tag{4}$$

Сложив первые три уравнения, в силу последнего получим

$$yz + xz + xy - 3\lambda_2 = 0. \tag{5}$$

Но $2(yz + xz + xy) = (x + y + z)^2 - (x^2 + y^2 + z^2) = 0 - 1$, и из (5) получаем $\lambda_2 = -\dfrac{1}{6}$.

Разность первых двух уравнений (4) представляется в виде $(y - x)(z + 2\lambda_1) = 0$. Аналогично получаем еще два уравнения:

$$(z - y)(x + 2\lambda_1) = 0, (x - z)(y + 2\lambda_1) = 0.$$

Из этих трех уравнений следует (в силу последних двух уравнений из (4), что

$$(y - x)(z - y)(x - z) = 0.$$

Рассмотрим для определенности лишь случай $y - x = 0$. Остальные два рассматриваются аналогично.

В рассматриваемом случае имеются две стационарные точки, удовлетворяющие уравнениям связи:

$$x = y = \pm\frac{\sqrt{6}}{6}, z = \mp\frac{\sqrt{6}}{3}; \quad \text{при этом} \quad \lambda_1 = \mp\frac{\sqrt{6}}{12}.$$

Будем исследовать их одновременно.

$$d^2F = -2\lambda_1(dx^2 + dy^2 + dz^2) + 2z\,dx\,dy + 2y\,dx\,dz +$$
$$+ 2x\,dy\,dz = \pm\frac{\sqrt{6}}{6}[dx^2 + dy^2 + dz^2 - 4\,dx\,dy + 2\,dx\,dz + 2\,dy\,dz]$$

является неопределенной квадратичной формой, т.е. принимает положительные и отрицательные значения (ср. $dx = 1, dy = dz = 0$ и $dx = dy = 1, dz = 0$).

Построим $\widehat{d^2F}$, связав в d^2F дифференциалы dx, dy, dz требованием (3):

$$\left.\begin{aligned} x\,dx + y\,dy + z\,dz = 0 \\ dx + dy + dz = 0 \end{aligned}\right\}. \tag{6}$$

В каждой из рассматриваемых двух точек $x = y$ так, что решение системы (6) $(\widehat{dx}\ , \widehat{dy}\ , \widehat{dz})$ имеет вид $(\widehat{dx}\ , -\widehat{dx}\ , 0)$. Поэтому $d^2F = \pm\dfrac{\sqrt{6}}{6}\,4\left(\widehat{dx}\right)^2$ является положительно [отрицательно] определенной квадратичной формой одного переменного.

С помощью теоремы 6.3 заключаем, что $\left(\dfrac{\sqrt{6}}{6}\ , \dfrac{\sqrt{6}}{6}\ , -\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)$ является точкой строгого условного минимума, а $\left(-\dfrac{\sqrt{6}}{6}\ , -\dfrac{\sqrt{6}}{6}\ , \dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)$ — точкой строгого условного максимума. Значение функции f в этих точках равны соответственно $\mp\dfrac{\sqrt{6}}{18}$.