Учебно-методическое пособие

ИЗБРАННЫЕ ПРИМЕРЫ И КОНТРПРИМЕРЫ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА

Р.В.Константинов

Долгопрудный, 2008

УДК 517.5

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов третьего курса факультетов ФУПМ и ФИВТ МФТИ при изучении ими курса “Функциональный анализ” в осеннем семестре. Пособие содержит ряд примеров теоретического и прикладного характера, иллюстрирующих важные определения и теоремы курса. Понимание той или иной теоремы предполагает четкое представление об использовании условий теоремы для доказательства ее утверждения и умение привести контрпример при отказе от какого-либо условия рассматриваемой теоремы. В пособии рассматриваются такие контрпримеры к ряду важных теорем. После каждого примера предлагается связанная с обсуждаемой проблематикой задача, самостоятельное решение которой приятно разнообразит чтение.

§ 1. Топологические и метрические пространства

Напомним определение топологического пространства. Пусть X — некоторое множество. Семейство τ подмножеств множества X называется топологией, если выполнены следующие свойства:

1) $X \in \tau$ и $\varnothing \in \tau$;

2) для любого семейства подмножеств $\left\{ U_\alpha \,\middle|\, \alpha \in \mathcal{A} \right\} \subset \tau$ (здесь $\mathcal{A}$ — произвольное множество индексов) выполнено включение $\bigcup\limits_{\alpha \in \mathcal{A}} U_\alpha \in \tau$;

3) для любого семейства подмножеств $\left\{ U_k \,\middle|\, k \in \overline{1, N} \right\} \subset \subset \tau$ (здесь N — произвольное натуральное число) выполнено включение $\bigcap\limits_{k=1}^{N} U_k \in \tau$.

Множество X с введенной в нем топологией τ называется топологическим пространством и обозначается (X, τ). Любое множество семейства τ называется τ-открытым (или просто открытым) в топологическом пространстве (X, τ).

Сформулируем определение базы топологии. Пусть (X, τ) — топологическое пространство. Семейство открытых подмножеств $\beta \subset \tau$ называется базой топологии τ, если любое τ-открытое множество представимо в виде объединения некоторого семейства подмножеств из β, т. е. для любого $G \in \tau$ существует семейство $\left\{ V_\alpha \in \beta \,\middle|\, \alpha \in \mathcal{A} \right\}$ (здесь $\mathcal{A}$ — некоторое множество индексов), такое, что $G = \bigcup\limits_{\alpha \in \mathcal{A}} V_\alpha$.

Существует следующий критерий базы. Пусть X — некоторое множество. Для того чтобы семейство β подмножеств множества X было базой некоторой топологии τ в X, необходимо и достаточно выполнение следующих двух условий:

а) для любого $x \in X$ существует $V \in \beta$, такое, что $x \in V$, т. е. $X = \bigcup\limits_{V \in \beta} V$;

б) для любых множеств $V_1 \in \beta$ и $V_2 \in \beta$ и любого элемента $x \in V_1 \cap V_2$ существует множество $W \in \beta$, такое, что $x \in W \subset \subset V_1 \cap V_2$.

Сформулируеым определение предбазы топологии. Пусть (X, τ) — топологическое пространство. Семейство открытых подмножеств $\sigma \subset \tau$ называется предбазой топологии τ, если совокупность всевозможных конечных пересечений множеств семейства σ образует базу топологии τ.

Существует следующий критерий предбазы. Пусть X — некоторое множество. Для того чтобы семейство σ подмножеств множества X было предбазой некоторой топологии τ в X, необходимо и достаточно, чтобы для любого $x \in X$ существовало $V \in \sigma$, такое, что $x \in V$, т. е. $X = \bigcup\limits_{V \in \sigma} V$.

Определения и основные свойства топологического пространства и базы топологии сформулированы в [3, глава II, § 5]. Определение предбазы σ сформулировано в [5, приложение А2, с. 412].

Пример 1. *Топология поточечной сходимости в пространстве числовых последовательностей.* Пусть X — множество всех числовых последовательностей, т. е. любой элемент $x \in X$ является числовой последовательностью вида $x = \{x(k)\}_{k=1}^{\infty}$. Требуется ввести в X топологию τ, такую, что сходимость по этой топологии последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \subset X$ к числовой последовательности $y \in X$ (т. е. $x_n \xrightarrow{\tau} y$ при $n \to \infty$) эквивалентна поточечной сходимости: $x_n(k) \to y(k)$ при $n \to \infty$ при каждом $k \in \mathbb{N}$. Рассмотрим для любых $x \in$

$\in X$, $k \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon > 0$ множество

$$V(x,k,\varepsilon) = \left\{ \, z \in X \;\middle|\; |x(k) - z(k)| < \varepsilon \, \right\}.$$

Объявим систему множеств

$$\sigma = \{ \, V(x,k,\varepsilon) \;\mid x \in X, \; k \in \mathbb{N}, \; \varepsilon > 0 \}$$

предбазой искомой топологии. Тогда базой β искомой топологии τ является совокупность всевозможных конечных пересечений множеств из σ. Таким образом, множество $G \in \tau$ тогда и только тогда, когда существует семейство множеств $\{ \, W_\alpha \in \beta \mid \alpha \in \mathcal{A} \}$ (здесь $\mathcal{A}$ — произвольное множество индексов), такое, что $G = \bigcup\limits_{\alpha \in \mathcal{A}} W_\alpha$. При этом включение $W_\alpha \in \beta$ означает, что существует $N_\alpha \in \mathbb{N}$, а для любого $n \in \overline{1, N_\alpha}$ существуют $x_{n,\alpha} \in X$, $k_{n,\alpha} \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon_{n,\alpha} > 0$, такие, что $W_\alpha = \bigcap\limits_{n=1}^{N_\alpha} V\left(x_{n,\alpha}, k_{n,\alpha}, \varepsilon_{n,\alpha}\right)$. Покажем, что определенная топология τ является топологией поточечной сходимости в X.

Пусть последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ сходится к $y \in X$ по топологии τ. Тогда для любого $G \in \tau$, такого, что $y \in G$, существует $N(G) \in \mathbb{N}$, что для всех $n \geq N(G)$ выполнено $x_n \in G$. Возьмем для любого $k \in \mathbb{N}$ и числа $\varepsilon > 0$ множество $G = V(y,k,\varepsilon)$. Тогда для всех $n \geq N(G)$ получаем $x_n \in V(y,k,\varepsilon)$, т. е. $|x_n(k) - y(k)| < \varepsilon$. Таким образом, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к y поточечно.

Обратно, пусть последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ сходится к $y \in X$ поточечно. Рассмотрим произвольное $G \in \tau$, такое, что $y \in G$. Тогда существует $M \in \mathbb{N}$, а для любых $m \in \overline{1, M}$ существуют $z_m \in X$, $k_m \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon_m > 0$, такие, что $y \in \bigcap\limits_{m=1}^{M} V(z_m, k_m, \varepsilon_m) \subset G$. Так как по условию для любого $m \in \overline{1, M}$ выполнено $x_n(k_m) \to y(k_m)$ при $n \to \infty$, то существует

$N_m \in \mathbb{N}$, такое, что для всех $n \geq N_m$ выполнено неравенство

$$|x_n(k_m) - y(k_m)| < \varepsilon_m - |z_m(k_m) - y(k_m)|.$$

Определим значение $N(G) = \max\limits_{m=\overline{1,M}} N_m$. Тогда для любого $n \geq N(G)$ находим, что для каждого $m \in \overline{1,M}$ выполнено неравенство

$$|x_n(k_m) - z_m(k_m)| \leq |x_n(k_m) - y(k_m)| + |y(k_m) - z_m(k_m)| < \varepsilon_m.$$

Таким образом, $x_n \in \bigcap\limits_{m=1}^{M} V(z_m, k_m, \varepsilon_m) \subset G$ для любого $n \geq$ $\geq N(G)$, т. е. последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к y по топологии τ.

Напомним определение метрики (см. также [3, глава II, § 1, с. 48]). Пусть X — некоторое множество. Функция $\rho\colon X \times$ $\times X \to \mathbb{R}$ называется метрикой в множестве X, если выполнены следующие свойства (аксиомы метрики):

1) $\rho(x, y) \geq 0$ для всех $x \in X$ и $y \in X$, а $\rho(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$;

2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ для всех $x \in X$ и $y \in X$;

3) $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(y, z)$ для всех $x \in X$, $y \in X$, $z \in X$.

Множество X с введенной в нем метрикой ρ называется метрическим пространством (X, ρ). Открытым (или ρ-открытым) шаром с центром в точке $x \in X$ радиуса $R > 0$ называется множество

$$O_R(x) = \left\{ \, y \in X \;\; \middle| \;\; \rho(x, y) < R \, \right\}.$$

Пусть β_ρ — семейство всех открытых шаров множества X, т. е.

$$\beta_\rho = \left\{ \, O_R(x) \;\; \middle| \;\; x \in X, \quad R > 0 \, \right\}.$$

Тогда семейство β_ρ является базой некоторой топологии τ_ρ в множестве X, которая называется метрической топологией.

Задача. Проверить для семейства β_ρ критерий базы.

Покажем, что определенная на рассматриваемом множестве всех числовых последовательностей X топология τ метризуема, т. е. порождается некоторой метрикой ρ, определенной на X (см. [3, глава II, § 5, с. 98]). Определим метрику на X следующим образом:

$$\rho(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{-k}\,|x(k)-y(k)|}{1+|x(k)-y(k)|} \qquad \forall\, x,y \in X.$$

Задача. Проверить для определенной функции ρ аксиомы метрики.

Покажем, что последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ поточечно сходится к элементу $y \in X$ тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, y) = 0$. Пусть для любого $k \in \mathbb{N}$ выполнено $x_n(k) \to$ $\to y(k)$ при $n \to \infty$. Определим для любого $\varepsilon > 0$ номер $M = M(\varepsilon)$, такой, что $2^{-M} < \varepsilon$. Тогда для любых $x, y \in X$ выполнено соотношение

$$\sum_{k=M+1}^{\infty} \frac{2^{-k}\,|x(k)-y(k)|}{1+|x(k)-y(k)|} \le \sum_{k=M+1}^{\infty} 2^{-k} = 2^{-M} < \varepsilon.$$

Так как существует номер $N = N(\varepsilon)$, такой, что $|x_n(k) -$ $- y(k)| < \varepsilon$ для всех $n > N$ и всех $k \in \overline{1,M}$, то получаем

$$\rho(x_n,y) \le \sum_{k=1}^{M} \frac{2^{-k}\,|x_n(k)-y(k)|}{1+|x_n(k)-y(k)|} + \varepsilon < \sum_{k=1}^{M} 2^{-k}\varepsilon + \varepsilon < 2\varepsilon.$$

Пусть теперь $\rho(x_n, y) \to 0$ при $n \to \infty$. Тогда для любого $\varepsilon \in (0,1)$ существует номер $N = N(\varepsilon)$, такой, что для всех

$n > N(\varepsilon)$ выполнено $\rho(x_n, y) < \varepsilon$. Тогда для любого $k \in \mathbb{N}$ выполнено

$$\frac{|x_n(k) - y(k)|}{1 + |x_n(k) - y(k)|} < 2^k \varepsilon.$$

Тогда при фиксированном $k \in \mathbb{N}$ и любого $n > N\left(2^{-k}\varepsilon\right)$ получаем неравенство

$$\frac{|x_n(k) - y(k)|}{1 + |x_n(k) - y(k)|} < \varepsilon, \qquad \text{т. е.} \qquad |x_n(k) - y(k)| < \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon},$$

что означает $x_n(k) \to y(k)$ при $n \to \infty$.

Теперь покажем, что топология τ поточечной сходимости в X совпадает с метрической топологией в X, порождаемой метрикой ρ. Сначала покажем, что для любого $x \in X$ и любого $\varepsilon > 0$ ρ-открытый шар $O_\varepsilon(x) = \{ \, y \in X \mid \rho(x, y) < \varepsilon \, \}$ является τ-открытым. Пусть $y \in O_\varepsilon(x)$. Требуется показать, что существует $G \in \tau$, такое, что $y \in G \subset O_\varepsilon(x)$. Пусть $\Delta = \varepsilon - \rho(x, y) > 0$. Тогда для $\delta \in \left(0, \frac{\Delta}{2}\right)$ и номера N вида $2^{-N} < \frac{\Delta}{2}$ определим $G = \bigcap\limits_{k=1}^{N} V(y, k, \delta)$. Следовательно, для любого $z \in G$ получаем $|z(k) - y(k)| < \delta$ для всех $k \in \overline{1, N}$. Отсюда находим, что

$$\rho(z, x) \le \rho(z, y) + \rho(y, x) < \\ < \sum_{k=1}^{N} 2^{-k}\delta + \sum_{k=N+1}^{\infty} 2^{-k} + \rho(y, x) < \\ < \delta + 2^{-N} + \rho(y, x) < \Delta + \rho(y, x) = \varepsilon.$$

Таким образом, любой ρ-открытый шар в X является τ-открытым, что влечет τ-открытость любого ρ-открытого множества из X.

Пусть теперь G — произвольное τ-открытое множество в X. Требуется показать, что для любого $x \in G$ существует

$\varepsilon > 0$, такое, что $O_\varepsilon(x) \subset G$. Так как $x \in G \in \tau$, то по определению τ существуют $N \in \mathbb{N}$, $z_i \in X$, $k_i \in \mathbb{N}$, $\varepsilon_i > 0$ для $i \in \overline{1,N}$, такие, что $x \in \bigcap\limits_{i=1}^{N} V(z_i, k_i, \varepsilon) \subset G$. Тогда $|x(k_i) - - z_i(k_i)| < \varepsilon_i$ для всех $i \in \overline{1,N}$. Определим $\Delta_i = \varepsilon_i - |x(k_i) - - z_i(k_i)|$. Пусть $M = \max\limits_{i\in\overline{1,N}} k_i$. Выберем $\varepsilon > 0$ так, чтобы $2^M\varepsilon < < \frac{1}{2}$ и $2^{M+1}\varepsilon < \min\limits_{i\in\overline{1,N}} \Delta_i$. Тогда для любого $y \in O_\varepsilon(x)$ получаем для любого $k \in \overline{1,M}$ неравенство

$$|y(k) - x(k)| < \frac{2^M\varepsilon}{1 - 2^M\varepsilon} < 2^{M+1}\varepsilon.$$

Отсюда для любого $i \in \overline{1,N}$ получаем $|y(k_i) - x(k_i)| < \Delta_i$, что означает $|y(k_i) - z_i(k_i)| < \varepsilon_i$. Следовательно, справедливо включение $O_\varepsilon(x) \subset \bigcap\limits_{i=1}^{N} V(z_i, k_i, \varepsilon) \subset G$. Таким образом, G является ρ-открытым, что и требовалось. Итак, доказано, что топология поточечной сходимости в пространстве числовых последовательностей метризуема.

Задача. Привести пример метрики ρ в множестве всех числовых последовательностей X, сходимость по которой эквивалентна равномерной сходимости, т. е. для $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ и $x \in X$ соотношение $\rho(x_n, x) \to 0$ при $n \to \infty$ эквивалентно свойству $x_n(k) \overset{k\in\mathbb{N}}{\rightrightarrows} x(k)$ при $n \to \infty$.

Пример 2. *Топология поточечной сходимости в пространстве вещественнозначных функций на отрезке.* Пусть X — множество всех функций вида $x\colon [0,1] \to \mathbb{R}$. Требуется ввести в X топологию τ, такую, что сходимость по этой топологии последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ к функции $y \in X$ (т. е. $x_n \xrightarrow{\tau} y$ при $n \to \infty$) эквивалентна поточечной сходимости $x_n(t) \to y(t)$ при $n \to \infty$ при каждом $t \in [0,1]$. Рассмотрим для любых $x \in X$, $t \in [0,1]$ и $\varepsilon > 0$ множество

$$V(x,t,\varepsilon) = \left\{ z \in X \;\middle|\; |x(t) - z(t)| < \varepsilon \right\}.$$

Объявим систему множеств

$$\sigma = \{ V(x,t,\varepsilon) \mid x \in X,\ t \in [0,1],\ \varepsilon > 0 \}$$

предбазой искомой топологии. Тогда базой β искомой топологии τ является совокупность всевозможных конечных пересечений множеств из σ. Таким образом, множество $G \in \tau$ тогда и только тогда, когда существует семейство множеств $\{ W_\alpha \in \beta \mid \alpha \in \mathcal{A} \}$, такое, что $G = \bigcup\limits_{\alpha \in \mathcal{A}} W_\alpha$. При этом включение $W_\alpha \in \beta$ означает, что существует $N_\alpha \in \mathbb{N}$, а для любого $n \in \overline{1, N_\alpha}$ существуют $x_{n,\alpha} \in X$, $t_{n,\alpha} \in [0,1]$ и $\varepsilon_{n,\alpha} > 0$, такие, что $W_\alpha = \bigcap\limits_{n=1}^{N_\alpha} V\left(x_{n,\alpha}, t_{n,\alpha}, \varepsilon_{n,\alpha}\right)$. Определенная топология τ является топологией поточечной сходимости в X. Доказательство этого утверждения проводится совершенно аналогично доказательству из примера 1 (проведите это доказательство).

Приведем пример подмножества $S \subset X$, секвенциальное замыкание которого не совпадает с топологическим. Напомним, что секвенциальным замыканием множества S в топологическом пространстве (X,τ) называется такое множество $cl_{секв.}\, S$, что для любого $x \in cl_{секв.}\, S$ существует последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset S$,, такая, что $x_n \xrightarrow{\tau} x$ при $n \to \infty$. Иными словами, секвенциальное замыкание множества S состоит из точек, являющихся пределами сходящихся последовательностей из S. Топологическим замыканием множества S называется множество $cl_\tau\, S$, состоящее из тех и только тех точек $x \in X$, что для любого $G \in \tau$, такого, что $x \in G$, выполнено $G \cap S \neq \varnothing$. Таким образом, топологическое замыкание множества S состоит из точек, любая окрестность которых пересекается с S.

Вернемся к построению примера подмножества S топологического пространства (X, τ), рассматриваемого в примере 2, секвенциальное замыкание которого не совпадает с топологическим. Определим множество S следующим образом. Функция $x \in S$, если существует разбиение $T = \{t_k\}_{k=0}^{N}$ отрезка $[0, 1]$ вида $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = 1$, такое, что графиком x на $[t_{k-1}, t_k]$ являются боковые ребра равнобедренного треугольника с основанием $[t_{k-1}, t_k]$ и высотой, равной единице. Указанное разбиение назовем разбиением, порождающим функцию x. Условно можно назвать S множеством *пилообразных* функций. Покажем, что функция y, равная тождественно нулю на $[0, 1]$, принадлежит топологическому и не принадлежит секвенциальному замыканию S. Действительно, рассмотрим произвольную окрестность G функции y. Тогда существуют $M \in \mathbb{N}$ и для любого $m \in \overline{1, M}$ существуют $z_m \in X$, $t_m \in [0, 1]$ и $\varepsilon_m > 0$, такие, что $y \in$ $\in \bigcap\limits_{m=1}^{M} V(z_m, t_m, \varepsilon_m) \subset G$. Построим *пилоообразную* функцию $x \in S$, порождающее разбиение которой содержит все точки t_m, $m \in \overline{1, M}$. Тогда $x(t_m) = 0 = y(t_m)$ для всех $m \in \overline{1, M}$. Следовательно, $x \in \bigcap\limits_{m=1}^{M} V(z_m, t_m, \varepsilon_m) \subset G$. Таким образом, $y \in cl_\tau\, S$. Тем не менее, y не является поточечным пределом никакой последовательности из S. Действительно, пусть существует $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset S$,, такая, что $x_n \xrightarrow{\tau} y$ при $n \to \infty$, т. е. $x_n(t) \to y(t)$ при $n \to \infty$ при всех $t \in [0, 1]$. Здесь нам понадобится следующее следствие теоремы Лебега об ограниченной сходимости (см. [4, глава 10, с. 293]), которое иногда называют теоремой об *аквариуме*: если $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ — равномерно ограниченная последовательность интегрируемых по Риману на отрезке $[0,1]$ функций, поточечно сходящаяся к интегрируемой по Риману на отрезке $[0,1]$ функции f, т. е. для всех $t \in [0,1]$ существует $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(t) = f(t)$ и существуют числа R_1 и R_2, такие, что $R_1 \le f_n(t) \le R_2$ для всех $t \in [0,1]$ и $n \in \mathbb{N}$ (т. е. графики всех функций f_n находятся в прямоугольнике — *аквариуме* $[0,1] \times [R_1, R_2]$), то существует $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^1 f_n(t)\,dt = \int\limits_0^1 f(t)\,dt$. Так как в нашем случае функции x_n непрерывны и равномерно ограниченны ($0 \le x_n(t) \le 1$ при всех $t \in [0,1]$ и $n \in \mathbb{N}$), то по указанному следствию теоремы Лебега об ограниченной сходимости (т. е. по теореме об *аквариуме*) получаем, что $\frac{1}{2} = \int\limits_0^1 x_n(t)\,dt \overset{n\to\infty}{\to} \int\limits_0^1 y(t)\,dt = 0$ — противоречие. Заметим, что существование указанного множества S влечет неметризуемость топологии поточечной сходимости в пространстве (X,τ), так как в метрическом пространстве секвенциальное замыкание множества всегда совпадает с топологическим (докажите это).

Задача. Доказать, что подмножество S метрического пространства (X,ρ) является замкнутым топологически тогда и только тогда, когда оно секвенциально замкнуто.

Задача. Доказать, что определенное в примере 2 топологическое пространство (X,τ) является регулярным (см. [3, глава II, § 5, с. 95]), т. е. любое одноточечное подмножество из X замкнуто, и любая точка и не содержащее ее замкнутое подмножество из X имеют непересекающиеся окрестности.

Задача. Привести пример метрики ρ в множестве X всех функций вида $x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, сходимость по которой эквивалентна равномерной сходимости, т. е. для $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ и $x \in X$ соотношение $\rho(x_n, x) \to 0$ при $n \to \infty$ эквивалентно свойству

$x_n(t) \overset{t\in\mathbb{R}}{\rightrightarrows} x(t)$ при $n \to \infty$.

Пример 3. *Секвенциально непрерывное отображение одного топологического пространства на другое, не являющееся непрерывным топологически.* Пусть (X_1, τ_1) и (X_2, τ_2) — два топологических пространства, а $f\colon X_1 \to X_2$ — некоторое отображение. Напомним, что f называется секвенциально непрерывным (или непрерывным по Гейне), если для любых $x \in X_1$ и последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X_1$ вида $x_n \xrightarrow{\tau_1} x$ при $n \to \infty$ следует $f(x_n) \xrightarrow{\tau_2} f(x)$ при $n \to \infty$. Отображение f называется непрерывным топологически (или непрерывным по Коши), если для любых $x \in X_1$ и $U \in \tau_2$ вида $f(x) \in U$ существует $V \in \tau_1$ вида $x \in V$, такое, что для любого $z \in$ $\in V$ выполнено $f(z) \in U$. Докажите в качестве упражнения, что топологическая непрерывность f влечет его секвенциальную непрерывность (т. е. непрерывность по Коши влечет непрерывность по Гейне). Покажем на примере, что обратное неверно.

Рассмотрим множество X, состоящее из всех непрерывных на отрезке $[0, 1]$ функций с вещественными значениями, лежащими на отрезке $[0, 1]$. Введем в X топологию τ поточечной сходимости, описанную в примере 2. Определим также метрическое пространство (X, ρ), где метрика $\rho(x, y) =$ $= \int\limits_0^1 \big|x(t) - y(t)\big|\, dt$. Рассмотрим тождественное отображение $I\colon (X, \tau) \to (X, \rho)$ вида $I(x) = x$ для любого $x \in X$. Покажем, что I секвенциально непрерывно. Действительно, пусть последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ сходится поточечно к $y \in X$ на $[0, 1]$. Так как $0 \leq x_n(t) \leq 1$, то $|x_n(t) - y(t)| \leq 2$. Также $|x_n(t) - y(t)| \to 0$ при $n \to \infty$ для всех $t \in [0, 1]$. Следовательно, по упомянутому выше следствию из теоремы Лебега об ограниченной сходимости [4, глава 10, с. 293] (теорема об *аквариуме*) получаем $\rho\Big(I(x_n), I(y)\Big) = \int\limits_0^1 \big|x_n(t) - y(t)\big|\, dt \to$ $\to 0$ при $n \to \infty$. Покажем, что I не является топологически непрерывным отображением. Рассмотрим множество $S \subset$ $\subset X$ *пилообразных* функций, описанное в примере 2. Так как в любой окрестности $G \in \tau$ тождественно нулевой на $[0,1]$ функции y есть точка x_G множества S (см. пример 2), то получаем, что для $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$ и для любого $G \in \tau$, $y \in G$, существует $x_G \in G \cap S$, такой, что $\rho\Big(I(x_G), I(y)\Big) = \int\limits_0^1 x_G(t)\, dt = \varepsilon_0$. Следовательно, I топологически разрывно в точке y, так как образ любой окрестности G точки y в (X,τ) не содержится в открытом шаре радиуса ε_0 с центром в $I(y) = y$ в пространстве (X,ρ).

Другой пример подобного отображения можно привести, рассмотрев специальное топологическое пространство (Y,τ), описанное в [3, глава II, § 5, с. 91]. Множество $Y = [0,1]$, а топология τ состоит из всевозможных подмножеств $[0,1]$, каждое из которых получается из $[0,1]$ выбрасыванием конечного или счетного числа точек. Рассмотрим тождественное отображение $I\colon (Y,\tau) \to (Y,\rho)$, где $\rho(y,z) = |y-z|$ для любых $y,z \in [0,1]$. Покажем, что I является секвенциально непрерывным отображением. Пусть числовая последовательность $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset Y$ сходится к $z \in Y$ по топологии τ. Рассмотрим множество $G = Y \setminus \{\ y_n \mid y_n \neq z\ \} \in \tau$, которое по определению является окрестностью z. Тогда существует $N_G \in \mathbb{N}$, такое, что для всех $n \geq N_G$ выполнено $y_n \in G$. Следовательно, $y_n = z$ для всех $m \geq N_G$, так как G не содержит элементов последовательности $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$, не равных z. Таким образом, $I(y_n) = I(z)$ для всех $n \geq N_G$, т. е. $\rho(I(y_n), I(z)) = 0$ для всех $n \geq N_G$. С другой стороны, для любого интервала $J = (\alpha,\beta) \subset [0,1]$, такого, что $[0,1] \setminus J$ более чем счетно, получаем $I^{-1}(J) = J \notin \tau$. Значит, прообраз открытого подмножества из (Y, ρ) не является открытым в (Y, τ). Следовательно, I не является топологически непрерывным отображением, так как по теореме 6 из [3, глава II, § 5, с. 92] топологическая непрерывность отображения $f\colon (X_1, \tau_1) \to (X_2, \tau_2)$ эквивалентна тому, что прообраз любого τ_2-открытого множества из X_2 является τ_1-открытым в X_1.

Задача. Пусть отображение $f\colon (Y, \rho) \to (Z, \tau)$ метрического пространства (Y, ρ) в топологическое пространство (Z, τ) секвенциально непрерывно. Доказать, что f будет топологически непрерывным отображением.

Пример 4. *Критерий несепарабельности метрического пространства.* Пусть (X, ρ) – метрическое пространство. Напомним [3, глава I, § 2, с. 59], что (X, ρ) называется сепарабельным, если в X существует счетное всюду плотное подмножество. Справедливо следующее условие несепарабельности пространства (X, ρ): если существует несчетное множество $A \subset X$ и число $\varepsilon > 0$, такое, что для любых $a_1 \in A$, $a_2 \in A$, $a_1 \neq a_2$ выполнено $\rho(a_1, a_2) \geq \varepsilon$, то (X, ρ) не является сепарабельным. Доказательство этого утверждения можно найти в [3, глава I, § 2, с. 60]. Справедливо и обратное утверждение: если пространство (X, ρ), содержащее бесконечное число элементов, не сепарабельно, то существуют несчетное множество $A \subset X$ и число $\varepsilon > 0$, такие, что для любых $a_1 \in A$, $a_2 \in A$, $a_1 \neq a_2$, выполнено $\rho(a_1, a_2) \geq \varepsilon$. Докажем это утверждение. Приведенное ниже доказательство предложил студент 474 группы МФТИ А. Бадзян.

Множество $A \subset X$ назовем ε-разреженным для некоторого $\varepsilon > 0$, если для любых $a_1 \in A$, $a_2 \in A$, $a_1 \neq a_2$, выполнено $\rho(a_1, a_2) \geq \varepsilon$. Пусть (X, ρ) не сепарабельно и содержит бесконечное число элементов. Предположим, рассуждая от противного, что для любого $\varepsilon > 0$ любое ε-разреженное подмножество из X не более чем счетно. Для любого $k \in \mathbb{N}$ обозначим $\varepsilon_k = \frac{1}{k}$ и рассмотрим семейство $\mathcal{P}_k$ всех ε_k-разреженных подмножеств из X. Ясно, что для любого $k \in \mathbb{N}$ выполнено $\mathcal{P}_k \neq \varnothing$, так как для любого $x \in X$ одноточечное множество $\{x\} \in \mathcal{P}_k$. Частично упорядочим $\mathcal{P}_k$ относительно теоретико-множественного включения.

Напомним определение частично упорядоченного множества $\mathcal{P}$. Говорят, что множество $\mathcal{P}$ частично упорядочено относительно бинарного отношения $\leq$, если выполняются следующие условия:

1) $a \leq a$ для любого $a \in \mathcal{P}$;

2) если для $a, b \in \mathcal{P}$ выполнены $a \leq b$ и $b \leq a$, то $a = b$;

3) если для $a, b, c \in \mathcal{P}$ выполнены $a \leq b$ и $b \leq c$, то $a \leq c$.

Подмножество $\mathcal{S}$ частично упорядоченного множества $\mathcal{P}$ называется линейно упорядоченным, если для каждой пары элементов $a, b \in \mathcal{S}$ выполняется хотя бы одно из условий $a \leq b$ или $b \leq a$.

Определения частично упорядоченного множества $\mathcal{P}$ и его линейно упорядоченного подмножества $\mathcal{S}$ можно посмотреть в [5, приложение A1, с. 412].

Нам понадобится следующая теорема Хаусдорфа о максимальности (см. [5, приложение A1, с. 412]): каждое непустое частично упорядоченное множество $\mathcal{P}$ содержит максимальное линейно упорядоченное подмножество, т. е. такое непустое линейно упорядоченное подмножество $\mathcal{S}$, которое не является собственным подмножеством никакого другого линейно упорядоченного подмножества множества $\mathcal{P}$.

По теореме Хаусдорфа о максимальности, в частично упорядоченном относительно теоретико-множественного включения множестве $\mathcal{P}_k$ существует максимальное линейно упорядоченное подмножество $\mathcal{S}_k$. Определим множество $A_k = \bigcup_{A \in \mathcal{S}_k} A$. Заметим, что A_k является ε_k-разреженным. Действительно, пусть $a' \in A_k$, $a'' \in A_k$, $a' \neq a''$. Тогда существуют $A' \in \mathcal{S}_k$ и $A'' \in \mathcal{S}_k$, такие, что $a' \in A'$, $a'' \in \mathcal{A}''$. Так как $\mathcal{S}_k$ линейно упорядоченно относительно теоретико-множественного включения, то либо $A' \subset A''$, либо $A'' \subset A'$. Пусть без ограничения общности $A' \subset A''$. Тогда a' и a'' принадлежат множеству A'', которое является ε_k-разреженным. Следовательно, справедливо неравенство $\rho(a', a'') \geq \varepsilon_k$, т. е. A_k является ε_k-разреженным. Отсюда, в силу предположения, получаем, что множество A_k не более чем счетно.

Если существует $x \in X \backslash A_k$, такое, что $\rho(x, a) \geq \varepsilon_k$ для всех $a \in A_k$, то, рассмотрев множество $B = A_k \cup \{x\}$, получим $B \in \mathcal{P}_k$, $B \notin \mathcal{S}_k$ и $A \subset B$ для любого $A \in \mathcal{S}_k$. Получаем противоречие с максимальностью $\mathcal{S}_k$. Следовательно, для любого $x \in X$ существует $a = a(x) \in A_k$, такое, что $\rho(x, a) < \varepsilon_k$. Определив множество $A = \bigcup\limits_{k \in \mathbb{N}} A_k$, получим, что A является счетным (как счетное объединение не более чем счетных множеств) и всюду плотным в X. Действительно, для любого $x \in X$ и любого $\varepsilon > 0$ существует $k \in \mathbb{N}$, такое, что $\varepsilon_k < \varepsilon$, и существует $a_k \in \mathcal{A}_k \subset A$, такое, что $\rho(x, a_k) < \varepsilon_k < \varepsilon$. Получили противоречие с несепарабельностью (X, ρ).

Задача. Доказать, что любое бесконечное подмножество сепарабельного метрического пространства тоже является сепарабельным.

Пример 5. *Полное метрическое пространство и последовательность вложенных замкнутых шаров в нем, имеющих пустое пересечение.* Пусть (X, ρ) — метрическое пространство. Известно, что (X, ρ) является полным тогда и только тогда, когда в нем всякая последовательность вложенных замкнутых шаров, радиусы которых стремятся к нулю, имеет непустое пересечение (см. [3, глава II, § 3, с. 69]). Покажем, что пересечение шаров может быть пустым, если радиусы не стремятся к нулю (см. [2, глава 12, с. 201]). Рассмотрим

$X = \mathbb{N}$, в котором метрика задана формулой $\rho(m,n) = 1 + \frac{1}{m+n}$ при $m \neq n$. Покажем, что $(\mathbb{N}, \rho)$ является полным. Если последовательность $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ является ρ-фундаментальной, то существует $N \in \mathbb{N}$, такое, что для всех $k, s \geq N$ выполнено $\rho(n_k, n_s) < 1$. Если $n_k \neq n_s$, то $\rho(n_k, n_s) > 1$. Следовательно, $n_k = n_s = m$. Таким образом, всякая фундаментальная в $(\mathbb{N}, \rho)$ последовательность является стационарной с некоторого номера, а значит, сходящейся. Далее, для любого $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим замкнутый шар с центром в n и радиусом $r_n = 1 + \frac{1}{2n}$, т. е. $B_{r_n}(n) = \left\{ m \in \mathbb{N} \;\middle|\; \rho(m,n) \leq r_n \right\}$. Тогда число $m \in \mathbb{N}$, не равное n, принадлежит $B_{r_n}(n)$ тогда и только тогда, когда $1 + \frac{1}{m+n} \leq 1 + \frac{1}{2n}$, т. е. $m \geq n$. Таким образом, справедливо равенство $B_{r_n}(n) = \{m\}_{m=n}^{\infty}$. Следовательно, $B_{r_n}(n) \supset B_{r_{n+1}}(n+1)$ для всех $n \in \mathbb{N}$, т. е. шары являются вложенными, при этом $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B_{r_n}(n) = \varnothing$.

Задача. Привести пример банахова пространства и последовательность замкнутых ограниченных убывающих по включению его подмножеств, имеющих пустое пересечение.

Пример 6. *Метрическое пространство, в котором шар большего радиуса может оказаться собственным подмножеством шара меньшего радиуса.* Рассмотрим множество положительных рациональных чисел $\mathbb{Q}_+$, метрику в котором определим следующим образом:

$$\rho\left(\frac{m_1}{n_1}, \frac{m_2}{n_2}\right) = \begin{cases} \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} & , \quad \frac{m_1}{n_1} \neq \frac{m_2}{n_2}, \\ 0 & , \quad \frac{m_1}{n_1} = \frac{m_2}{n_2}, \end{cases}$$

где m_k и n_k — натуральные числа, а дробь $\frac{m_k}{n_k}$ несократима, $k = \overline{1,2}$. Докажите, что определенная на $\mathbb{Q}_+ \times \mathbb{Q}_+$ функция ρ удовлетворяет определению метрики [3, глава II, § 1, с. 48]. Для любого $z \in \mathbb{Q}_+$ и числа $r > 0$ определим открытый шар $O_r(z) = \{ \; w \in \mathbb{Q}_+ \;\; | \;\; \rho(z,w) < r \; \}$. Рассмотрим шар

$O_2(1)$. Ясно, что $\frac{m}{n} \in O_2(1)$ и $\frac{m}{n} \neq 1$, если $1 + \frac{1}{n} < 2$, т. е. $n > 1$. Следовательно, $O_2(1) = \mathbb{Q}_+ \backslash \{2, 3, 4, \ldots\}$. Рассмотрим шар $O_r\left(\frac{1}{2}\right)$ для $0 < r < 2$. Число $\frac{m}{n} \in O_r\left(\frac{1}{2}\right)$ и $\frac{m}{n} \neq \frac{1}{2}$, если $\frac{1}{2} + \frac{1}{n} < r$. Так как $\frac{1}{2} + \frac{1}{n} \leq \frac{3}{2}$ для всех $n \in \mathbb{N}$, то при $r > \frac{3}{2}$ получаем $O_r\left(\frac{1}{2}\right) = \mathbb{Q}_+$. Таким образом, для любого $r \in \left(\frac{3}{2}, 2\right)$ шар $O_2(1)$ является собственным подмножеством шара $O_r\left(\frac{1}{2}\right)$.

Задача. Доказать, что в линейном нормированном пространстве шар большего радиуса не может быть собственным подмножеством шара меньшего радиуса.

Пример 7. *Линейное нормированное пространство, представимое в виде счетного объединения замкнутых нигде не плотных подмножеств.* Напомним, что подмножество метрического пространства называется нигде не плотным, если его замыкание имеет пустую внутренность. Напомним также теорему Бэра (см. [3, глава II, § 3, с. 70]): полное метрическое пространство не может быть представлено в виде объединения счетного числа своих нигде не плотных множеств. Пусть $(X, \|\cdot\|)$ – линейное нормированное пространство. Если оно полное (т. е. банахово), то в силу теоремы Бэра оно не может быть представлено в виде счетного объединения нигде не плотных подмножеств. Рассмотрим неполное линейное нормированное пространство $(X, \|\cdot\|) = (\ell_1, \|\cdot\|_{\ell_2})$, где $X = \ell_1$, а норма $\|\cdot\|$ является ℓ_2-нормой, т. е. $\|x\| = \|x\|_{\ell_2} = \sqrt{\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x(n)|^2}$ для любого $x \in \ell_1$. Это пространство неполно. Действительно, рассмотрим последовательность $\{x_m\}_{m=1}^{\infty} \subset \ell_1$ вида

$$x_m(n) = \begin{cases} \frac{1}{n}\,, & n \in \overline{1, m}, \\ \\ 0\,, & n > m. \end{cases}$$

Тогда в силу сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ для любого $\varepsilon > 0$ существует $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, такое, что для любых $m > N(\varepsilon)$ и $p \in \mathbb{N}$ выполнено $\|x_{m+p} - x_m\|_{\ell_2} < \sqrt{\sum\limits_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{n^2}} < \varepsilon$. Следовательно, последовательность $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$ фундаментальна в $(\ell_1, \|\cdot\|_{\ell_2})$. Однако она является расходящейся в $(\ell_1, \|\cdot\|_{\ell_2})$. Действительно, рассмотрим $y\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ вида $y(n) = \frac{1}{n}$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Тогда $\|x_m - y\| \to 0$ при $m \to \infty$, а $y \notin X$. Таким образом, $(X, \|\cdot\|)$ не полно.

Представим $(\ell_1, \|\cdot\|_{\ell_2})$ в виде счетного объединения замкнутых нигде не плотных подмножеств. Рассмотрим для любого $n \in \mathbb{N}$ множество

$$F_n = \left\{ x \in \ell_1 \;\middle|\; \|x\|_{\ell_1} = \sum_{k=1}^{\infty} |x(k)| \leq n \right\}.$$

Так как для любого $x \in \ell_1$ выполнено $\|x\|_{\ell_1} < +\infty$, то для любого $x \in \ell_1$ существует $n = n(x) \in \mathbb{N}$, такое, что $n \geq \|x\|_{\ell_1}$. Следовательно, справедливо равенство $\ell_1 = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n$.

Покажем, что F_n замкнуто в $(\ell_1, \|\cdot\|_{\ell_2})$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Действительно, если последовательность $\{x_m\}_{m=1}^{\infty} \subset F_n$ и существует $z \in \ell_1$, такое, что $\|x_m - z\|_{\ell_2} \to 0$ при $m \to \infty$, то для любого $k \in \mathbb{N}$ получаем $x_m(k) \to z(k)$ при $m \to \infty$. Это следует из оценки $|x_m(k) - z(k)| \leq \|x_m - z\|_{\ell_2}$ для любого $k \in \mathbb{N}$. Так как для любого $K \in \mathbb{N}$ выполнено $\sum\limits_{k=1}^{K} |x_m(k)| \leq \|x_m\|_{\ell_1} \leq$ $\leq n$, то, переходя к пределу при $m \to \infty$ при фиксированном произвольным образом $K \in \mathbb{N}$, получаем $\sum\limits_{k=1}^{K} |z(k)| \leq n$. Следовательно, при $K \to \infty$ получаем $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |z(k)| = \|z\|_{\ell_1} \leq n$, т. е. $z \in F_n$. Таким образом, замкнутость F_n доказана.

Покажем, что F_n нигде не плотно в $(\ell_1, \|\cdot\|_{\ell_2})$. Так как F_n замкнуто, то достаточно показать, что F_n имеет пустую внутренность. Пусть $x \in F_n$ и число $r > 0$. Существует $m \in \in \mathbb{N}$, такое, что $\sqrt{\sum\limits_{k=m}^{\infty} \frac{1}{k^2}} < r$. Далее, существует $s > m$, такое, что $\sum\limits_{k=m}^{s} \frac{1}{k} > 2n$. Определим $z \in \ell_1$ вида

$$z(k) = \begin{cases} \frac{1}{k}\,, & m \le k \le s, \\ 0\,, & k < m \quad \text{или} \quad k > s. \end{cases}$$

Пусть $y = x + z \in X$. Тогда $\|y - x\|_{\ell_2} = \|z\|_{\ell_2} < \sqrt{\sum\limits_{k=m}^{\infty} \frac{1}{k^2}} < < r$, а $\|y\|_{\ell_1} \ge \|z\|_{\ell_1} - \|x\|_{\ell_1} > 2n - n = n$, т. е. $y \notin F_n$. Таким образом, для любого $x \in F_n$ любой открытый шар из $(\ell_1, \|\cdot\|_{\ell_2})$ с центром в точке x не содержится в F_n, что и требовалось показать.

Задача. Пусть множество X счетно, а метрическое пространство (X, ρ) не содержит изолированных точек. Доказать, что (X, ρ) не полно.

Задача. Привести пример счетного полного метрического пространства (X, ρ).

Пример 8. *Базис Гамеля в линейном пространстве.* Пусть X – ненулевое линейное пространство. Множество векторов $\mathcal{G} \subset X$ называется базисом Гамеля в X, если любой вектор из X представим единственным образом в виде конечной линейной комбинации элементов $\mathcal{G}$ (см. [3, глава III, § 1, с. 123]). Покажем, что в X существует базис Гамеля. Пусть ненулевой вектор $e_1 \in X$. Пусть $\mathcal{L}_1 = \mathrm{Lin}\{e_1\}$ – подпространство в X. Ясно, что $\mathcal{G}_1 = \{e_1\} \subset \mathcal{L}_1$ – базис Гамеля в $\mathcal{L}_1$. Рассмотрим множество $\mathcal{P}$, состоящее из элементов вида $(\mathcal{L}, \mathcal{G}_{\mathcal{L}})$, где $\mathcal{L} \subset X$ – подпространство, а $\mathcal{G}_{\mathcal{L}} \subset \mathcal{L}$ – базис Гамеля в $\mathcal{L}$. Так как $(\mathcal{L}_1, \mathcal{G}_1) \in \mathcal{P}$, то $\mathcal{P} \neq \varnothing$. Скажем, что $(\mathcal{L}', \mathcal{G}') \in \mathcal{P}$ и $(\mathcal{L}'', \mathcal{G}'') \in \mathcal{P}$ удовлетворяют отношению $(\mathcal{L}', \mathcal{G}') \leq (\mathcal{L}'', \mathcal{G}'')$, если $\mathcal{L}' \subset \mathcal{L}''$ и $\mathcal{G}' \subset \mathcal{G}''$. Частично упорядочим $\mathcal{P}$ относительно отношения $\leq$. По теореме Хаусдорфа о максимальности [5, приложение А1, с. 412], в $\mathcal{P}$ существует максимальное линейно упорядоченное подмножество $\mathcal{S}$. Определим $\mathcal{M} = \bigcup\limits_{(\mathcal{L}, \mathcal{G}_{\mathcal{L}}) \in \mathcal{S}} \mathcal{L}$ и $\mathcal{G} = \bigcup\limits_{(\mathcal{L}, \mathcal{G}_{\mathcal{L}}) \in \mathcal{S}} \mathcal{G}_{\mathcal{L}}$. Покажем, что $\mathcal{M} = X$, а $\mathcal{G}$ – базис Гамеля в X. Ясно, что $\mathcal{M}$ — подпространство в X. Это следует из линейной упорядоченности $\mathcal{S}$. Действительно, если x' и x'' принадлежат $\mathcal{M}$, то существуют $(\mathcal{L}', \mathcal{G}')$ и $(\mathcal{L}'', \mathcal{G}'')$ из $\mathcal{S}$, такие, что $x' \in \mathcal{L}'$, $x'' \in \mathcal{L}''$. В силу линейной упорядоченности $\mathcal{S}$ без ограничения общности можно считать, что $(\mathcal{L}', \mathcal{G}') \leq (\mathcal{L}'', \mathcal{G}'')$. Следовательно, $\mathcal{L}' \subset \subset \mathcal{L}''$, тогда $x' \in \mathcal{L}''$ и $x'' \in \mathcal{L}''$. Так как $\mathcal{L}''$ — подпространство в X, то $\alpha' x' + \alpha'' x'' \in \mathcal{L}'' \subset \mathcal{M}$ для любых скаляров α' и α''. Покажем далее, что $\mathcal{G}$ — базис Гамеля в $\mathcal{M}$. Действительно, для любого $x \in \mathcal{M}$ существует $(\mathcal{L}', \mathcal{G}') \in \mathcal{S}$, такое, что $x \in \in \mathcal{L}'$. Следовательно, x представим единственным образом в виде конечной линейной комбинации элементов $\mathcal{G}' \subset \mathcal{G}$. Если найдется другой элемент $(\mathcal{L}'', \mathcal{G}'') \in \mathcal{S}$, такой, что $x \in \mathcal{L}''$, то в силу линейной упорядоченности $\mathcal{S}$ без ограничения общности можно считать, что $(\mathcal{L}', \mathcal{G}') \leq (\mathcal{L}'', \mathcal{G}'')$. Тогда $\mathcal{G}' \subset \mathcal{G}''$. Так как $\mathcal{G}''$ — базис Гамеля в $\mathcal{L}''$, то представление x в виде конечной линейной комбинации элементов $\mathcal{G}''$ совпадет с его представлением в виде конечной линейной комбинации элементов $\mathcal{G}'$. Итак, любой $x \in \mathcal{M}$ представим единственным образом в виде конечной линейной комбинации элементов $\mathcal{G}$, что и требовалось. Покажем наконец, что $\mathcal{M} = X$. Если это не так, то существует $e \in X \backslash \mathcal{M}$. Определим $\mathcal{L} = \mathcal{M} + \mathrm{Lin}\{e\}$, $\mathcal{G}_{\mathcal{L}} = \mathcal{G} \cup \{e\}$. Так как $\mathcal{M} \cap \mathrm{Lin}\{e\} = \{0\}$, то для любого $x \in \mathcal{L}$

существуют единственные $y \in \mathcal{M}$ и $z \in \mathrm{Lin}\{e\}$, такие, что $x = y + z$. Так как $y \in \mathcal{M}$ представим единственным образом в виде конечной линейной комбинации элементов $\mathcal{G}$, то получается, что $x \in \mathcal{L}$ представим единственным образом в виде конечной линейной комбинации элементов $\mathcal{G}_{\mathcal{L}}$. Следовательно, $\mathcal{G}_{\mathcal{L}}$ — базис Гамеля в $\mathcal{L}$. При этом по построению $(\mathcal{L}', \mathcal{G}') \leq (\mathcal{L}, \mathcal{G}_{\mathcal{L}})$ для любого $(\mathcal{L}', \mathcal{G}') \in \mathcal{S}$. Но в силу $e \notin \mathcal{M}$ получаем $(\mathcal{L}, \mathcal{G}_{\mathcal{L}}) \notin \mathcal{S}$. Это противоречит максимальности $\mathcal{S}$. Итак, $\mathcal{M} = X$, что и требовалось.

Задача. Привести пример бесконечномерного линейного нормированного пространства, имеющего счетный базис Гамеля.

Может ли полное бесконечномерное линейное нормированное пространство иметь счетный базис Гамеля ? Покажем, что ответ на этот вопрос отрицательный. Предположим, что линейное нормированное пространство $(\mathcal{L}, \|\cdot\|)$ имеет счетный базис Гамеля $\mathcal{G} = \{e_n\}_{n=1}^{\infty}$. Определим для любого $n \in \in \mathbb{N}$ конечномерное подпространство $M_n = \mathrm{Lin}\{e_1, \ldots, e_n\}$. По определению базиса Гамеля, $\mathcal{L} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} M_n$. Далее, в силу конечномерности M_n полно в $\mathcal{L}$, а значит, и замкнуто в $\mathcal{L}$. В силу бесконечномерности $\mathcal{L}$ подпространство M_n не совпадает с $\mathcal{L}$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Покажем, что M_n является нигде не плотным в $\mathcal{L}$, т. е. не содержит ни одного шара положительного радиуса. Так как M_n подпространство, то достаточно показать, что M_n не содержит единичную сферу с центром в нуле. Но это сразу следует из леммы Рисса о почти перпендикуляре (см. [6, глава I, § 3, с. 32], на всякий случай напомним её: пусть M — замкнутое подпространство нормированного пространства $(\mathcal{L}, \|\cdot\|)$, причем $M \neq \mathcal{L}$, тогда для любого $\varepsilon \in (0, 1)$ существует единичный вектор $z_\varepsilon \in \mathcal{L}$, такой, что $\rho(z_\varepsilon, M) = \inf\limits_{x \in M} \|z_\varepsilon - x\| > 1 - \varepsilon$), которая, в частности, утверждает существование элемента $z \in \mathfrak{L}$, $\|z\| = 1$, такого, что $\rho(z, M_n) > \frac{1}{2}$, т. е. $z \notin M_n$. Итак, предположение о существовании счетного базиса Гамеля в $\mathfrak{L}$ приводит к его представлению в виде счетного объединения нигде не плотных его подмножеств. Следовательно, в силу теоремы Бэра (см. [3, глава II, § 3, с. 70]) линейное нормированное пространство $\mathfrak{L}$ не полно.

§ 2. Компактность множеств в топологических и метрических пространствах

Пусть (X, τ) — топологическое пространство, а множество $S \subset X$. Множество S называется компактным (см. [3, глава II, § 6, с. 98]), если любое его открытое покрытие содержит конечное подпокрытие. Напомним понятия счетно-компактного и секвенциально компактного множества. Множество S называется счетно-компактным, если любое его счетное открытое покрытие имеет конечное подпокрытие. Множество S называется секвенциально компактным, если любая последовательность точек из S имеет сходящуюся подпоследовательность к точке S. Очевидно, что компактность влечет счетную компактность.

Известно, что компактность S влечет следующее свойство: любое бесконечное подмножество $E \subset S$ имеет в S предельную точку, т. е. существует точка x множества S, в любой окрестности которой найдется точка множества E, отличная от x. Докажем более сильное утверждение: если S счетно-компактно, то любое бесконечное подмножество $E \subset S$ имеет в S предельную точку. Предположим, рассуждая от противного, что ни одна точка из S не является предельной для E. В силу бесконечности E существует счетное подмножество $E_1 \subset E$, которое, очевидно, также лишено предельных точек в S. Следовательно, для любого $x \in S$ существует его окрестность $U(x) \in \tau$,, такая, что $E_1 \cap \Big(U(x) \backslash \{x\}\Big) = \varnothing$. Следовательно, $S \backslash E_1$ открыто в S, так как для любого $x \in S \backslash E_1$ существует $U(x) \in \tau$, такое, что $E_1 \cap U(x) = \varnothing$, т. е. $S \cap \cap U(x) \subset S \backslash E_1$. Это означает существование $V \in \tau$, такого, что $V \cap S = S \backslash E_1$. Определим счетное открытое покрытие $\mathcal{P} = \{\ V\ ,\ U(x)\ \mid\ x \in E_1\ \}$ множества S. По построению, удаление из $\mathcal{P}$ любого его элемента $U(x)$ для $x \in E_1$ приведет к тому, что оставшийся набор открытых множеств перестанет быть покрытием S. Действительно, для любых точек $x, y \in \in E_1$ вида $x \neq y$ справедливо соотношение $x \notin U(y)$. Далее, так как $S \cap V = S \backslash E_1$, то для $x \in E_1$ выполнено $x \notin V$. Следовательно, для любого $x \in E_1$ выполнено $x \notin \left(\bigcup\limits_{\substack{y \in E_1 \\ y \neq x}} U(y) \right) \cup V$, что и требовалось. Если же из $\mathcal{P}$ удалить только V, то оставшийся набор окрестностей останется счетным. Таким образом, счетное покрытие $\mathcal{P}$ не имеет конечного подпокрытия. Получили противоречие со счетной компактностью множества S.

Пример 9. *Некомпакт, любое подмножество которого имеет в нем предельную точку.* Этот пример предложил студент 076 группы МФТИ Р. Таханов. Пусть $S = X = \mathbb{N}$ — множество натуральных чисел. Определим топологию τ в X следующим образом. Объявим базой топологии τ семейство $\beta = \{\ \{2k-1, 2k\}\ \mid\ k \in \mathbb{N}\ \}$, т. е. любое множество семейства β состоит из двух чисел $2k-1$ и $2k$ для подходящего $k \in \mathbb{N}$. Так как разные множества из β не пересекаются, а объединение всех элементов семейства β совпадает с $\mathbb{N}$, то по критерию базы (см. теорему 2 из [3, глава II, § 5, с. 88]) получаем, что β действительно является базой некоторой топологии τ. Иными словами, множество $V \in \tau$ если и только если число $2k \in V$ тогда и только тогда, когда $2k-1 \in V$, где $k \in \mathbb{N}$. Ясно, что X не является счетно-компактным, так как счетное открытое покрытие $\{V_k\}_{k=1}^{+\infty}$, состоящее из множеств $V_k = \{\, 2k-1\,,\, 2k\,\} \in \tau$, где $k \in \mathbb{N}$, не имеет конечного подпокрытия. Также X не является секвенциально компактным, так как последовательность $x_n = n$ не имеет сходящейся подпоследовательности (докажите это в качестве упражнения). Тем не менее любое непустое подмножество $E \subset X$ имеет в (X, τ) предельную точку. Действительно, если для некоторого $k \in \mathbb{N}$ точка $2k \in E$, то $2k-1$ является предельной для E, так как любая окрестность точки $2k-1$ содержит точку $2k \in E$, и $2k \neq 2k-1$. Аналогично, если $2k-1 \in E$, то $2k$ является предельной для E, так как любая окрестность точки $2k$ содержит точку $2k-1 \in E$, и $2k-1 \neq 2k$.

Замечание. В монографии [3] понятие счетной компактности определяется иначе: множество S называется счетно-компактным по [3], если любое его бесконечное подмножество имеет в S предельную точку (см. [3, глава II, § 6, с. 103]). Теорема 9 из [3, глава II, § 6, с. 103] вроде бы устанавливает эквивалентность между определением счетной компактности из [3] и определением счетной компактности через счетное открытое покрытие, используемое в данном пособии. Однако, как видно из примера 9, наличие предельной точки у любого бесконечного подмножества не влечет наличие конечного подпокрытия у произвольного счетного покрытия. Ошибка в доказательстве упомянутой теоремы 9 заключается в том, что предельная точка x_0 последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, состоящей из различных точек, может и не быть предельной точкой *хвоста* этой последовательности $\{x_n, x_{n+1}, \ldots\}$ (см. детали доказательства теоремы 9 в [3, глава II, § 6, с. 104]). Это было бы справедливо в случае, когда x_0 является пределом подпоследовательности последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, однако для этого нужна уже секвенциальная компактность. Например, в топологическом пространстве из примера 9 последовательность $x_n = n + 1$, $n \in \mathbb{N}$ имеет предельную точку $x_0 = 1$, так как любая окрестность x_0 содержит x_1. Однако уже множество $\{x_2, x_3, \ldots\}$ не имеет x_0 в качестве предельной точки.

Задача. Привести пример счетно-компактного топологического пространства (в смысле определения данного пособия), не являющегося компактным (например, см. задачу № 190 из [1, глава III, § 3, с. 155]).

Выясним, при каком условии счетно-компактное множество в смысле определения из [3] является счетно-компактным в смысле определения данного пособия ? Пусть топологическое пространство (X, τ) удовлетворяет первой аксиомой отделимости (см. [3, глава II, § 5, с. 94]), т. е. каждое одноточечное множество из X является замкнутым. Тогда всякое множество $S \subset X$, любое бесконечное подмножество которого имеет в S предельную точку, является счетно-компактным. Предположим, рассуждая от противного, что множество S не является счетно-компактным. Тогда существует счетное открытое покрытие $\mathcal{P} = \{V_k\}_{k=1}^{\infty}$ множества S, которое не имеет конечного подпокрытия. Следовательно, для любого номера n существует $x_n \in S$, такое, что $x_n \notin \bigcup\limits_{k=1}^{n} V_k$. Если множество значений последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ конечно, то существует стационарная подпоследовательность $x_{n_m} = x_0 \in S$. Так как семейство $\mathcal{P}$ является покрытием S, то существует номер k_0, такой, что $x_0 \in V_{k_0}$. Тогда существует номер m_0, такой, что для всех $m > m_0$ выполнено неравенство $n_m >$

$> k_0$. Следовательно, $x_{n_m} = x_0 \in V_{k_0} \subset \bigcup\limits_{k=1}^{n_m} V_k$, т. е. получили противоречие. Если же множество значений последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ бесконечно, то существует подпоследовательность $\{x_{n_m}\}_{m=1}^{\infty}$, целиком состоящая из различных точек, т. е. $x_{n_m} \neq x_{n_k}$ при $m \neq k$. По условию, бесконечное множество $E = \{x_{n_m}\}_{m=1}^{\infty}$ имеет в S предельную точку x_0. Так как все элементы множества E различны, то без ограничения общности можно считать, что $x_0 \notin E$. Действительно, так как в любой окрестности x_0 есть элемент множества E, отличный от x_0, то точка x_0 является предельной и для множества $E \backslash \{x_0\}$. Следовательно, если существует номер s_0, такой, что $x_0 = x_{n_{s_0}}$, то исключим элемент $x_{n_{s_0}}$ из рассматриваемой последовательности. Итак, далее считаем, что $x_0 \neq x_{n_m}$ для любого $m \in \mathbb{N}$. Так как семейство $\mathcal{P}$ является покрытием S, то существует номер k_0, такой, что $x_0 \in V_{k_0}$. Тогда существует номер m_0, такой, что для всех $m > m_0$ выполнено неравенство $n_m > k_0$. Рассмотрим конечное множество $F_0 = \{x_{n_1}, \ldots, x_{n_{m_0}}\}$. В силу первой аксиомы отделимости, множество F_0 является замкнутым как конечное объединение замкнутых одноточечных множеств. Так как $x_0 \notin F_0$, то существует окрестность $U(x_0) \in \tau$, такая, что $U(x_0) \cap F_0 = \varnothing$. Так как x_0 является предельной точкой множества E, то в окрестности $W_0 = U(x_0) \cap V_{k_0} \in \tau$ точки x_0 находится хотя бы один элемент множества E. Следовательно, существует номер m, такой, что $x_{n_m} \in W_0$. Так как первые m_0 элементов последовательности $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ не лежат в $U(x_0)$, то получаем, что $m > m_0$. Следовательно, справедливо неравенство $n_m > k_0$ и при этом выполнено включение $x_{n_m} \in W_0 \subset V_{k_0} \subset \subset \bigcup\limits_{k=1}^{n_m} V_k$, т. е. получили противоречие.

Обсудим взаимосвязь счетной и секвенциальной компактности множества топологического пространства. Покажем, что секвенциальная компактность влечет счетную компактность. Пусть (X, τ) — топологическое пространство, а $S \subset \subset X$ — секвенциально компактное множество. Предположим, рассуждая от противного, что S не является счетно-компактным. Тогда существует счетное открытое покрытие $\mathcal{P} = \{V_k\}_{k=1}^{\infty}$ множества S, не имеющее конечного подпокрытия. Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$ существует $x_n \in S$, такое, что $x_n \notin \bigcup\limits_{k=1}^{n} V_k$. В силу секвенциальной компактности S последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ имеет сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n_m}\}_{m=1}^{\infty}$ к точке $x_0 \in S$, т. е. $x_{n_m} \xrightarrow{\tau} x_0$ при $m \to \infty$. Так как $\mathcal{P}$ является покрытием множества S, то существует номер $k_0 \in \mathbb{N}$, такой, что $x_0 \in V_{k_0}$. Тогда существует номер $m_0 \in \mathbb{N}$, такой, что для всех $m \geq m_0$ выполнено включение $x_{n_m} \in V_{k_0}$. Так как $n_m \to \infty$ при $m \to \infty$, то $n_m \geq k_0$ при всех достаточно больших $m \geq m_0$ Но тогда при всех таких m выполнено соотношение $x_{n_m} \notin \bigcup\limits_{k=1}^{n_m} V_k \supset V_{k_0}$, т. е. $x_{n_m} \notin V_{k_0}$. Получили противоречие.

Задача. Привести пример секвенциально компактного топологического пространства, не являющегося компактным (см. задачи № 184 и № 185 из [1, глава III, § 3, с. 155]).

Выясним, при каких условиях счетно-компактное множество $S \subset X$ является секвенциально компактным? Пусть топологическое пространство (X, τ) удовлетворяет первой аксиоме отделимости (см. [3, глава II, § 5, с. 94]) и первой аксиоме счетности (см. [3, глава II, § 5, с. 89]), т. е. каждая точка $x \in X$ обладает счетной определяющей системой окрестностей. Напомним, что семейство окрестностей $\Big\{U_\alpha(x)\Big\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ точки x топологического пространства (X, τ) называется определяющим, если любая окрестность точки x содержит хотя бы одну окрестность этого семейства, т. е. для любой окрестности $V(x)$ точки x существует $\alpha \in \mathcal{A}$, такое, что $U_\alpha(x) \subset V(x)$. Тогда всякое счетно-компактное множество $S \subset X$ является секвенциально компактным. Предположим, рассуждая от противного, что S не является секвенциально компактным. Тогда существует последовательность $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset S$, не имеющая сходящейся к элементу S подпоследовательности. Покажем, что в этом случае для любого $x \in S$ существует его окрестность $U(x) \in \tau$, содержащая не более конечного набора элементов последовательности $\{x_n\}_{n=1}^\infty$. Действительно, пусть существует $x \in S$, любая окрестность которого содержит бесконечное число элементов последовательности $\{x_n\}_{n=1}^\infty$. Пусть $\{U_m\}_{m=1}^\infty$ — счетная определяющая система окрестностей точки x. Определим $W_m = \bigcap\limits_{k=1}^{m} U_k$. Ясно, что $\{W_m\}_{m=1}^\infty$ также является определяющей системой окрестностей точки x, при этом $W_{m+1} \subset W_m$ для любого $m \in \mathbb{N}$. Так как в окрестности W_m точки x находится бесконечное число элементов последовательности $\{x_n\}_{n=1}^\infty$, то существует строго возрастающая последовательность натуральных чисел n_m, такая, что $x_{n_m} \in W_m$ для любого $m \in \mathbb{N}$. Получили подпоследовательность $\{x_{n_m}\}_{m=1}^\infty$ рассматриваемой последовательности, которая сходится к x. Действительно, для любой окрестности $V(x) \in \tau$ точки x существует $m_0 \in \mathbb{N}$, такой, что $W_{m_0} \in V(x)$. Тогда для любого $m \geq m_0$ выполнено $x_{n_m} \in$ $\in W_m \subset W_{m_0} \subset V(x)$, т. е. $x_{n_m} \xrightarrow{\tau} x$ при $m \to \infty$. Получили противоречие с отсутствием у рассматриваемой последовательности сходящейся подпоследовательности.

Далее для произвольного $x \in S$ выделим все элементы последовательности $\{x_n\}_{n=1}^\infty$, входящие в $U(x)$ и не совпадающие с x. Обозначим их через $\{x_{n_k}\}_{k=1}^N$. Так как для любого $k \in \overline{1,N}$ одноточечное множество $\{x_{n_k}\}$ замкнуто, то существует окрестность $U_k(x) \in \tau$ точки x, такая, что $x_{n_k} \notin U_k(x)$. Тогда окрестность $V(x) = U(x) \cap U_1(x) \cap \ldots \cap U_N(x) \in \tau$ точки x не содержит элементов последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, за исключением, быть может, самой точки x. Следовательно, множество $S \backslash \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ открыто в S, т. е. существует $V_0 \in \tau$, такое, что $V_0 \cap S = S \backslash \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Для любого $n \in \mathbb{N}$ обозначим $V_n = V(x_n)$. Определим счетное открытое покрытие $\mathcal{P} = \{V_n\}_{n=0}^{\infty}$, которое по построению не имеет конечного подпокрытия. Получили противоречие.

Задача. Привести пример счетно-компактного топологического пространства, не удовлетворяющего первой аксиоме отделимости или первой аксиоме счетности и не являющегося секвенциально компактным.

Установим взаимосвязь секвенциальной компактности топологического пространства (X, τ) и наличия предельной точки у любого его бесконечного подмножества. Очевидно, что из секвенциальной компактности (X, τ) следует, что любое бесконечное подмножество $E \subset X$ имеет предельную точку в X. Действительно, в силу бесконечности множества E существует последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset E$, состоящая из различных элементов. В силу секвенциальной компактности (X, τ) эта последовательность имеет сходящуюся к некоторому $x_0 \in X$ подпоследовательность $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, т. е. $x_{n_k} \xrightarrow{\tau} x_0$ при $k \to \infty$. Следовательно, в любой окрестности x_0 находится бесконечно много элементов последовательности $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, отличных от x_0. Последнее означает, что точка $x_0 \in X$ является предельной для множества E.

Пример 9 показывает, что наличие предельной точки у любого непустого подмножества топологического пространства (X, τ) не влечет его секвенциальную компактность, если топология не удовлетворяет первой аксиоме отделимости. Пусть топологическое пространство (X, τ) удовлетворяет первой аксиоме отделимости (см. [3, глава II, § 5, с. 94]) и первой аксиоме счетности (см. [3, глава II, § 5, с. 89]). Пусть также любое бесконечное подмножество $E \subset X$ имеет в X предельную точку. Тогда топологическое пространство (X, τ) является секвенциально компактным. Это сразу следует из доказанных выше утверждений. Тем не менее проведем также независимое доказательство указанного факта. Рассмотрим произвольную последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$. Требуется найти ее сходящуюся подпоследовательность. Если рассматриваемая последовательность содержит стационарную подпоследовательность $x_{n_k} = x_0$ для любого $k \in \mathbb{N}$, то она является искомой. Если это не так, то существует подпоследовательность $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, состоящая из различных элементов (докажите это). По условию, бесконечное множество $E = \{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ имеет в X предельную точку x_0. Так как все элементы последовательности $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ различны, то без ограничения общности можно считать, что $x_0 \neq x_{n_k}$ при всех $k \in \mathbb{N}$. Пусть $\{U_m\}_{m=1}^{\infty}$ — счетная определяющая система окрестностей точки x_0. Тогда $W_m = \bigcap\limits_{k=1}^{m} U_k$ также образуют определяющую систему окрестностей x_0, причем $W_{m+1} \subset W_m$ для любого $m \in \mathbb{N}$. Существует номер $k_1 \in \mathbb{N}$, такой, что $x_{n_{k_1}} \in W_1$. Предположим, рассуждая по индукции, что для $m \in \mathbb{N}$ существуют номера $k_m > k_{m-1} > \ldots > k_1 \geq 1$ и $s_m > s_{m-1} > \ldots > s_1 = 1$, такие, что $x_{n_{k_r}} \in W_{s_r}$ для всех $r \in \overline{1, m}$. Так как одноточечное множество из X замкнуто в (X, τ) в силу первой аксиомы отделимости, а конечное объединение замкнутых множеств является замкнутым, то множество $E_m = \{x_{n_k}\}_{k=1}^{k_m}$ замкнуто в X и не содержит x_0. Следовательно, существует окрестность $V(x_0)$ точки x_0, не пересекающаяся с E_m, т. е. не содержащая первые k_m элементов последовательности $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$. Существует $s_{m+1} > s_m$, такой, что $W_{s_{m+1}} \subset V(x_0)$. Так как x_0 предельная точка E, то существует $k_{m+1} \in \mathbb{N}$, такой, что $x_{n_{k_{m+1}}} \in W_{s_{m+1}} \in V(x_0)$. Так как первые k_m элементов последовательности x_{n_k} не содержатся в $V(x_0)$, то $k_{m+1} > k_m$. Итак, построены подпоследовательность $\{x_{n_{k_r}}\}_{r=1}^{\infty}$ и подпоследовательность натуральных чисел $\{s_r\}_{r=1}^{\infty}$, такие, что $x_{n_{k_r}} \in W_{s_r}$ для любого $r \in \mathbb{N}$. Для любой окрестности $U(x_0)$ точки x_0 существует $m_0 \in \mathbb{N}$, такой, что $W_{m_0} \subset U(x_0)$. Далее, существует $r_0 \in \mathbb{N}$, что для любого $r \geq r_0$ выполнено неравенство $s_r \geq m_0$. Следовательно, $x_{n_{k_r}} \in W_{s_r} \subset W_{m_0} \subset U(x_0)$. Таким образом, $x_{n_{k_r}} \in U(x_0)$ для любого $r \geq r_0$, т. е. $x_{n_{k_r}} \xrightarrow{\tau} x_0$ при $r \to \infty$, что и требовалось.

Задача. Привести пример топологического пространства, не являющегося секвенциально компактным, удовлетворяющего первой аксиоме отделимости, не удовлетворяющего первой аксиоме счетности, в котором любое бесконечное подмножество имеет предельную точку.

Напомним, что топологическое пространство называется хаусдорфовым (или удовлетворяющим второй аксиоме отделимости, см. [3, глава II, § 5, с. 95]), если любые две различные точки этого пространства имеют непересекающиеся окрестности. Известно (см. теорему 4 из [3, глава II, § 6, с. 100]), что компактное подмножество S хаусдорфова топологического пространства (X, τ) является замкнутым в X, т. е. его дополнение открыто: $X \backslash S \in \tau$. Покажем на примере, что компактное подмножество топологического пространства, удовлетворяющего первой и неудовлетворяющего второй аксиоме отделимости, может быть незамкнутым.

Пример 10. *Незамкнутый компакт в топологическом пространстве, удовлетворяющем первой аксиоме отделимости.* Пусть $X = [0, 1]$. Непустое множество $V \subset X$ объявим открытым, если оно отличается от X не более чем на конечное множество точек. Докажите, что так определенная совокупность открытых множеств образует в X топологию τ. Ясно, что любое одноточечное подмножество $\{x\} \subset X$ замкнуто в (X, τ), так как его дополнение $X \backslash \{x\} \in \tau$ по определению τ. Отметим также, что (X, τ) не является хаусдорфовым, так как ни одна пара различных точек из X не имеет непересекающихся окрестностей. Действительно, если $x, y \in X$ и $x \neq y$, а $U \in \tau$ и $V \in \tau$ — окрестности x и y соответственно, то $U \cap V$ отличается от X не более чем на конечное множество точек, а значит не пусто. Далее определим множество $K \subset$ $\subset X$ вида $K = \{0\} \cup \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$. Так как K счетно, то $X \backslash K \notin \tau$, т. е. $X \backslash K$ не открыто, следовательно, K не замкнуто. Тем не менее K является компактом в (X, τ). Действительно, пусть $\{V_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ — произвольное открытое покрытие K. Тогда существует $\alpha_0 \in \mathcal{A}$, такое, что $0 \in V_{\alpha_0}$. Так как V_{α_0} отличается от X не более чем на конечное число точек, то существует $n_0 \in \mathbb{N}$, такое, что для любого $n > n_0$ справедливо включение $\frac{1}{n} \in V_{\alpha_0}$. Так как для любого $n \in \overline{1, n_0}$ существует $\alpha_n \in \mathcal{A}$, такое, что $\frac{1}{n} \in V_{\alpha_n}$, то получаем, что $K \subset \bigcup\limits_{n=0}^{n_0} V_{\alpha_n}$. Следовательно, $\{V_{\alpha_n}\}_{n=0}^{n_0}$ — конечное подпокрытие для K. Компактность K доказана.

Задача. Доказать, что топологическое пространство (X, τ) является компактным тогда и только тогда, когда любое его замкнутое собственное подмножество является компактным в (X, τ), или, что то же, любое его некомпактное собственное подмножество не является замкнутым в (X, τ).

Перейдем к рассмотрению компактных подмножеств метрического пространства (X, ρ). Известно, что компактность множества $S \subset X$ метрического пространства (X, ρ) эквивалентна полноте метрического пространства (S, ρ) и вполне ограниченности множества S в (X, ρ) (см. [3, глава II, § 7]). Напомним, что множество $S \subset X$ называется вполне ограниченным, если для любого $\varepsilon > 0$ существует конечный набор точек $x_1, \ldots, x_N$ множества S, такой, что $S \subset \bigcup\limits_{k=1}^{N} O_\varepsilon(x_k)$. Указанный набор точек $x_1, \ldots, x_N$ называется конечной ε-сетью множества S. Также компактность и секвенциальная компактность (а значит, и счетная компактность) подмножества метрического пространства эквивалентны.

Задача. Привести пример замкнутого ограниченного не вполне ограниченного множества из линейного нормированного пространства $C[0,1]$.

Пример 11. *Замкнутое вполне ограниченное некомпактное подмножество неполного метрического пространства.* В данном примере некомпактность подмножества S неполного метрического пространства (X, ρ) может получиться только вследствие неполноты метрического пространства (S, ρ), которая не обеспечивается замкнутостью S в (X, ρ). Рассмотрим $X = \mathbb{R}$, метрика в котором задается соотношением

$$\rho(x, y) = |e^x - e^y| \quad \text{для всех} \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Докажите, что для введенной функции ρ выполнены все аксиомы метрики. Метрическое пространство $(\mathbb{R}, \rho)$ не является полным. Действительно, рассмотрим последовательность $x_n = -n$, где $n \in \mathbb{N}$. Эта последовательность фундаментальна в $(\mathbb{R}, \rho)$, так как для любого $\varepsilon > 0$ выполнено $\rho(x_n, x_{n+p}) = |e^{-n} - e^{-n-p}| < e^{-n} < \varepsilon$ при любом $n > \ln \frac{1}{\varepsilon}$ и любом $p \in \mathbb{N}$. Тем не менее $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ не является сходящейся в $(\mathbb{R}, \rho)$, так как для любого $x \in \mathbb{R}$ выполнено $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, x) = e^x > 0$. Рассмотрим множество $S = (-\infty, 0]$. Так как $x_n = -n \in S$ для любого $n \in \mathbb{N}$, то метрическое пространство (S, ρ) не является полным. Следовательно, S не является компактным множеством в $(\mathbb{R}, \rho)$. Однако S является замкнутым и вполне ограниченным в $(\mathbb{R}, \rho)$. Покажем это.

Если $x \in \mathbb{R}$ — предельная точка S, то существует последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset S$, такая, что $\rho(x_n, x) \to 0$ при $n \to \infty$. Тогда $e^{x_n} \to e^x$ при $n \to \infty$. Так как функция натурального логарифма непрерывна на своей области определения $(0, +\infty)$, то $x_n = \ln e^{x_n} \to \ln e^x = x$ при $n \to \infty$. Так как $x_n \leq 0$ для любого $n \in \mathbb{N}$, то $x \leq 0$, т. е. $x \in S$. Таким образом, S замкнуто в метрическом пространстве $(\mathbb{R}, \rho)$.

Далее, для любого $\varepsilon > 0$ существует $x_0 < 0$, такое, что $e^{x_0} < \varepsilon$. Тогда справедливо неравенство $e^x < \varepsilon$ для любого $x \leq x_0$. По теореме Кантора, функция e^x равномерно непрерывна на отрезке $[x_0, 0]$. Следовательно, существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, такое, что для любых чисел $x, y \in [x_0, 0]$ вида $|x - y| < \delta$ выполнено неравенство $|e^x - e^y| < \varepsilon$. Пусть $x_0 < x_1 < \ldots < x_N = 0$ — разбиение отрезка $[x_0, 0]$ мелкости меньше δ. Тогда $\{x_k\}_{k=0}^{N}$ является конечной ε-сетью в S. Действительно, если $x \leq x_0$, то $\rho(x, x_0) = |e^x - e^{x_0}| < e^{x_0} < \varepsilon$, т. е. $x \in O_\varepsilon(x_0)$. Если же $x \in [x_{k-1}, x_k]$ для $k \in \overline{1, N}$, то $\rho(x, x_k) = |e^x - e^{x_k}| < \varepsilon$, т. е. $x \in O_\varepsilon(x_k)$. Таким образом, $S \subset \bigcup\limits_{k=0}^{N} O_\varepsilon(x_k)$, т. е. S является вполне ограниченным в (X, ρ).

Можно привести пример неполного линейного нормированного пространства, в котором существует замкнутое вполне ограниченное некомпактное подмножество. Рассмотрим линейное нормированное пространство $(\ell_1, \|\cdot\|_{\ell_2})$ из примера 7. Как показано в примере 7, это линейное нормированное пространство неполно. Рассмотрим множество

$$S = \left\{ x \in \ell_1 \;\middle|\; |x(k)| \leq \frac{1}{k} \quad \forall\, k \in \mathbb{N} \right\}.$$

Метрическое пространство (S, ρ), метрика в котором индуцирована $\|\cdot\|_{\ell_2}$-нормой, не является полным, так как последовательность $\{x_m\}_{m=1}^{\infty} \subset S$ вида $x_m(k) = \frac{1}{k}$ для $k \in \overline{1, m}$ и

$x_m(k) = 0$ для $k > m$ является фундаментальной и расходящейся в метрическом пространстве (S, ρ) (см. подробности в примере 7).

Покажем, что множество S замкнуто и вполне ограничено в $(\ell_1, \|\cdot\|_{\ell_2})$. Пусть $x \in \ell_1$ — предельная точка S. Тогда существует последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset S$, такая, что $\|x - x_n\|_{\ell_2} \to 0$ при $n \to \infty$. Следовательно, для любого $k \in \mathbb{N}$ получаем $|x(k)| \leq |x_n(k)| + |x(k) - x_n(k)| \leq \frac{1}{k} + \|x - x_n\|_{\ell_2} \to \frac{1}{k}$ при $n \to \infty$. Следовательно, $|x(k)| \leq \frac{1}{k}$ для любого $k \in \mathbb{N}$, т. е. $x \in S$. Таким образом, S замкнуто.

Далее, для любого $\varepsilon > 0$ определим $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, такое, что $\sqrt{\sum\limits_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{k^2}} < \frac{\varepsilon}{2}$. Рассмотрим для числа $\delta = \frac{\varepsilon\sqrt{6}}{2\pi}$ разбиение $-1 = z_0 < z_1 < \ldots < z_M = 1$ отрезка $[-1, 1]$ мелкости меньше δ. Так как для любого $x \in S$ и любого $k \in \mathbb{N}$ выполнено $k\,x(k) \in [-1, 1]$, то существует $n_k \in \overline{0, M}$, такое, что $|k\,x(k) - z_{n_k}| < \delta$. Определим конечное множество S_ε, состоящее из последовательностей $y = \{y(k)\}_{k=1}^{\infty}$ вида: $y(k) = 0$ для $k > N$ и $y(k) = \frac{z_{n_k}}{k}$ для $k \in \overline{1, N}$, где $n_k \in \overline{0, M}$. Количество элементов S_ε не превышает $(M+1)^N$. По построению $S_\varepsilon \subset S$, причем для любого $x \in S$ существует $y \in S_\varepsilon$, такой, что для любого $k \in \overline{1, N}$ выполнено неравенство $|x(k) - y(k)| < \frac{\delta}{k}$. Тогда получаем

$$\|x - y\|_{\ell_2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{N} \Big(x(k) - y(k)\Big)^2} + \sqrt{\sum_{k=N+1}^{\infty} \Big(x(k)\Big)^2} <$$

$$< \delta \sqrt{\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^2}} + \sqrt{\sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{k^2}} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Таким образом, $S \subset \bigcup\limits_{y \in S_\varepsilon} O_\varepsilon(y)$, т. е. S_ε — конечная ε-сеть для множества S.

Задача. Доказать, что в полном метрическом пространстве (X, ρ) множество $S \subset X$ замкнуто в (X, ρ) тогда и только тогда, когда метрическое пространство (S, ρ) полно.

§ 3. Линейные нормированные пространства и линейные операторы

Пример 12. *Ближайший элемент для заданного вектора в замкнутом множестве.* Пусть $(X, \| \cdot \|)$ — линейное нормированное пространство, множество $M \subset X$ является замкнутым. Для любого вектора $x \in X$ расстоянием от x до множества M назовем неотрицательное число

$$\rho(x, M) = \inf_{y \in M} \|x - y\|.$$

Вектор $y \in M$ назовем ближайшим к заданному вектору x, если справедливо равенство

$$\|x - y\| = \rho(x, M).$$

Если линейное нормированное пространство X является конечномерным, то для любого вектора $x \in X$ существует вектор $y \in M$, ближайший к вектору x. Действительно, по определению нижней грани для вектора x существует минимизирующая последовательность $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset M$, т. е. $\rho(x, M) = \lim\limits_{n \to \infty} \|x - y_n\|$. Так как $\|y_n\| \leq \|x\| + \|x - y_n\| \leq \|x\| + \rho(x, M) + 1$ для всех достаточно больших номеров n, то последовательность $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ является ограниченной в конечномерном пространстве X. По теореме Больцано—Вейерштрасса, она имеет сходящуюся к некоторому вектору $y \in X$ подпоследовательность $\{y_{n_m}\}_{m=1}^{\infty}$. Так как множество M является замкнутым, то $y \in M$. При этом $\rho(x, M) = \lim\limits_{m\to\infty} \|x - y_{n_m}\| = \|x - y\|$. Следовательно, вектор $y \in M$ является ближайшим к вектору x в множестве M.

Если же пространство X бесконечномерно, то ближайшего элемента для вектора $x \in X$ в замкнутом ограниченном множестве $M \subset X$ может и не оказаться. Рассмотрим пространство $(\ell_2, \|\cdot\|_{\ell_2})$ и множество $M \subset \ell_2$, состоящее из всех векторов $e_n \in \ell_2$ вида $e_n(k) = \delta_{nk}$ для всех номеров n, k. Множество M ограничено, так как $\|e_n\|_{\ell_2} = 1$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Множество M замкнуто. Действительно, если $y \in \ell_2$ является точкой прикосновения множества M, то существует последовательность натуральных чисел n_m, такая, что $\|e_{n_m} - z\|_{\ell_2} \to 0$ при $m \to \infty$. Если $n_m \neq n_k$, то $\|e_{n_m} - e_{n_k}\|_{\ell_2} = \sqrt{2}$. Так как сходящаяся последовательность e_{n_m} является фундаментальной, то существует номер m_0, такой, что для всех $m \geq m_0$ выполнено $n_m = n_{m_0}$. Тогда $z = e_{n_{m_0}} \in M$, т. е. множество M является замкнутым. Рассмотрим элемент $x \in \ell_2$ вида $x(k) = -\frac{1}{k}$ для любого $k \in \mathbb{N}$. Тогда для любого номера n получаем

$$\|x - e_n\|_{\ell_2} = \sqrt{\sum_{\substack{k=1\\k\neq n}}^{\infty} \frac{1}{k^2} + \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2} = \sqrt{\frac{\pi^2}{6} + 1 + \frac{2}{n}}.$$

Следовательно, $\rho(x, M) = \lim\limits_{n\to\infty} \|x - e_n\|_{\ell_2} = \sqrt{\frac{\pi^2}{6} + 1} < \|x - e_m\|_{\ell_2}$ для любого $m \in \mathbb{N}$. Таким образом, для рассмотренного элемента $x \in \ell_2$ не существует ближайшего элемента в замкнутом ограниченном множестве $M \subset \ell_2$.

Можно привести примеры выпуклых замкнутых ограниченных множеств из X, не имеющих ближайшего элемента для заданного вектора $x \in X$. Следующий пример предложил студент 574 группы МФТИ Р. Гимадеев. В пространстве $(\ell_1, \|\cdot\|_{\ell_1})$ рассмотрим базис $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ вида $e_n(k) = \delta_{nk}$ для всех $n, k \in \mathbb{N}$ и определим множество $S = \left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right) e_n\right\}_{n=1}^\infty$. В качестве выпуклого замкнутого множества из ℓ_1 рассмотрим замыкание в ℓ_1 выпуклой оболочки множества S, т. е. $M = \overline{\operatorname{conv}} S$. Напомним, что выпуклой оболочкой множества линейного пространства называется совокупность всевозможных конечных выпуклых комбинаций точек этого множества, т. е. выпуклой оболочкой множества S является множество

$$\operatorname{conv} S = \left\{ \sum_{k=1}^N \alpha_k x_k \;\middle|\; N \in \mathbb{N},\ {\scriptstyle x_1 \in S, \ldots, x_N \in S, \atop \scriptstyle \alpha_1 \geq 0, \ldots, \alpha_N \geq 0,}\ \sum_{k=1}^N \alpha_k = 1 \right\}.$$

Будем изучать расстояние от нуля до множества M, т. е. $\rho(0, M) = \inf\limits_{z \in M} \|z\|_{\ell_1}$. Рассмотрим произвольную точку $z \in M = \overline{\operatorname{conv}} S$. Так как все элементы множества S имеют неотрицательные компоненты, то тем же свойством обладают элементы множеств $\operatorname{conv} S$ и $\overline{\operatorname{conv}} S$. Следовательно, $z(k) \geq 0$ для любого $k \in \mathbb{N}$. Определим для любого номера k число $\beta_k = \frac{z(k)}{1 + \frac{1}{k}} \geq 0$. Тогда получаем $z = \sum\limits_{k=1}^\infty z(k) e_k = \sum\limits_{k=1}^\infty \left(1 + \frac{1}{k}\right) \beta_k e_k$. Для любого $\varepsilon > 0$ существуют $N \in \mathbb{N}$, неотрицательные числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$ вида $\sum\limits_{k=1}^N \alpha_k = 1$, такие, что

$$\varepsilon \geq \left\| z - \sum_{k=1}^N \alpha_k \left(1 + \tfrac{1}{k}\right) e_k \right\|_{\ell_1} = \\ = \sum_{k=1}^N \left(1 + \tfrac{1}{k}\right) |\beta_k - \alpha_k| + \sum_{k=N+1}^\infty \left(1 + \tfrac{1}{k}\right) \beta_k \geq \\ \geq \sum_{k=1}^N |\beta_k - \alpha_k| + \sum_{k=N+1}^\infty \beta_k.$$

Следовательно, получаем неравенства

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k &\leq \varepsilon+\sum_{k=1}^{N}\alpha_k=\varepsilon+1,\\ \sum_{k=1}^{\infty}\beta_k &\geq -\varepsilon+\sum_{k=1}^{N}\alpha_k+2\sum_{k=N+1}^{\infty}\beta_k \geq -\varepsilon+1.\end{aligned}$$

В силу произвольности $\varepsilon>0$, справедливо равенство $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\beta_k=$ $=1$. Таким образом, получаем неравенство

$$\|z\|_{\ell_1}=\sum_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)\beta_k>\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k=1.$$

Следовательно, справедлива оценка $\rho(0,M)\geq 1$. С другой стороны, имеем неравенства

$$\rho(0,M)\leq\rho(0,S)\leq\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)=1.$$

Таким образом, $\rho(0,M)=1<\|z\|_1$ для любого $z\in M$, т. е. нулевой элемент из ℓ_1 не имеет ближайшего элемента в выпуклом замкнутом множестве M.

Другой пример выпуклого замкнутого множества в пространстве $(\ell_\infty,\|\cdot\|_{\ell_\infty})$, не имеющего ближайшего элемента для нулевого элемента, предложил студент 574 группы МФТИ В. Кузнецов. В пространстве $(\ell_\infty,\|\cdot\|_{\ell_\infty})$ рассмотрим множество $S=\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\ell_\infty$, где для любого номера n

$$x_n(k)=\begin{cases}0, & 1\leq k\leq n,\\ 1+\frac{1}{n}, & k>n.\end{cases}$$

Рассмотрим выпуклое замкнутое множество $M=\overline{\operatorname{conv}}\,S$. Рассмотрим произвольный элемент $z\in M$. Тогда для любого $\varepsilon>0$ существует номер $m(\varepsilon)$, такой, что $z(m(\varepsilon))\geq 1-\varepsilon$.

Действительно, если предположить противное, то найдется число $\delta_0 > 0$, такое, что для любого номера m выполнено неравенство $z(m) < 1 - \delta_0$. Так как существует элемент $y_0 \in$ $\in \operatorname{conv} S$, такой, что $\|z - y_0\|_\infty \le \delta_0$, а для элемента y_0 существует номер N, неотрицательные числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$ вида $\sum\limits_{k=1}^{N} \alpha_k = 1$, такие, что $y_0 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k x_k$, то для любого номера $m > N$ получаем противоречие:

$$\delta_0 \ge \|y_0 - z\|_\infty \ge |y_0(m) - z(m)| \ge$$
$$\ge \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \left(1 + \tfrac{1}{k}\right) - z(m) > 1 + \sum_{k=1}^{N} \tfrac{\alpha_k}{k} - 1 + \delta_0 > \delta_0.$$

Итак, для любого числа $\varepsilon > 0$ существует номер $m(\varepsilon)$ вида $z(m(\varepsilon)) \ge 1 - \varepsilon$. Выберем $\varepsilon_0 = \frac{1}{10}$ и обозначим номер $m_0 =$ $= m(\varepsilon_0)$. Так как z является точкой прикосновения множества $\operatorname{conv} S$, то для любого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ существует $y_\varepsilon \in \operatorname{conv} S$, такой, что $\|z - y_\varepsilon\|_\infty \le \varepsilon$. Следовательно, выполнены неравенства $y_\varepsilon(m_0) \ge 1 - \varepsilon_0 - \varepsilon \ge 1 - 2\varepsilon_0 = \frac{4}{5}$. При этом, по определению выпуклой оболочки, существует номер N_ε, неотрицательные числа $\alpha_1^\varepsilon, \ldots \alpha_{N_\varepsilon}^\varepsilon$ вида $\sum\limits_{k=1}^{N_\varepsilon} \alpha_k^\varepsilon = 1$, такие, что $y_\varepsilon = \sum\limits_{k=1}^{N_\varepsilon} \alpha_k^\varepsilon x_k$. Без ограничения общности можем считать $N_\varepsilon > m_0$. Если предположить, что выполнено неравенство $\sum\limits_{k=1}^{m_0-1} \alpha_k^\varepsilon < \frac{1}{4}$, то получим неравенство

$$y_\varepsilon(m_0) = \sum_{k=1}^{m_0-1} \alpha_k^\varepsilon x_k(m_0) = \sum_{k=1}^{m_0-1} \alpha_k^\varepsilon \left(1 + \tfrac{1}{k}\right) \le \sum_{k=1}^{m_0-1} 2\alpha_k^\varepsilon < \tfrac{1}{2}.$$

Однако выше показано, что $y_\varepsilon(m_0) \ge \frac{4}{5} > \frac{1}{2}$. Полученное противоречие показывает, что выполнено неравенство $\sum\limits_{k=1}^{m_0-1} \alpha_k^\varepsilon \ge$

$\geq \frac{1}{4}$. Следовательно, для любого номера $s > N_\varepsilon$ получаем

$$y_\varepsilon(s) = \sum_{k=1}^{m_0-1} \alpha_k^\varepsilon \left(1 + \tfrac{1}{k}\right) + \sum_{k=m_0}^{N_\varepsilon} \alpha_k^\varepsilon \left(1 + \tfrac{1}{k}\right) \geq$$

$$\geq \sum_{k=1}^{m_0-1} \alpha_k^\varepsilon \left(1 + \tfrac{1}{m_0}\right) + \sum_{k=m_0}^{N_\varepsilon} \alpha_k^\varepsilon = 1 + \sum_{k=1}^{m_0-1} \tfrac{\alpha_k^\varepsilon}{m_0} \geq 1 + \tfrac{1}{4m_0}.$$

Следовательно, при $\varepsilon \in \left(0, \frac{1}{4m_0}\right)$ получаем строгое неравенство

$$\|z\|_\infty \geq \|y_\varepsilon\|_\infty - \varepsilon \geq 1 + \frac{1}{4m_0} - \varepsilon > 1.$$

Таким образом, справедливы неравенства

$$1 \leq \rho(0, M) \leq \rho(0, S) \leq \lim_{k\to\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right) = 1.$$

Следовательно, $\rho(0, M) = 1 < \|z\|_\infty$ для любого $z \in M$, т. е. нулевой элемент из ℓ_∞ не имеет ближайшего элемента в выпуклом замкнутом множестве M.

Задача. В пространстве $C[0,1]$ привести пример выпуклого замкнутого множества, не имеющего ближайшего элемента для нулевой функции.

Пример 13. *Замкнутое подпространство, расстояние до которого от любого элемента единичной сферы меньше единицы.* Пусть $(X, \|\cdot\|)$ — линейное нормированное пространство, а $M \subset X$ — замкнутое подпространство, причем $M \neq X$. Как следует из леммы Рисса о почти перпендикуляре (см. [6, глава I, § 3, с. 32]), для любого $\varepsilon > 0$ существует $x_\varepsilon \in X$, $\|x_\varepsilon\| = 1$, такой, что $\rho(x_\varepsilon, M) > 1 - \varepsilon$. Приведем пример линейного нормированного пространства $(X, \|\cdot\|)$ и его замкнутого подпространства $M \neq X$, такого, что для любого $x \in X$, $\|x\| = 1$, выполнено неравенство $\rho(x, M) < 1$. Подпространство M будем искать в виде ядра ненулевого линейного непрерывного функционала $f\colon X \to \mathbb{C}$, т. е. в виде

$M = \operatorname{Ker} f = \{\ x \in X \mid f(x) = 0\ \}$. Как известно, для любого $x \notin \operatorname{Ker} f$ справедливо равенство $X = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Lin}\{x\}$. Действительно, для любого $z \in X$ справедливо включение $y = z - \frac{f(z)}{f(x)}x \in \operatorname{Ker} f$. Следовательно, $z = y + \frac{f(z)}{f(x)}x \in \operatorname{Ker} f + {} + \operatorname{Lin}\{x\}$. Далее, если $z \in \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Lin}\{x\}$, то $z = \alpha x$ для подходящего $\alpha \in \mathbb{C}$, и $f(z) = 0 = \alpha f(x)$. Так как $f(x) \neq 0$, то $\alpha = 0$ и $z = 0$. Следовательно, $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Lin}\{x\} = \{0\}$, а значит, сумма подпространств $\operatorname{Ker} f$ и $\operatorname{Lin}\{x\}$ прямая. Получаем:

$$\|f\| = \sup_{z\neq 0} \frac{|f(z)|}{\|z\|} = \sup_{\substack{\alpha\neq 0\\ y\in\operatorname{Ker} f}} \frac{|\alpha|\,|f(x)|}{\|y+\alpha x\|} =$$
$$= \frac{|f(x)|}{\inf\limits_{\substack{\alpha\neq 0\\ y\in\operatorname{Ker} f}} \left\|\frac{y}{\alpha}+x\right\|} = \frac{|f(x)}{\inf\limits_{w\in\operatorname{Ker} f}\|x-w\|} = \frac{|f(x)|}{\rho(x,\operatorname{Ker} f)}.$$

Таким образом, $\rho(x, \operatorname{Ker} f) = \frac{|f(x)|}{\|f\|} < 1$ для любого $\|x\| = 1$ тогда и только тогда, когда функционал f не достигает своей нормы: $|f(x)| < \|f\|$ для любого $\|x\| = 1$, или, что то же, $\frac{\|f(z)\|}{\|z\|} < \|f\|$ для любого $z \neq 0$. Предъявим такой функционал в банаховом пространстве ℓ_1. Рассмотрим $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k\,x(k)}{k+1}$ для любого $x \in \ell_1$ Тогда справедливы неравенства

$$|f(x)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\,|x(k)|}{k+1} \leq \sum_{k=1}^{\infty} |x(k)| = \|x\|_{\ell_1},$$

следовательно, $\|f\| \leq 1$. С другой стороны, для любого $k \in \mathbb{N}$ рассмотрим элемент $e_k \in \ell_1$, где $e_k(s) = \delta_{ks}$ для всех $k, s \in \mathbb{N}$. Получаем $1 \geq \|f\| \geq |f(e_k)| = \frac{k}{k+1} \to 1$ при $k \to \infty$. Итак, $\|f\| = 1$. При этом для любого $z \in \ell_1$, $z \neq 0$ получаем

$$|f(z)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\,|z(k)|}{k+1} < \sum_{k=1}^{\infty} |z(k)| = \|z\|_{\ell_1},$$

так как $\frac{k}{k+1} < 1$ для любого $k \in \mathbb{N}$, и существует $k_0 \in \mathbb{N}$, такой, что $z(k_0) \neq 0$. Таким образом, для любого $z \neq 0$ из ℓ_1 справедливо строгое неравенство $\frac{|f(z)|}{\|z\|} < 1 = \|f\|$, т. е. для $M = \operatorname{Ker} f$ справедливо строгое неравенство $\rho(x, M) < 1$ для любого $\|x\| = 1$.

Задача. Привести пример линейного непрерывного функционала $f\colon \ell_\infty \to \mathbb{C}$, не достигающего своей нормы.

Пример 14. *Существование линейного оператора с бесконечной нормой.* Пусть $(X, \|\cdot\|_X)$ — бесконечномерное линейное нормированное пространство, а $(Y, \|\cdot\|_Y)$ — ненулевое линейное нормированное пространство. Тогда существует линейный оператор $A\colon X \to Y$, норма которого бесконечна, т. е. $\|A\| = \sup\limits_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X} = +\infty$. Покажем это. По условию, существует $y_0 \in Y$, такой, что $y_0 \neq 0$. Далее, в силу бесконечномерности X существует счетная совокупность $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ линейно независимых элементов единичной сферы из X. Пусть $L = \operatorname{Lin}\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ — подпространство в X. Покажем, что существует подпространство $M \subset X$, такое, что $L \oplus M = X$. Рассмотрим семейство $\mathcal{P}$ всех подпространств из X, имеющих с L тривиальное пересечение. Так как нулевое подпространство принадлежит $\mathcal{P}$, то семейство $\mathcal{P} \neq \varnothing$. Частично упорядочим $\mathcal{P}$ относительно теоретико-множественного включения. По теореме Хаусдорфа о максимальности [5, приложение A1, с. 412], в $\mathcal{P}$ существует максимальное линейно упорядоченное подмножество $\mathcal{S}$. Рассмотрим множество $M = \bigcup\limits_{N \in \mathcal{S}} N$. Покажем, что M является подпространством X. Если $x_1, x_2 \in M$, то существуют подпространства $N_1 \in \mathcal{S}$ и $N_2 \in \mathcal{S}$, такие, что $x_k \in N_k$, $k = \overline{1, 2}$. В силу линейной упорядоченности $\mathcal{S}$ без ограничения общности можно считать, что $N_1 \subset N_2$. Тогда $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \subset N_2 \subset M$, что и требовалось. Далее, если $x \in M \cap L$, то $x \in N \cap L$ для подходящего $N \in \mathcal{S}$. Так как по построению $N \cap L = \{0\}$ для любого $N \in \mathcal{S}$, то $x = 0$, что означает $M \cap L = \{0\}$. Покажем наконец, что $L + M = X$. Предположим, рассуждая от противного, что $L + M \neq X$. Тогда существует $x_0 \in X$, такой, что $x_0 \notin L + M$. В частности, $x_0 \notin L$ и $x_0 \notin M$. Рассмотрим подпространство $M_0 = M + \mathrm{Lin}\{x_0\}$. Покажем, что $M_0 \cap L = \{0\}$. Если $z \in M_0 \cap L$, то существуют $y \in M$ и $\alpha \in \mathbb{C}$, такие, что $z = y + \alpha x_0 \in L$. Если $\alpha \neq 0$, то получаем $x_0 \in L - \frac{y}{\alpha} \subset L + M$ — противоречие. Следовательно, $\alpha = 0$, и $z = y \in M \cap L = \{0\}$, что и требовалось. Таким образом, $M_0 \in \mathcal{P}$, причем по построению $M_0 \notin \mathcal{S}$, но $M_0 \supset N$ для любого $N \in \mathcal{S}$. Получили противоречие с максимальностью семейства $\mathcal{S}$.

Итак, существует подпространство $M \subset X$, такое, что $L \oplus M = X$. Определим линейный оператор $A\colon X \to Y$, такой, что $A(x) = 0$ для любого $x \in M$, а $A(e_n) = n$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Так как для любого $x \in X$ существуют единственные $y(x) \in L$ и $z(x) \in M$, такие, что $x = y(x) + z(x)$, а вектор $y(x)$ раскладывается единственным образом в конечную линейную комбинацию векторов $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$, то оператор A определен однозначно. При этом $\|A\| \geq \|A(e_n)\|_Y = n \to +\infty$ при $n \to \infty$, т. е. $\|A\| = +\infty$.

Задача. Пусть $(X, \|\cdot\|_X)$ и $(Y, \|\cdot\|_Y)$ — линейные нормированные пространства, причем X конечномерно. Доказать, что любой линейный оператор $A\colon X \to Y$ будет ограниченным, т. е. $\|A\| < +\infty$.

Пример 15. *Неполнота линейного нормированного пространства линейных операторов.* Пусть $(X, \|\cdot\|_X)$ и $(Y, \|\cdot\|_Y)$ — линейные нормированные пространства. Рассмотрим линейное нормированное пространство $\mathcal{L}(X, Y)$, состоящее из линейных ограниченных операторов $A\colon X \to Y$, нормированных операторной нормой $\|A\| = \sup\limits_{\|x\|_X = 1} \|Ax\|_Y$ (см. [6, глава III, § 11]). Известно, что полнота пространства $(Y, \|\cdot\|_Y)$ влечет полноту пространства $\mathcal{L}(X, Y)$ (см. теорему 2 из [6, глава III, § 11, с. 120]). Покажем, что в случае, когда пространство $(Y, \|\cdot\|_Y)$ не является полным, а пространство X отлично от нулевого, пространство $\mathcal{L}(X, Y)$ не полно. Для этого построим фундаментальную расходящуюся в $\mathcal{L}(X, Y)$ последовательность операторов $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{L}(X, Y)$. В силу неполноты пространства Y существует фундаментальноя расходящаяся в Y последовательность $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset Y$. Далее, существует нетривиальный $x_0 \in X$, т. е. $x_0 \neq 0$. Пусть $L_0 = \operatorname{Lin}\{x_0\}$ — одномерное подпространство в X. По лемме 4.21 из [5, глава 4, с. 120], подпространство L_0 дополняемо в X замкнутым подпространством $N \subset X$, т. е. $X = L_0 \oplus N$. Для любого $n \in \mathbb{N}$ определим линейный оператор $A_n : X \to Y$ так, что $A_n(z) = 0$ для любого $z \in N$, а $A_n(x_0) = y_n$. Так как для любого $x \in X$ существуют единственные $z \in N$ и $\alpha \in \mathbb{C}$, такие, что $x = z + \alpha x_0$, то $A_n(x) = \alpha y_n$. Покажем, что $A_n \in \mathcal{L}(X, Y)$. Имеем

$$\|A_n\| = \sup_{\substack{\alpha \neq 0 \\ z \in N}} \frac{|\alpha| \, \|y_n\|_Y}{\|z + \alpha x_0\|_X} = \sup_{\substack{\alpha \neq 0 \\ z \in N}} \frac{\|y_n\|_Y}{\left\|\frac{z}{\alpha} + x_0\right\|_X} = \frac{\|y_n\|_Y}{\inf\limits_{z \in N} \|x_0 - z\|_X} = \frac{\|y_n\|_Y}{\rho(x_0, N)}.$$

Так как N замкнуто, а $x_0 \notin N$, то $\rho(x_0, N) > 0$, поэтому $\|A_n\| < +\infty$, т. е. $A_n \in \mathcal{L}(X, Y)$. Аналогично можно показать (проделайте необходимые выкладки самостоятельно в качестве упражнения), что $\|A_n - A_m\| = \frac{\|y_n - y_m\|_Y}{\rho(x_0, N)}$. Отсюда следует, что последовательность операторов $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальна в $\mathcal{L}(X, Y)$, так как последовательность $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ фундаментальна в Y. Если предположить, что $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится в $\mathcal{L}(X, Y)$ к оператору $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, т. е. $\|A_n - A\| \to 0$ при $n \to \infty$, то отсюда сразу получаем поточечную сходимость последовательности $\{A_n x\}_{n=1}^{\infty}$ в Y к вектору Ax для любого $x \in X$, так как $\|A_n x - Ax\|_Y \leq \|A_n - A\| \, \|x\|_X \to 0$

при $n \to \infty$. Однако для $x = x_0$ последовательность $A_n x_0 = y_n$ является расходящейся в Y по условию. Следовательно, фундаментальная в $\mathcal{L}(X,Y)$ последовательность $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ является расходящейся.

Задача. Пусть $(X, \|\cdot\|_X)$ и $(Z, \|\cdot\|_Z)$ — линейные нормированные пространства, причем X не является нулевым, а Z является полным. Пусть $Y \subset Z$ — всюду плотное в Z незамкнутое подпространство. Доказать, что линейное нормированное пространство $\mathcal{L}(X,Y)$ является неполным, а его пополнением является линейное нормированное пространство $\mathcal{L}(X,Z)$.

Пример 16. *Неограниченная последовательность линейных непрерывных операторов, ограниченная поточечно.*
Пусть $(X, \|\cdot\|_X)$ и $(Y, \|\cdot\|_Y)$ — линейные нормированные пространства. Напомним, что последовательность операторов $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{L}(X,Y)$ называется поточечно ограниченной, если для любого $x \in X$ последовательность $\{A_n x\}_{n=1}^{\infty}$ ограничена в Y. Если пространство X является полным, то из поточечной ограниченности последовательности $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ следует ее ограниченность в $\mathcal{L}(X,Y)$, т. е. существует $R > 0$, такое, что для любого $n \in \mathbb{N}$ выполнено $\|A_n\| \le R$. В этом состоит утверждение теоремы Банаха—Штейнгауза (см. теорему 2.6 из [5, глава 2, с. 55]). Если же пространство X не является полным, то поточечная ограниченность уже не влечет ограниченность последовательности операторов по операторной норме. Приведем соответствующий пример. Пусть $X = Y = \ell_1$, $\|\cdot\|_X = \|\cdot\|_{\ell_2}$, $\|\cdot\|_Y = \|\cdot\|_{\ell_1}$. Рассмотрим последовательность операторов $A_n\colon X \to Y$ вида

$$(A_n x)(k) = \begin{cases} \frac{x(k)}{\sqrt{k}} &, \quad 1 \le k \le n, \\ \quad 0 &, \quad k > n\,. \end{cases}$$

Покажем, что $A_n \in \mathcal{L}(X,Y)$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Действительно, в силу неравенства Коши—Буняковского для любого $x \in \ell_1$ получаем

$$\|A_n x\|_{\ell_1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{|x(k)|}{\sqrt{k}} \le \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}} \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \Big(x(k)\Big)^2} \le \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}\, \|x\|_{\ell_2}.$$

Следовательно, $\|A_n\| \le \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}$. Далее, рассмотрев последовательность $x_n \in \ell_1$ вида $x_n(k) = \frac{1}{\sqrt{k}}$ для $1 \le k \le n$ и $x_n(k) = 0$ для $k > n$, получаем

$$\|A_n\| \ge \frac{\|A_n x_n\|_{\ell_1}}{\|x_n\|_{\ell_2}} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}{\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}\,.$$

Следовательно, $\|A_n\| = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Тем самым доказано, что $A_n \in \mathcal{L}(X,Y)$ для любого $n \in \mathbb{N}$ и $\|A_n\| \to \infty$ при $n \to \infty$, т. е последовательность $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ не является ограниченной в $\mathcal{L}(X,Y)$. Тем не менее последовательность $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ является ограниченной поточечно, так как для любого $x \in \ell_1$ имеем

$$\|A_n x\|_{\ell_1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{|x(k)|}{\sqrt{k}} \le \sum_{k=1}^{n} |x(k)| \le \|x\|_{\ell_1} < +\infty.$$

Задача. Привести пример неполного линейного нормированного пространства $(X, \|\cdot\|_X)$, банахова пространства $(Y, \|\cdot\|_Y)$ и последовательности операторов $A_n \in \mathcal{L}(X,Y)$ поточечно сходящейся к неограниченному линейному оператору $A\colon X \to Y$, т. е. для любого $x \in X$ существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} A_n x = Ax$, но $A \notin \mathcal{L}(X,Y)$. Сравнить полученный пример с утверждением теоремы 2.8 из [5, глава 2, с. 56].

Пример 17. *Существование линейного правого обратного оператора.* Пусть X и Y — линейные пространства, линейный оператор $A\colon X \to Y$. Определим образ оператора $\operatorname{Im} A = \{\ Ax \mid x \in X\ \}$, являющийся линейным подпространством в Y. Оператор $A^{-1}_{\text{пр.}}\colon \operatorname{Im} A \to X$ называется правым обратным к A, если для любого $y \in \operatorname{Im} A$ выполнено $A\left(A^{-1}_{\text{пр.}}(y)\right) = y$. Так как для любого $y \in \operatorname{Im} A$ существует (вообще говоря, не единственный) вектор $x(y) \in X$, такой, что $A(x(y)) = y$, то правый обратный оператор всегда существует и определяется по формуле $A^{-1}_{\text{пр.}}(y) = x(y)$. Это означает, что правый обратный оператор может определяться не единственным образом и даже может не являться линейным. Приведите в качестве упражнения пример линейного оператора A, который имеет несколько нелинейных правых обратных операторов. Покажем, что всегда можно выбрать линейный правый обратный оператор (конечно, неединственным образом). Если $\operatorname{Im} A = \{0\}$, то нулевой оператор является искомым линейным правым обратным оператором. Пусть $\operatorname{Im} A \neq \neq \{0\}$. Рассмотрим в ненулевом линейном пространстве $\operatorname{Im} A$ базис Гамеля $\mathcal{G}$ (см. пример 8). Для любого $e \in \mathcal{G}$ существует $x(e) \in X$, такой, что $A(x(e)) = e$. Определим линейный оператор $B\colon \operatorname{Im} A \to X$ так, что $B(e) = x(e)$ для любого $t \in \in G$. Так как для любого $y \in \operatorname{Im} A$ существует единственный набор элементов $\{e_n\}_{n=1}^{N} \subset \mathcal{G}$ и чисел $\{\alpha_n\}_{n=1}^{N}$, таких, что $y = \sum\limits_{n=1}^{N} \alpha_n e_n$, то определяем $B(y) = \sum\limits_{n=1}^{N} \alpha_n x(e_n)$. При этом $A(B(y)) = \sum\limits_{n=1}^{N} \alpha_n A(x(e_n)) = \sum\limits_{n=1}^{N} \alpha_n e_n = y$, т. е. оператор B является линейным правым обратным для линейного оператора A.

Задача. Докажите, что линейный оператор $A\colon X \to Y$ имеет единственный правый обратный оператор тогда и только тогда, когда $\operatorname{Ker} A = \{0\}$. Докажите, что в этом случае для любого $x \in X$ выполнено $A^{-1}_{\text{пр.}}\Big(A(x)\Big) = x$, т. е. правый обратный оператор является также и левым обратным, а также является линейным оператором.

Пример 18. *Линейный ограниченный сюръективный оператор, не являющийся открытым отображением.*
Пусть $(X, \|\cdot\|_X)$ и $(Y, \|\cdot\|_Y)$ — линейные нормированные пространства, а оператор $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ является сюръективным, т. е. $\operatorname{Im} A = Y$. Если при этом пространства X и Y являются полными, то оператор A является открытым отображением, т. е. образ любого открытого множества из X под действием оператора A является открытым множеством в Y. В этом состоит теорема Банаха об открытом отображении (см. теорему 2.11 из [5, глава 2, с. 58]). Покажем на примерах, что отказ от полноты пространства X или Y ведет к нарушению утверждения теоремы, т. е. в этом случае сюръективный оператор $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ может не быть открытым отображением.

Рассмотрим сначала случай, когда X полное, а Y не является полным. Пусть $(X, \|\cdot\|_X) = (\ell_1, \|\cdot\|_{\ell_1})$, $(Y, \|\cdot\|_Y) = (\ell_1, \|\cdot\|_{\ell_2})$. Пусть $A\colon X \to Y$ тождественное отображение, т. е. $Ax = x$ для любого $x \in \ell_1$. Тогда для любого $x \in \ell_1$ имеем $\|Ax\|_{\ell_2} = \|x\|_{\ell_2} \le \|x\|_{\ell_1}$, т. е. $\|A\| \le 1$ (и даже $\|A\| = 1$ — докажите это в качестве упражнения). Таким образом, $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. Сюръективность A очевидна. Покажем, что A не является открытым отображением. Рассмотрим образ открытого единичного шара с центром в нуле из X под действием A. Это множество $O = \{\ x \in \ell_1 \quad | \quad \|x\|_{\ell_1} < 1\ \}$. Покажем, что O не является открытым в Y. Рассмотрим последовательность $y_n \in \ell_1$ вида $y_n(k) = \frac{1}{k}$ для $1 \le k \le n$ и $y_n(k) = 0$ при $k > n$. Для любого $x_0 \in O$ и любого $\varepsilon > 0$ определим

$x_{n,\varepsilon} = x_0 + \varepsilon y_n$. Тогда $\|x_{n,\varepsilon} - x_0\|_{\ell_2} < \frac{\varepsilon\pi}{\sqrt{6}}$, а $\|x_{n,\varepsilon}\|_{\ell_1} \geq \varepsilon \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \|x_0\|_{\ell_1} \to +\infty$ при $n \to \infty$. Следовательно, для любого $\delta > 0$ существует $\varepsilon = \frac{\delta\sqrt{6}}{\pi}$, такое, что для любого $n \in \mathbb{N}$ точка $x_{n,\varepsilon} \in O^Y_\delta(x_0) = \{\ x \in \ell_1 \quad | \quad \|x - x_0\|_{\ell_2} < \delta\ \}$, но $\|x_{n,\varepsilon}\|_{\ell_1} > 1$ при всех достаточно больших $n \in \mathbb{N}$, т. е. $x_{n,\varepsilon} \notin O$. Таким образом, ни одна точка O не является внутренней для O в пространстве Y, т. е. O не является открытым в Y.

Задача. Докажите, что тождественное отображение

$$I\colon (\ell_1, \|\cdot\|_{\ell_2}) \to (\ell_1, \|\cdot\|_{\ell_1})$$

не является непрерывным, т. е. $\|I\| = +\infty$.

Теперь рассмотрим случай, когда X не является полным, а Y полное. Приведенный ниже пример предложил студент 474 группы МФТИ М. Исаев. Рассмотрим линейные нормированные пространства $(Y, \|\cdot\|_Y) = (\ell_2, \|\cdot\|_{\ell_2})$ и $(X, \|\cdot\|_X) = (\ell_2, \|\cdot\|_*)$, где $\|\cdot\|_*$ — специальная норма в ℓ_2, которую определим позднее. Идея заключается в таком подборе $\|\cdot\|_*$, чтобы тождественный оператор $A\colon X \to Y$ вида $Ax = x$ для любого $x \in \ell_2$ оказался непрерывным, а обратный к нему $A^{-1}\colon Y \to X$, также тождественный $A^{-1}x = x$ для любого $x \in \ell_2$, уже непрерывным бы не являлся. В этом случае оператор A не является открытым отображением. Действительно, предположив противное, получим, что прообраз любого открытого из X множества под действием оператора A^{-1} (т. е. образ этого множества под действием A) будет открытым в Y, что означает непрерывность A^{-1} по теореме 6 из [3, глава II, § 5, с. 92]. Получаем противоречие с разрывностью A^{-1}.

Определим теперь $\|\cdot\|_*$ в ℓ_2. Рассмотрим в ℓ_1 специальный базис Гамеля $\mathcal{G}_1$, элементы которого имеют единичную ℓ_2-норму, содержащий неограниченное по ℓ_1-норме подмножество E. Такой базис Гамеля существует. Действительно, рассмотрим в роли E счетное множество линейно независимых элементов $y_n \in \ell_1$ вида $y_n(k) = \frac{1}{kR_n}$ для $1 \leq k \leq n$ и $y_n(k) = 0$ для $k > n$, где $R_n = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}}$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Тогда получаем $\|y_n\|_{\ell_2} = 1$ для любого $n \in \mathbb{N}$, а $\|y_n\|_{\ell_1} = $ $= \frac{1}{R_n} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \to +\infty$ при $n \to \infty$, и E является базисом Гамеля в $\operatorname{Lin} E$. При этом $\operatorname{Lin} E \neq \ell_1$, так как банахово пространство $(\ell_1, \|\cdot\|_{\ell_1})$ не может иметь счетный базис Гамеля E. Далее рассмотрим семейство $\mathcal{P}$, состоящее из пар $(\mathcal{L}, \mathcal{G}_{\mathcal{L}})$, где $\mathcal{L} \subset \ell_1$ — подпространство, содержащее $\operatorname{Lin} E$, а $\mathcal{G}_{\mathcal{L}}$ — базис Гамеля в $\mathcal{L}$, содержащий E, элементы которого нормированы по ℓ_2-норме. Семейство $\mathcal{P} \neq \varnothing$, так как $(\operatorname{Lin} E, E) \in \mathcal{P}$. Частично упорядочим $\mathcal{P}$ отношением $\leq$ из примера 8 и по теореме Хаусдорфа о максимальности [5, приложение А1, с. 412] выделим в $\mathcal{P}$ максимальное линейно упорядоченное подмножество $\mathcal{S}$. Определим $\mathcal{M}_1 = \bigcup\limits_{(\mathcal{L}, \mathcal{G}_{\mathcal{L}}) \in \mathcal{S}} \mathcal{L}$ и $\mathcal{G}_1 = \bigcup\limits_{(\mathcal{L}, \mathcal{G}_{\mathcal{L}}) \in \mathcal{S}} \mathcal{G}_{\mathcal{L}}$. Так же, как и в примере 8, можно показать (проведите необходимые выкладки в качестве упражнения), что $\mathcal{M}_1 = \ell_1$, а $\mathcal{G}_1$ – искомый базис Гамеля в ℓ_1.

Далее, рассмотрим в ℓ_2 базис Гамеля $\mathcal{G}_2$, содержащий $\mathcal{G}_1$, элементы которого нормированы по ℓ_2-норме. Для доказательства существования $\mathcal{G}_2$ рассмотрим семейство $\mathcal{P}$, состоящее из пар $(\mathcal{L}, \mathcal{G}_{\mathcal{L}})$, где $\mathcal{L} \subset \ell_2$ — подпространство, содержащее ℓ_1, а $\mathcal{G}_{\mathcal{L}}$ — базис Гамеля в $\mathcal{L}$, содержащий $\mathcal{G}_1$, элементы которого нормированы по ℓ_2-норме. Семейство $\mathcal{P} \neq \varnothing$, так как $(\ell_1, \mathcal{G}_1) \in \mathcal{P}$. Частично упорядочим $\mathcal{P}$ отношением $\leq$ из примера 8 и по теореме Хаусдорфа о максимальности [5, приложение А1, с. 412] выделим в $\mathcal{P}$ максимальное линейно упорядоченное подмножество $\mathcal{S}$. Определим $\mathcal{M}_2 = \bigcup\limits_{(\mathcal{L},\mathcal{G}_\mathcal{L})\in\mathcal{S}} \mathcal{L}$ и $\mathcal{G}_2 = \bigcup\limits_{(\mathcal{L},\mathcal{G}_\mathcal{L})\in\mathcal{S}} \mathcal{G}_\mathcal{L}$. Так же, как и в примере 8, можно показать (проведите необходимые выкладки в качестве упражнения), что $\mathcal{M}_2 = \ell_2$, а $\mathcal{G}_2$ – искомый базис Гамеля в ℓ_2.

Определим $\|\cdot\|_*$ на $\mathcal{G}_2$ следующим образом: для любого $e \in \mathcal{G}_2$

$$\|e\|_* = \begin{cases} \|e\|_{\ell_1}, & e \in \mathcal{G}_1, \\ \|e\|_{\ell_2}, & e \in \mathcal{G}_2 \setminus \mathcal{G}_1. \end{cases}$$

Так как для любого $x \in \ell_2$ существует единственный набор векторов $\{e_k\}_{k=1}^n \subset \mathcal{G}_2$ и чисел $\{\alpha_k\}_{k=1}^n$, таких, что $x = \sum\limits_{k=1}^n \alpha_k e_k$, то определим норму $\|x\|_* = \sum\limits_{k=1}^n |\alpha_k| \, \|e_k\|_*$. Докажите в качестве упражнения, что введенная функция $\|\cdot\|_*$ удовлетворяет определению нормы на ℓ_2.

Рассмотрим оператор $A\colon (\ell_2, \|\cdot\|_*) \to (\ell_2, \|\cdot\|_{\ell_2})$ вида $Ax = x$ для любого $x \in \ell_2$ (т. е. A — тождественный оператор). Покажем, что A является непрерывным. Действительно, для любого $x \in \ell_2$ имеем

$$\|Ax\|_{\ell_2} = \|x\|_{\ell_2} = \left\| \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k \right\|_{\ell_2} \le \sum_{k=1}^n |\alpha_k| \, \|e_k\|_{\ell_2} \le \|x\|_*,$$

так как $\|e\|_{\ell_2} \le \|e\|_{\ell_1}$ для любого $e \in \mathcal{G}_1$. Следовательно, $\|A\| \le 1$, т. е. A является непрерывным. Однако обратный оператор $A^{-1}\colon (\ell_2, \|\cdot\|_{\ell_2}) \to (\ell_2, \|\cdot\|_*)$ вида $A^{-1}x = x$ для любого $x \in \ell_2$ уже не будет непрерывным. Действительно, множество $E \subset \mathcal{G}_1$, ограниченное в $(\ell_2, \|\cdot\|_{\ell_2})$ (по определению, $\|e\|_{\ell_2} = 1$ для любого $e \in E$), является неограниченным в $(\ell_2, \|\cdot\|_*)$ (по определению, $E \subset \ell_1$, поэтому $\|e\|_* = \|e\|_{\ell_1}$ для любого $e \in E$, а E не ограничено в $(\ell_1, \|\cdot\|_{\ell_1})$). Следовательно, оператор A^{-1} переводит ограниченное в пространстве $(\ell_2, \|\cdot\|_{\ell_2})$ множество E в неограниченное в пространстве $(\ell_2, \|\cdot\|_*)$ множество $A^{-1}(E) = E$, что и требовалось.

Задача. Пусть $(X, \|\cdot\|_X)$ и $(Y, \|\cdot\|_Y)$ — банаховы пространства, а оператор $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. Доказать, что существует непрерывный обратный оператор $A^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$ тогда и только тогда, когда $\operatorname{Ker} A = \{0\}$ и $\operatorname{Im} A = Y$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Архангельский А.В., Пономарев В.И.* Основы общей топологии в задачах и упражнениях. М.: Наука, 1974.

2. *Гелбаум Г., Олмстед Дж.* Контрпримеры в анализе. М.: Мир, 1967.

3. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976.

4. *Рудин У.* Основы математического анализа. М.: Мир, 1976.

5. *Рудин У.* Функциональный анализ. М.: Мир, 1975.

6. *Треногин В.А.* Функциональный анализ. М.: Физматлит, 2002.