

Учебно-методическое пособие

**ИЗБРАННЫЕ ПРИМЕРЫ
И КОНТРИМЕРЫ
ФУНКЦИОНАЛЬНОГО
АНАЛИЗА**

Р.В.Константинов

Долгопрудный, 2008

УДК 517.5

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов третьего курса факультетов ФУПМ и ФИВТ МФТИ при изучении ими курса “Функциональный анализ” в осеннем семестре. Пособие содержит ряд примеров теоретического и прикладного характера, иллюстрирующих важные определения и теоремы курса. Понимание той или иной теоремы предполагает четкое представление об использовании условий теоремы для доказательства ее утверждения и умение привести контрпример при отказе от какого-либо условия рассматриваемой теоремы. В пособии рассматриваются такие контрпримеры к ряду важных теорем. После каждого примера предлагается связанная с обсуждаемой проблематикой задача, самостоятельное решение которой приятно разнообразит чтение.

§ 1. Топологические и метрические пространства

Напомним определение топологического пространства. Пусть X — некоторое множество. Семейство τ подмножеств множества X называется топологией, если выполнены следующие свойства:

- 1) $X \in \tau$ и $\emptyset \in \tau$;
- 2) для любого семейства подмножеств $\{ U_\alpha \mid \alpha \in \mathcal{A} \} \subset \tau$ (здесь \mathcal{A} — произвольное множество индексов) выполнено включение $\bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} U_\alpha \in \tau$;
- 3) для любого семейства подмножеств $\{ U_k \mid k \in \overline{1, N} \} \subset \tau$ (здесь N — произвольное натуральное число) выполнено включение $\bigcap_{k=1}^N U_k \in \tau$.

Множество X с введенной в нем топологией τ называется топологическим пространством и обозначается (X, τ) . Любое множество семейства τ называется τ -открытым (или просто открытым) в топологическом пространстве (X, τ) .

Сформулируем определение базы топологии. Пусть (X, τ) — топологическое пространство. Семейство открытых подмножеств $\beta \subset \tau$ называется базой топологии τ , если любое τ -открытое множество представимо в виде объединения некоторого семейства подмножеств из β , т. е. для любого $G \in \tau$ существует семейство $\{ V_\alpha \in \beta \mid \alpha \in \mathcal{A} \}$ (здесь \mathcal{A} — некоторое множество индексов), такое, что $G = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} V_\alpha$.

Существует следующий критерий базы. Пусть X — некоторое множество. Для того чтобы семейство β подмножеств множества X было базой некоторой топологии τ в X , необ-

ходимо и достаточно выполнение следующих двух условий:

а) для любого $x \in X$ существует $V \in \beta$, такое, что $x \in V$, т. е. $X = \bigcup_{V \in \beta} V$;

б) для любых множеств $V_1 \in \beta$ и $V_2 \in \beta$ и любого элемента $x \in V_1 \cap V_2$ существует множество $W \in \beta$, такое, что $x \in W \subset V_1 \cap V_2$.

Сформулируем определение предбазы топологии. Пусть (X, τ) — топологическое пространство. Семейство открытых подмножеств $\sigma \subset \tau$ называется предбазой топологии τ , если совокупность всевозможных конечных пересечений множеств семейства σ образует базу топологии τ .

Существует следующий критерий предбазы. Пусть X — некоторое множество. Для того чтобы семейство σ подмножеств множества X было предбазой некоторой топологии τ в X , необходимо и достаточно, чтобы для любого $x \in X$ существовало $V \in \sigma$, такое, что $x \in V$, т. е. $X = \bigcup_{V \in \sigma} V$.

Определения и основные свойства топологического пространства и базы топологии сформулированы в [3, глава II, § 5]. Определение предбазы σ сформулировано в [5, приложение А2, с. 412].

Пример 1. *Топология поточечной сходимости в пространстве числовых последовательностей.* Пусть X — множество всех числовых последовательностей, т. е. любой элемент $x \in X$ является числовой последовательностью вида $x = \{x(k)\}_{k=1}^{\infty}$. Требуется ввести в X топологию τ , такую, что сходимость по этой топологии последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ к числовой последовательности $y \in X$ (т. е. $x_n \xrightarrow{\tau} y$ при $n \rightarrow \infty$) эквивалентна поточечной сходимости: $x_n(k) \rightarrow y(k)$ при $n \rightarrow \infty$ при каждом $k \in \mathbb{N}$. Рассмотрим для любых $x \in$

$\in X$, $k \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon > 0$ множество

$$V(x, k, \varepsilon) = \left\{ z \in X \mid |x(k) - z(k)| < \varepsilon \right\}.$$

Объявим систему множеств

$$\sigma = \{ V(x, k, \varepsilon) \mid x \in X, k \in \mathbb{N}, \varepsilon > 0 \}$$

предбазой искомой топологии. Тогда базой β искомой топологии τ является совокупность всевозможных конечных пересечений множеств из σ . Таким образом, множество $G \in \tau$ тогда и только тогда, когда существует семейство множеств $\{ W_\alpha \in \beta \mid \alpha \in \mathcal{A} \}$ (здесь \mathcal{A} — произвольное множество индексов), такое, что $G = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} W_\alpha$. При этом включение $W_\alpha \in \beta$

означает, что существует $N_\alpha \in \mathbb{N}$, а для любого $n \in \overline{1, N_\alpha}$ существуют $x_{n,\alpha} \in X$, $k_{n,\alpha} \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon_{n,\alpha} > 0$, такие, что $W_\alpha = \bigcap_{n=1}^{N_\alpha} V(x_{n,\alpha}, k_{n,\alpha}, \varepsilon_{n,\alpha})$. Покажем, что определенная топология τ является топологией поточечной сходимости в X .

Пусть последовательность $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset X$ сходится к $y \in X$ по топологии τ . Тогда для любого $G \in \tau$, такого, что $y \in G$, существует $N(G) \in \mathbb{N}$, что для всех $n \geq N(G)$ выполнено $x_n \in G$. Возьмем для любого $k \in \mathbb{N}$ и числа $\varepsilon > 0$ множество $G = V(y, k, \varepsilon)$. Тогда для всех $n \geq N(G)$ получаем $x_n \in V(y, k, \varepsilon)$, т. е. $|x_n(k) - y(k)| < \varepsilon$. Таким образом, $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ сходится к y поточечно.

Обратно, пусть последовательность $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset X$ сходится к $y \in X$ поточечно. Рассмотрим произвольное $G \in \tau$, такое, что $y \in G$. Тогда существует $M \in \mathbb{N}$, а для любых $m \in \overline{1, M}$ существуют $z_m \in X$, $k_m \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon_m > 0$, такие, что $y \in \bigcap_{m=1}^M V(z_m, k_m, \varepsilon_m) \subset G$. Так как по условию для любого $m \in \overline{1, M}$ выполнено $x_n(k_m) \rightarrow y(k_m)$ при $n \rightarrow \infty$, то существует

$N_m \in \mathbb{N}$, такое, что для всех $n \geq N_m$ выполнено неравенство

$$|x_n(k_m) - y(k_m)| < \varepsilon_m - |z_m(k_m) - y(k_m)|.$$

Определим значение $N(G) = \max_{m=1, M} N_m$. Тогда для любого $n \geq N(G)$ находим, что для каждого $m \in \overline{1, M}$ выполнено неравенство

$$|x_n(k_m) - z_m(k_m)| \leq |x_n(k_m) - y(k_m)| + |y(k_m) - z_m(k_m)| < \varepsilon_m.$$

Таким образом, $x_n \in \bigcap_{m=1}^M V(z_m, k_m, \varepsilon_m) \subset G$ для любого $n \geq N(G)$, т. е. последовательность $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ сходится к y по топологии τ .

Напомним определение метрики (см. также [3, глава II, § 1, с. 48]). Пусть X — некоторое множество. Функция $\rho: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ называется метрикой в множестве X , если выполнены следующие свойства (аксиомы метрики):

1) $\rho(x, y) \geq 0$ для всех $x \in X$ и $y \in X$, а $\rho(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$;

2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ для всех $x \in X$ и $y \in X$;

3) $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(y, z)$ для всех $x \in X$, $y \in X$, $z \in X$.

Множество X с введенной в нем метрикой ρ называется метрическим пространством (X, ρ) . Открытым (или ρ -открытым) шаром с центром в точке $x \in X$ радиуса $R > 0$ называется множество

$$O_R(x) = \left\{ y \in X \mid \rho(x, y) < R \right\}.$$

Пусть β_ρ — семейство всех открытых шаров множества X , т. е.

$$\beta_\rho = \left\{ O_R(x) \mid x \in X, \quad R > 0 \right\}.$$

Тогда семейство β_ρ является базой некоторой топологии τ_ρ в множестве X , которая называется метрической топологией.

Задача. Проверить для семейства β_ρ критерий базы.

Покажем, что определенная на рассматриваемом множестве всех числовых последовательностей X топология τ метризуема, т. е. порождается некоторой метрикой ρ , определенной на X (см. [3, глава II, § 5, с. 98]). Определим метрику на X следующим образом:

$$\rho(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{-k} |x(k) - y(k)|}{1 + |x(k) - y(k)|} \quad \forall x, y \in X.$$

Задача. Проверить для определенной функции ρ аксиомы метрики.

Покажем, что последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ поточечно сходится к элементу $y \in X$ тогда и только тогда, когда $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, y) = 0$. Пусть для любого $k \in \mathbb{N}$ выполнено $x_n(k) \rightarrow y(k)$ при $n \rightarrow \infty$. Определим для любого $\varepsilon > 0$ номер $M = M(\varepsilon)$, такой, что $2^{-M} < \varepsilon$. Тогда для любых $x, y \in X$ выполнено соотношение

$$\sum_{k=M+1}^{\infty} \frac{2^{-k} |x(k) - y(k)|}{1 + |x(k) - y(k)|} \leq \sum_{k=M+1}^{\infty} 2^{-k} = 2^{-M} < \varepsilon.$$

Так как существует номер $N = N(\varepsilon)$, такой, что $|x_n(k) - y(k)| < \varepsilon$ для всех $n > N$ и всех $k \in \overline{1, M}$, то получаем

$$\rho(x_n, y) \leq \sum_{k=1}^M \frac{2^{-k} |x_n(k) - y(k)|}{1 + |x_n(k) - y(k)|} + \varepsilon < \sum_{k=1}^M 2^{-k} \varepsilon + \varepsilon < 2\varepsilon.$$

Пусть теперь $\rho(x_n, y) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда для любого $\varepsilon \in (0, 1)$ существует номер $N = N(\varepsilon)$, такой, что для всех

$n > N(\varepsilon)$ выполнено $\rho(x_n, y) < \varepsilon$. Тогда для любого $k \in \mathbb{N}$ выполнено

$$\frac{|x_n(k) - y(k)|}{1 + |x_n(k) - y(k)|} < 2^k \varepsilon.$$

Тогда при фиксированном $k \in \mathbb{N}$ и любого $n > N(2^{-k}\varepsilon)$ получаем неравенство

$$\frac{|x_n(k) - y(k)|}{1 + |x_n(k) - y(k)|} < \varepsilon, \quad \text{т. е.} \quad |x_n(k) - y(k)| < \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon},$$

что означает $x_n(k) \rightarrow y(k)$ при $n \rightarrow \infty$.

Теперь покажем, что топология τ поточечной сходимости в X совпадает с метрической топологией в X , порождаемой метрикой ρ . Сначала покажем, что для любого $x \in X$ и любого $\varepsilon > 0$ ρ -открытый шар $O_\varepsilon(x) = \{y \in X \mid \rho(x, y) < \varepsilon\}$ является τ -открытым. Пусть $y \in O_\varepsilon(x)$. Требуется показать, что существует $G \in \tau$, такое, что $y \in G \subset O_\varepsilon(x)$. Пусть $\Delta = \varepsilon - \rho(x, y) > 0$. Тогда для $\delta \in (0, \frac{\Delta}{2})$ и номера N вида $2^{-N} < \frac{\Delta}{2}$ определим $G = \bigcap_{k=1}^N V(y, k, \delta)$. Следовательно, для любого $z \in G$ получаем $|z(k) - y(k)| < \delta$ для всех $k \in \overline{1, N}$. Отсюда находим, что

$$\begin{aligned} \rho(z, x) &\leq \rho(z, y) + \rho(y, x) < \\ &< \sum_{k=1}^N 2^{-k} \delta + \sum_{k=N+1}^{\infty} 2^{-k} + \rho(y, x) < \\ &< \delta + 2^{-N} + \rho(y, x) < \Delta + \rho(y, x) = \varepsilon. \end{aligned}$$

Таким образом, любой ρ -открытый шар в X является τ -открытым, что влечет τ -открытость любого ρ -открытого множества из X .

Пусть теперь G — произвольное τ -открытое множество в X . Требуется показать, что для любого $x \in G$ существует

$\varepsilon > 0$, такое, что $O_\varepsilon(x) \subset G$. Так как $x \in G \in \tau$, то по определению τ существуют $N \in \mathbb{N}$, $z_i \in X$, $k_i \in \mathbb{N}$, $\varepsilon_i > 0$ для $i \in \overline{1, N}$, такие, что $x \in \bigcap_{i=1}^N V(z_i, k_i, \varepsilon) \subset G$. Тогда $|x(k_i) - z_i(k_i)| < \varepsilon_i$ для всех $i \in \overline{1, N}$. Определим $\Delta_i = \varepsilon_i - |x(k_i) - z_i(k_i)|$. Пусть $M = \max_{i \in \overline{1, N}} k_i$. Выберем $\varepsilon > 0$ так, чтобы $2^M \varepsilon < \frac{1}{2}$ и $2^{M+1} \varepsilon < \min_{i \in \overline{1, N}} \Delta_i$. Тогда для любого $y \in O_\varepsilon(x)$ получаем для любого $k \in \overline{1, M}$ неравенство

$$|y(k) - x(k)| < \frac{2^M \varepsilon}{1 - 2^M \varepsilon} < 2^{M+1} \varepsilon.$$

Отсюда для любого $i \in \overline{1, N}$ получаем $|y(k_i) - x(k_i)| < \Delta_i$, что означает $|y(k_i) - z_i(k_i)| < \varepsilon_i$. Следовательно, справедливо включение $O_\varepsilon(x) \subset \bigcap_{i=1}^N V(z_i, k_i, \varepsilon) \subset G$. Таким образом, G является ρ -открытым, что и требовалось. Итак, доказано, что топология поточечной сходимости в пространстве числовых последовательностей метризуема.

Задача. Привести пример метрики ρ в множестве всех числовых последовательностей X , сходимость по которой эквивалентна равномерной сходимости, т. е. для $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset X$ и $x \in X$ соотношение $\rho(x_n, x) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ эквивалентно свойству $x_n(k) \xrightarrow{k \in \mathbb{N}} x(k)$ при $n \rightarrow \infty$.

Пример 2. Топология поточечной сходимости в пространстве вещественнозначных функций на отрезке. Пусть X — множество всех функций вида $x: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. Требуется ввести в X топологию τ , такую, что сходимость по этой топологии последовательности $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset X$ к функции $y \in X$ (т. е. $x_n \xrightarrow{\tau} y$ при $n \rightarrow \infty$) эквивалентна поточечной сходимости $x_n(t) \rightarrow y(t)$ при $n \rightarrow \infty$ при каждом $t \in [0, 1]$. Рассмотрим

для любых $x \in X$, $t \in [0, 1]$ и $\varepsilon > 0$ множество

$$V(x, t, \varepsilon) = \left\{ z \in X \mid |x(t) - z(t)| < \varepsilon \right\}.$$

Объявим систему множеств

$$\sigma = \{ V(x, t, \varepsilon) \mid x \in X, t \in [0, 1], \varepsilon > 0 \}$$

предбазой искомой топологии. Тогда базой β искомой топологии τ является совокупность всевозможных конечных пересечений множеств из σ . Таким образом, множество $G \in \tau$ тогда и только тогда, когда существует семейство множеств $\{ W_\alpha \in \beta \mid \alpha \in \mathcal{A} \}$, такое, что $G = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{A}} W_\alpha$. При этом включение $W_\alpha \in \beta$ означает, что существует $N_\alpha \in \mathbb{N}$, а для любого $n \in \overline{1, N_\alpha}$ существуют $x_{n,\alpha} \in X$, $t_{n,\alpha} \in [0, 1]$ и $\varepsilon_{n,\alpha} > 0$, такие, что $W_\alpha = \bigcap_{n=1}^{N_\alpha} V(x_{n,\alpha}, t_{n,\alpha}, \varepsilon_{n,\alpha})$. Определенная топология τ является топологией поточечной сходимости в X . Доказательство этого утверждения проводится совершенно аналогично доказательству из примера 1 (проведите это доказательство).

Приведем пример подмножества $S \subset X$, секвенциальное замыкание которого не совпадает с топологическим. Напомним, что секвенциальным замыканием множества S в топологическом пространстве (X, τ) называется такое множество $cl_{секв.} S$, что для любого $x \in cl_{секв.} S$ существует последовательность $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset S$, такая, что $x_n \xrightarrow{\tau} x$ при $n \rightarrow \infty$. Иными словами, секвенциальное замыкание множества S состоит из точек, являющихся пределами сходящихся последовательностей из S . Топологическим замыканием множества S называется множество $cl_\tau S$, состоящее из тех и только тех точек $x \in X$, что для любого $G \in \tau$, такого, что $x \in G$, выполнено $G \cap S \neq \emptyset$. Таким образом, топологическое замыкание

множества S состоит из точек, любая окрестность которых пересекается с S .

Вернемся к построению примера подмножества S топологического пространства (X, τ) , рассматриваемого в примере 2, секвенциальное замыкание которого не совпадает с топологическим. Определим множество S следующим образом. Функция $x \in S$, если существует разбиение $T = \{t_k\}_{k=0}^N$ отрезка $[0, 1]$ вида $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = 1$, такое, что графиком x на $[t_{k-1}, t_k]$ являются боковые ребра равнобедренного треугольника с основанием $[t_{k-1}, t_k]$ и высотой, равной единице. Указанное разбиение назовем разбиением, порождающим функцию x . Условно можно назвать S множеством *пилообразных* функций. Покажем, что функция y , равная тождественно нулю на $[0, 1]$, принадлежит топологическому и не принадлежит секвенциальному замыканию S . Действительно, рассмотрим произвольную окрестность G функции y . Тогда существуют $M \in \mathbb{N}$ и для любого $m \in \overline{1, M}$ существуют $z_m \in X$, $t_m \in [0, 1]$ и $\varepsilon_m > 0$, такие, что $y \in \bigcap_{m=1}^M V(z_m, t_m, \varepsilon_m) \subset G$. Построим *пилообразную* функцию $x \in S$, порождающее разбиение которой содержит все точки t_m , $m \in \overline{1, M}$. Тогда $x(t_m) = 0 = y(t_m)$ для всех $m \in \overline{1, M}$. Следовательно, $x \in \bigcap_{m=1}^M V(z_m, t_m, \varepsilon_m) \subset G$. Таким образом, $y \in cl_\tau S$. Тем не менее, y не является поточечным пределом никакой последовательности из S . Действительно, пусть существует $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset S$, такая, что $x_n \xrightarrow{\tau} y$ при $n \rightarrow \infty$, т. е. $x_n(t) \rightarrow y(t)$ при $n \rightarrow \infty$ при всех $t \in [0, 1]$. Здесь нам понадобится следующее следствие теоремы Лебега об ограниченной сходимости (см. [4, глава 10, с. 293]), которое иногда называют теоремой об *аквариуме*: если $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ — равномерно ограниченная последовательность интегрируемых по Риману на

отрезке $[0, 1]$ функций, поточечно сходящаяся к интегрируемой по Риману на отрезке $[0, 1]$ функции f , т. е. для всех $t \in [0, 1]$ существует $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) = f(t)$ и существуют числа R_1 и R_2 , такие, что $R_1 \leq f_n(t) \leq R_2$ для всех $t \in [0, 1]$ и $n \in \mathbb{N}$ (т. е. графики всех функций f_n находятся в прямоугольнике — *аквариуме* $[0, 1] \times [R_1, R_2]$), то существует $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(t) dt = \int_0^1 f(t) dt$. Так как в нашем случае функции x_n непрерывны и равномерно ограничены ($0 \leq x_n(t) \leq 1$ при всех $t \in [0, 1]$ и $n \in \mathbb{N}$), то по указанному следствию теоремы Лебега об ограниченной сходимости (т. е. по теореме об *аквариуме*) получаем, что $\frac{1}{2} = \int_0^1 x_n(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^1 y(t) dt = 0$ — противоречие.

Заметим, что существование указанного множества S влечет неметризуемость топологии поточечной сходимости в пространстве (X, τ) , так как в метрическом пространстве секвенциальное замыкание множества всегда совпадает с топологическим (докажите это).

Задача. Доказать, что подмножество S метрического пространства (X, ρ) является замкнутым топологически тогда и только тогда, когда оно секвенциально замкнуто.

Задача. Доказать, что определенное в примере 2 топологическое пространство (X, τ) является регулярным (см. [3, глава II, § 5, с. 95]), т. е. любое одноточечное подмножество из X замкнуто, и любая точка и не содержащее ее замкнутое подмножество из X имеют непересекающиеся окрестности.

Задача. Привести пример метрики ρ в множестве X всех функций вида $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, сходимость по которой эквивалентна равномерной сходимости, т. е. для $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset X$ и $x \in X$ соотношение $\rho(x_n, x) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ эквивалентно свойству

$x_n(t) \xrightarrow{t \in \mathbb{R}} x(t)$ при $n \rightarrow \infty$.

Пример 3. Секвенциально непрерывное отображение одного топологического пространства на другое, не являющееся непрерывным топологически. Пусть (X_1, τ_1) и (X_2, τ_2) — два топологических пространства, а $f: X_1 \rightarrow X_2$ — некоторое отображение. Напомним, что f называется секвенциально непрерывным (или непрерывным по Гейне), если для любых $x \in X_1$ и последовательности $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset X_1$ вида $x_n \xrightarrow{\tau_1} x$ при $n \rightarrow \infty$ следует $f(x_n) \xrightarrow{\tau_2} f(x)$ при $n \rightarrow \infty$. Отображение f называется непрерывным топологически (или непрерывным по Коши), если для любых $x \in X_1$ и $U \in \tau_2$ вида $f(x) \in U$ существует $V \in \tau_1$ вида $x \in V$, такое, что для любого $z \in V$ выполнено $f(z) \in U$. Докажите в качестве упражнения, что топологическая непрерывность f влечет его секвенциальную непрерывность (т. е. непрерывность по Коши влечет непрерывность по Гейне). Покажем на примере, что обратное неверно.

Рассмотрим множество X , состоящее из всех непрерывных на отрезке $[0, 1]$ функций с вещественными значениями, лежащими на отрезке $[0, 1]$. Введем в X топологию τ поточечной сходимости, описанную в примере 2. Определим также метрическое пространство (X, ρ) , где метрика $\rho(x, y) = \int_0^1 |x(t) - y(t)| dt$. Рассмотрим тождественное отображение $I: (X, \tau) \rightarrow (X, \rho)$ вида $I(x) = x$ для любого $x \in X$. Покажем, что I секвенциально непрерывно. Действительно, пусть последовательность $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset X$ сходится поточечно к $y \in X$ на $[0, 1]$. Так как $0 \leq x_n(t) \leq 1$, то $|x_n(t) - y(t)| \leq 2$. Также $|x_n(t) - y(t)| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ для всех $t \in [0, 1]$. Следовательно, по упомянутому выше следствию из теоремы Лебега об ограниченной сходимости [4, глава 10, с. 293] (теорема об

аквариуме) получаем $\rho(I(x_n), I(y)) = \int_0^1 |x_n(t) - y(t)| dt \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Покажем, что I не является топологически непрерывным отображением. Рассмотрим множество $S \subset X$ *нилообразных* функций, описанное в примере 2. Так как в любой окрестности $G \in \tau$ тождественно нулевой на $[0, 1]$ функции y есть точка x_G множества S (см. пример 2), то получаем, что для $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$ и для любого $G \in \tau$, $y \in G$, существует $x_G \in G \cap S$, такой, что $\rho(I(x_G), I(y)) = \int_0^1 x_G(t) dt = \varepsilon_0$. Следовательно, I топологически разрывно в точке y , так как образ любой окрестности G точки y в (X, τ) не содержится в открытом шаре радиуса ε_0 с центром в $I(y) = y$ в пространстве (X, ρ) .

Другой пример подобного отображения можно привести, рассмотрев специальное топологическое пространство (Y, τ) , описанное в [3, глава II, § 5, с. 91]. Множество $Y = [0, 1]$, а топология τ состоит из всевозможных подмножеств $[0, 1]$, каждое из которых получается из $[0, 1]$ выбрасыванием конечного или счетного числа точек. Рассмотрим тождественное отображение $I: (Y, \tau) \rightarrow (Y, \rho)$, где $\rho(y, z) = |y - z|$ для любых $y, z \in [0, 1]$. Покажем, что I является секвенциально непрерывным отображением. Пусть числовая последовательность $\{y_n\}_{n=1}^\infty \subset Y$ сходится к $z \in Y$ по топологии τ . Рассмотрим множество $G = Y \setminus \{y_n \mid y_n \neq z\} \in \tau$, которое по определению является окрестностью z . Тогда существует $N_G \in \mathbb{N}$, такое, что для всех $n \geq N_G$ выполнено $y_n \in G$. Следовательно, $y_n = z$ для всех $n \geq N_G$, так как G не содержит элементов последовательности $\{y_n\}_{n=1}^\infty$, не равных z . Таким образом, $I(y_n) = I(z)$ для всех $n \geq N_G$, т. е. $\rho(I(y_n), I(z)) = 0$ для всех $n \geq N_G$. С другой стороны, для любого интервала $J = (\alpha, \beta) \subset [0, 1]$, такого, что $[0, 1] \setminus J$ более чем счетно,

получаем $I^{-1}(J) = J \notin \tau$. Значит, прообраз открытого подмножества из (Y, ρ) не является открытым в (Y, τ) . Следовательно, I не является топологически непрерывным отображением, так как по теореме 6 из [3, глава II, § 5, с. 92] топологическая непрерывность отображения $f: (X_1, \tau_1) \rightarrow (X_2, \tau_2)$ эквивалентна тому, что прообраз любого τ_2 -открытого множества из X_2 является τ_1 -открытым в X_1 .

Задача. Пусть отображение $f: (Y, \rho) \rightarrow (Z, \tau)$ метрического пространства (Y, ρ) в топологическое пространство (Z, τ) секвенциально непрерывно. Доказать, что f будет топологически непрерывным отображением.

Пример 4. *Критерий несепарабельности метрического пространства.* Пусть (X, ρ) – метрическое пространство. Напомним [3, глава I, § 2, с. 59], что (X, ρ) называется сепарабельным, если в X существует счетное всюду плотное подмножество. Справедливо следующее условие несепарабельности пространства (X, ρ) : если существует несчетное множество $A \subset X$ и число $\varepsilon > 0$, такое, что для любых $a_1 \in A, a_2 \in A, a_1 \neq a_2$ выполнено $\rho(a_1, a_2) \geq \varepsilon$, то (X, ρ) не является сепарабельным. Доказательство этого утверждения можно найти в [3, глава I, § 2, с. 60]. Справедливо и обратное утверждение: если пространство (X, ρ) , содержащее бесконечное число элементов, не сепарабельно, то существуют несчетное множество $A \subset X$ и число $\varepsilon > 0$, такие, что для любых $a_1 \in A, a_2 \in A, a_1 \neq a_2$, выполнено $\rho(a_1, a_2) \geq \varepsilon$. Докажем это утверждение. Приведенное ниже доказательство предложил студент 474 группы МФТИ А. Бадзян.

Множество $A \subset X$ назовем ε -разреженным для некоторого $\varepsilon > 0$, если для любых $a_1 \in A, a_2 \in A, a_1 \neq a_2$, выполнено $\rho(a_1, a_2) \geq \varepsilon$. Пусть (X, ρ) не сепарабельно и содержит бесконечное число элементов. Предположим, рассуждая от противного, что для любого $\varepsilon > 0$ любое ε -разреженное подмно-

жество из X не более чем счетно. Для любого $k \in \mathbb{N}$ обозначим $\varepsilon_k = \frac{1}{k}$ и рассмотрим семейство \mathcal{P}_k всех ε_k -разреженных подмножеств из X . Ясно, что для любого $k \in \mathbb{N}$ выполнено $\mathcal{P}_k \neq \emptyset$, так как для любого $x \in X$ одноточечное множество $\{x\} \in \mathcal{P}_k$. Частично упорядочим \mathcal{P}_k относительно теоретико-множественного включения.

Напомним определение частично упорядоченного множества \mathcal{P} . Говорят, что множество \mathcal{P} частично упорядочено относительно бинарного отношения \leq , если выполняются следующие условия:

- 1) $a \leq a$ для любого $a \in \mathcal{P}$;
- 2) если для $a, b \in \mathcal{P}$ выполнены $a \leq b$ и $b \leq a$, то $a = b$;
- 3) если для $a, b, c \in \mathcal{P}$ выполнены $a \leq b$ и $b \leq c$, то $a \leq c$.

Подмножество \mathcal{S} частично упорядоченного множества \mathcal{P} называется линейно упорядоченным, если для каждой пары элементов $a, b \in \mathcal{S}$ выполняется хотя бы одно из условий $a \leq b$ или $b \leq a$.

Определения частично упорядоченного множества \mathcal{P} и его линейно упорядоченного подмножества \mathcal{S} можно посмотреть в [5, приложение A1, с. 412].

Нам понадобится следующая теорема Хаусдорфа о максимальнойности (см. [5, приложение A1, с. 412]): каждое непустое частично упорядоченное множество \mathcal{P} содержит максимальное линейно упорядоченное подмножество, т. е. такое непустое линейно упорядоченное подмножество \mathcal{S} , которое не является собственным подмножеством никакого другого линейно упорядоченного подмножества множества \mathcal{P} .

По теореме Хаусдорфа о максимальнойности, в частично упорядоченном относительно теоретико-множественного включения множестве \mathcal{P}_k существует максимальное линейно упорядоченное подмножество \mathcal{S}_k . Определим множество $A_k = \bigcup_{A \in \mathcal{S}_k} A$. Заметим, что A_k является ε_k -разреженным. Дейст-

вительно, пусть $a' \in A_k$, $a'' \in A_k$, $a' \neq a''$. Тогда существуют $A' \in \mathcal{S}_k$ и $A'' \in \mathcal{S}_k$, такие, что $a' \in A'$, $a'' \in A''$. Так как \mathcal{S}_k линейно упорядоченно относительно теоретико-множественного включения, то либо $A' \subset A''$, либо $A'' \subset A'$. Пусть без ограничения общности $A' \subset A''$. Тогда a' и a'' принадлежат множеству A'' , которое является ε_k -разреженным. Следовательно, справедливо неравенство $\rho(a', a'') \geq \varepsilon_k$, т. е. A_k является ε_k -разреженным. Отсюда, в силу предположения, получаем, что множество A_k не более чем счетно.

Если существует $x \in X \setminus A_k$, такое, что $\rho(x, a) \geq \varepsilon_k$ для всех $a \in A_k$, то, рассмотрев множество $B = A_k \cup \{x\}$, получим $B \in \mathcal{P}_k$, $B \notin \mathcal{S}_k$ и $A \subset B$ для любого $A \in \mathcal{S}_k$. Получаем противоречие с максимальнойностью \mathcal{S}_k . Следовательно, для любого $x \in X$ существует $a = a(x) \in A_k$, такое, что $\rho(x, a) < \varepsilon_k$. Определив множество $A = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$, получим, что A является счетным (как счетное объединение не более чем счетных множеств) и всюду плотным в X . Действительно, для любого $x \in X$ и любого $\varepsilon > 0$ существует $k \in \mathbb{N}$, такое, что $\varepsilon_k < \varepsilon$, и существует $a_k \in A_k \subset A$, такое, что $\rho(x, a_k) < \varepsilon_k < \varepsilon$. Получили противоречие с несепарабельностью (X, ρ) .

Задача. Доказать, что любое бесконечное подмножество сепарабельного метрического пространства тоже является сепарабельным.

Пример 5. *Полное метрическое пространство и последовательность вложенных замкнутых шаров в нем, имеющих пустое пересечение.* Пусть (X, ρ) — метрическое пространство. Известно, что (X, ρ) является полным тогда и только тогда, когда в нем всякая последовательность вложенных замкнутых шаров, радиусы которых стремятся к нулю, имеет непустое пересечение (см. [3, глава II, § 3, с. 69]). Покажем, что пересечение шаров может быть пустым, если радиусы не стремятся к нулю (см. [2, глава 12, с. 201]). Рассмотрим

$X = \mathbb{N}$, в котором метрика задана формулой $\rho(m, n) = 1 + \frac{1}{m+n}$ при $m \neq n$. Покажем, что (\mathbb{N}, ρ) является полным. Если последовательность $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ является ρ -фундаментальной, то существует $N \in \mathbb{N}$, такое, что для всех $k, s \geq N$ выполнено $\rho(n_k, n_s) < 1$. Если $n_k \neq n_s$, то $\rho(n_k, n_s) > 1$. Следовательно, $n_k = n_s = m$. Таким образом, всякая фундаментальная в (\mathbb{N}, ρ) последовательность является стационарной с некоторого номера, а значит, сходящейся. Далее, для любого $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим замкнутый шар с центром в n и радиусом $r_n = 1 + \frac{1}{2n}$, т. е. $B_{r_n}(n) = \left\{ m \in \mathbb{N} \mid \rho(m, n) \leq r_n \right\}$. Тогда число $m \in \mathbb{N}$, не равное n , принадлежит $B_{r_n}(n)$ тогда и только тогда, когда $1 + \frac{1}{m+n} \leq 1 + \frac{1}{2n}$, т. е. $m \geq n$. Таким образом, справедливо равенство $B_{r_n}(n) = \{m\}_{m=n}^{\infty}$. Следовательно, $B_{r_n}(n) \supset B_{r_{n+1}}(n+1)$ для всех $n \in \mathbb{N}$, т. е. шары являются вложенными, при этом $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_{r_n}(n) = \emptyset$.

Задача. Привести пример банахова пространства и последовательность замкнутых ограниченных убывающих по включению его подмножеств, имеющих пустое пересечение.

Пример 6. Метрическое пространство, в котором шар большего радиуса может оказаться собственным подмножеством шара меньшего радиуса. Рассмотрим множество положительных рациональных чисел \mathbb{Q}_+ , метрику в котором определим следующим образом:

$$\rho\left(\frac{m_1}{n_1}, \frac{m_2}{n_2}\right) = \begin{cases} \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} & , \quad \frac{m_1}{n_1} \neq \frac{m_2}{n_2} \\ 0 & , \quad \frac{m_1}{n_1} = \frac{m_2}{n_2} \end{cases}$$

где m_k и n_k — натуральные числа, а дробь $\frac{m_k}{n_k}$ несократима, $k = \overline{1, 2}$. Докажите, что определенная на $\mathbb{Q}_+ \times \mathbb{Q}_+$ функция ρ удовлетворяет определению метрики [3, глава II, § 1, с. 48]. Для любого $z \in \mathbb{Q}_+$ и числа $r > 0$ определим открытый шар $O_r(z) = \{w \in \mathbb{Q}_+ \mid \rho(z, w) < r\}$. Рассмотрим шар

$O_2(1)$. Ясно, что $\frac{m}{n} \in O_2(1)$ и $\frac{m}{n} \neq 1$, если $1 + \frac{1}{n} < 2$, т. е. $n > 1$. Следовательно, $O_2(1) = \mathbb{Q}_+ \setminus \{2, 3, 4, \dots\}$. Рассмотрим шар $O_r(\frac{1}{2})$ для $0 < r < 2$. Число $\frac{m}{n} \in O_r(\frac{1}{2})$ и $\frac{m}{n} \neq \frac{1}{2}$, если $\frac{1}{2} + \frac{1}{n} < r$. Так как $\frac{1}{2} + \frac{1}{n} \leq \frac{3}{2}$ для всех $n \in \mathbb{N}$, то при $r > \frac{3}{2}$ получаем $O_r(\frac{1}{2}) = \mathbb{Q}_+$. Таким образом, для любого $r \in (\frac{3}{2}, 2)$ шар $O_2(1)$ является собственным подмножеством шара $O_r(\frac{1}{2})$.

Задача. Доказать, что в линейном нормированном пространстве шар большего радиуса не может быть собственным подмножеством шара меньшего радиуса.

Пример 7. *Линейное нормированное пространство, представимое в виде счетного объединения замкнутых нигде не плотных подмножеств.* Напомним, что подмножество метрического пространства называется нигде не плотным, если его замыкание имеет пустую внутренность. Напомним также теорему Бэра (см. [3, глава II, § 3, с. 70]): полное метрическое пространство не может быть представлено в виде объединения счетного числа своих нигде не плотных множеств. Пусть $(X, \|\cdot\|)$ – линейное нормированное пространство. Если оно полное (т. е. банахово), то в силу теоремы Бэра оно не может быть представлено в виде счетного объединения нигде не плотных подмножеств. Рассмотрим неполное линейное нормированное пространство $(X, \|\cdot\|) = (\ell_1, \|\cdot\|_{\ell_2})$, где $X = \ell_1$, а норма $\|\cdot\|$ является ℓ_2 -нормой, т. е. $\|x\| = \|x\|_{\ell_2} = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^2}$ для любого $x \in \ell_1$. Это пространство неполно. Действительно, рассмотрим последовательность $\{x_m\}_{m=1}^{\infty} \subset \ell_1$ вида

$$x_m(n) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & n \in \overline{1, m}, \\ 0, & n > m. \end{cases}$$

Тогда в силу сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ для любого $\varepsilon > 0$ су-

существует $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, такое, что для любых $m > N(\varepsilon)$ и $p \in \mathbb{N}$ выполнено $\|x_{m+p} - x_m\|_{\ell_2} < \sqrt{\sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{n^2}} < \varepsilon$. Следовательно, последовательность $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$ фундаментальна в $(\ell_1, \|\cdot\|_{\ell_2})$. Однако она является расходящейся в $(\ell_1, \|\cdot\|_{\ell_2})$. Действительно, рассмотрим $y: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ вида $y(n) = \frac{1}{n}$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Тогда $\|x_m - y\| \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$, а $y \notin X$. Таким образом, $(X, \|\cdot\|)$ не полно.

Представим $(\ell_1, \|\cdot\|_{\ell_2})$ в виде счетного объединения замкнутых нигде не плотных подмножеств. Рассмотрим для любого $n \in \mathbb{N}$ множество

$$F_n = \left\{ x \in \ell_1 \mid \|x\|_{\ell_1} = \sum_{k=1}^{\infty} |x(k)| \leq n \right\}.$$

Так как для любого $x \in \ell_1$ выполнено $\|x\|_{\ell_1} < +\infty$, то для любого $x \in \ell_1$ существует $n = n(x) \in \mathbb{N}$, такое, что $n \geq \|x\|_{\ell_1}$.

Следовательно, справедливо равенство $\ell_1 = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$.

Покажем, что F_n замкнуто в $(\ell_1, \|\cdot\|_{\ell_2})$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Действительно, если последовательность $\{x_m\}_{m=1}^{\infty} \subset F_n$ и существует $z \in \ell_1$, такое, что $\|x_m - z\|_{\ell_2} \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$, то для любого $k \in \mathbb{N}$ получаем $x_m(k) \rightarrow z(k)$ при $m \rightarrow \infty$. Это следует из оценки $|x_m(k) - z(k)| \leq \|x_m - z\|_{\ell_2}$ для любого $k \in \mathbb{N}$.

Так как для любого $K \in \mathbb{N}$ выполнено $\sum_{k=1}^K |x_m(k)| \leq \|x_m\|_{\ell_1} \leq n$, то, переходя к пределу при $m \rightarrow \infty$ при фиксированном произвольном образом $K \in \mathbb{N}$, получаем $\sum_{k=1}^K |z(k)| \leq n$. Сле-

довательно, при $K \rightarrow \infty$ получаем $\sum_{k=1}^{\infty} |z(k)| = \|z\|_{\ell_1} \leq n$, т. е. $z \in F_n$. Таким образом, замкнутость F_n доказана.

Покажем, что F_n нигде не плотно в $(\ell_1, \|\cdot\|_{\ell_2})$. Так как F_n замкнуто, то достаточно показать, что F_n имеет пустую внутренность. Пусть $x \in F_n$ и число $r > 0$. Существует $m \in \mathbb{N}$, такое, что $\sqrt{\sum_{k=m}^{\infty} \frac{1}{k^2}} < r$. Далее, существует $s > m$, такое, что $\sum_{k=m}^s \frac{1}{k} > 2n$. Определим $z \in \ell_1$ вида

$$z(k) = \begin{cases} \frac{1}{k}, & m \leq k \leq s, \\ 0, & k < m \text{ или } k > s. \end{cases}$$

Пусть $y = x + z \in X$. Тогда $\|y - x\|_{\ell_2} = \|z\|_{\ell_2} < \sqrt{\sum_{k=m}^{\infty} \frac{1}{k^2}} < r$, а $\|y\|_{\ell_1} \geq \|z\|_{\ell_1} - \|x\|_{\ell_1} > 2n - n = n$, т. е. $y \notin F_n$. Таким образом, для любого $x \in F_n$ любой открытый шар из $(\ell_1, \|\cdot\|_{\ell_2})$ с центром в точке x не содержится в F_n , что и требовалось показать.

Задача. Пусть множество X счетно, а метрическое пространство (X, ρ) не содержит изолированных точек. Доказать, что (X, ρ) не полно.

Задача. Привести пример счетного полного метрического пространства (X, ρ) .

Пример 8. *Базис Гамеля в линейном пространстве.*

Пусть X – ненулевое линейное пространство. Множество векторов $\mathcal{G} \subset X$ называется базисом Гамеля в X , если любой вектор из X представим единственным образом в виде конечной линейной комбинации элементов \mathcal{G} (см. [3, глава III, § 1, с. 123]). Покажем, что в X существует базис Гамеля. Пусть ненулевой вектор $e_1 \in X$. Пусть $\mathcal{L}_1 = \text{Lin}\{e_1\}$ – подпространство в X . Ясно, что $\mathcal{G}_1 = \{e_1\} \subset \mathcal{L}_1$ – базис Гамеля в \mathcal{L}_1 . Рассмотрим множество \mathcal{P} , состоящее из элементов

вида $(\mathcal{L}, \mathcal{G}_{\mathcal{L}})$, где $\mathcal{L} \subset X$ – подпространство, а $\mathcal{G}_{\mathcal{L}} \subset \mathcal{L}$ – базис Гамеля в \mathcal{L} . Так как $(\mathcal{L}_1, \mathcal{G}_1) \in \mathcal{P}$, то $\mathcal{P} \neq \emptyset$. Скажем, что $(\mathcal{L}', \mathcal{G}') \in \mathcal{P}$ и $(\mathcal{L}'', \mathcal{G}'') \in \mathcal{P}$ удовлетворяют отношению $(\mathcal{L}', \mathcal{G}') \leq (\mathcal{L}'', \mathcal{G}'')$, если $\mathcal{L}' \subset \mathcal{L}''$ и $\mathcal{G}' \subset \mathcal{G}''$. Частично упорядочим \mathcal{P} относительно отношения \leq . По теореме Хаусдорфа о максимальности [5, приложение А1, с. 412], в \mathcal{P} существует максимальное линейно упорядоченное подмножество \mathcal{S} . Определим $\mathcal{M} = \bigcup_{(\mathcal{L}, \mathcal{G}_{\mathcal{L}}) \in \mathcal{S}} \mathcal{L}$ и $\mathcal{G} = \bigcup_{(\mathcal{L}, \mathcal{G}_{\mathcal{L}}) \in \mathcal{S}} \mathcal{G}_{\mathcal{L}}$. Покажем, что $\mathcal{M} = X$, а \mathcal{G} – базис Гамеля в X . Ясно, что \mathcal{M} – подпространство в X . Это следует из линейной упорядоченности \mathcal{S} . Действительно, если x' и x'' принадлежат \mathcal{M} , то существуют $(\mathcal{L}', \mathcal{G}')$ и $(\mathcal{L}'', \mathcal{G}'')$ из \mathcal{S} , такие, что $x' \in \mathcal{L}'$, $x'' \in \mathcal{L}''$. В силу линейной упорядоченности \mathcal{S} без ограничения общности можно считать, что $(\mathcal{L}', \mathcal{G}') \leq (\mathcal{L}'', \mathcal{G}'')$. Следовательно, $\mathcal{L}' \subset \mathcal{L}''$, тогда $x' \in \mathcal{L}''$ и $x'' \in \mathcal{L}''$. Так как \mathcal{L}'' – подпространство в X , то $\alpha'x' + \alpha''x'' \in \mathcal{L}'' \subset \mathcal{M}$ для любых скаляров α' и α'' . Покажем далее, что \mathcal{G} – базис Гамеля в \mathcal{M} . Действительно, для любого $x \in \mathcal{M}$ существует $(\mathcal{L}', \mathcal{G}') \in \mathcal{S}$, такое, что $x \in \mathcal{L}'$. Следовательно, x представим единственным образом в виде конечной линейной комбинации элементов $\mathcal{G}' \subset \mathcal{G}$. Если найдется другой элемент $(\mathcal{L}'', \mathcal{G}'') \in \mathcal{S}$, такой, что $x \in \mathcal{L}''$, то в силу линейной упорядоченности \mathcal{S} без ограничения общности можно считать, что $(\mathcal{L}', \mathcal{G}') \leq (\mathcal{L}'', \mathcal{G}'')$. Тогда $\mathcal{G}' \subset \mathcal{G}''$. Так как \mathcal{G}'' – базис Гамеля в \mathcal{L}'' , то представление x в виде конечной линейной комбинации элементов \mathcal{G}'' совпадет с его представлением в виде конечной линейной комбинации элементов \mathcal{G}' . Итак, любой $x \in \mathcal{M}$ представим единственным образом в виде конечной линейной комбинации элементов \mathcal{G} , что и требовалось. Покажем наконец, что $\mathcal{M} = X$. Если это не так, то существует $e \in X \setminus \mathcal{M}$. Определим $\mathcal{L} = \mathcal{M} + \text{Lin}\{e\}$, $\mathcal{G}_{\mathcal{L}} = \mathcal{G} \cup \{e\}$. Так как $\mathcal{M} \cap \text{Lin}\{e\} = \{0\}$, то для любого $x \in \mathcal{L}$

существуют единственные $y \in \mathcal{M}$ и $z \in \text{Lin}\{e\}$, такие, что $x = y + z$. Так как $y \in \mathcal{M}$ представим единственным образом в виде конечной линейной комбинации элементов \mathcal{G} , то получается, что $x \in \mathcal{L}$ представим единственным образом в виде конечной линейной комбинации элементов $\mathcal{G}_{\mathcal{L}}$. Следовательно, $\mathcal{G}_{\mathcal{L}}$ — базис Гамеля в \mathcal{L} . При этом по построению $(\mathcal{L}', \mathcal{G}') \leq (\mathcal{L}, \mathcal{G}_{\mathcal{L}})$ для любого $(\mathcal{L}', \mathcal{G}') \in \mathcal{S}$. Но в силу $e \notin \mathcal{M}$ получаем $(\mathcal{L}, \mathcal{G}_{\mathcal{L}}) \notin \mathcal{S}$. Это противоречит максимальнойности \mathcal{S} . Итак, $\mathcal{M} = X$, что и требовалось.

Задача. Привести пример бесконечномерного линейного нормированного пространства, имеющего счетный базис Гамеля.

Может ли полное бесконечномерное линейное нормированное пространство иметь счетный базис Гамеля? Покажем, что ответ на этот вопрос отрицательный. Предположим, что линейное нормированное пространство $(\mathcal{L}, \|\cdot\|)$ имеет счетный базис Гамеля $\mathcal{G} = \{e_n\}_{n=1}^{\infty}$. Определим для любого $n \in \mathbb{N}$ конечномерное подпространство $M_n = \text{Lin}\{e_1, \dots, e_n\}$. По определению базиса Гамеля, $\mathcal{L} = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$. Далее, в силу конечномерности M_n полно в \mathcal{L} , а значит, и замкнуто в \mathcal{L} . В силу бесконечномерности \mathcal{L} подпространство M_n не совпадает с \mathcal{L} для любого $n \in \mathbb{N}$. Покажем, что M_n является нигде не плотным в \mathcal{L} , т. е. не содержит ни одного шара положительного радиуса. Так как M_n подпространство, то достаточно показать, что M_n не содержит единичную сферу с центром в нуле. Но это сразу следует из леммы Рисса о почти перпендикуляре (см. [6, глава I, § 3, с. 32], на всякий случай напомним её: пусть M — замкнутое подпространство нормированного пространства $(\mathcal{L}, \|\cdot\|)$, причем $M \neq \mathcal{L}$, тогда для любого $\varepsilon \in (0, 1)$ существует единичный вектор $z_{\varepsilon} \in \mathcal{L}$, такой, что $\rho(z_{\varepsilon}, M) = \inf_{x \in M} \|z_{\varepsilon} - x\| > 1 - \varepsilon$), которая, в част-

ности, утверждает существование элемента $z \in \mathcal{L}$, $\|z\| = 1$, такого, что $\rho(z, M_n) > \frac{1}{2}$, т. е. $z \notin M_n$. Итак, предположение о существовании счетного базиса Гамеля в \mathcal{L} приводит к его представлению в виде счетного объединения нигде не плотных его подмножеств. Следовательно, в силу теоремы Бэра (см. [3, глава II, § 3, с. 70]) линейное нормированное пространство \mathcal{L} не полно.

§ 2. Компактность множеств в топологических и метрических пространствах

Пусть (X, τ) — топологическое пространство, а множество $S \subset X$. Множество S называется компактным (см. [3, глава II, § 6, с. 98]), если любое его открытое покрытие содержит конечное подпокрытие. Напомним понятия счетно-компактного и секвенциально компактного множества. Множество S называется счетно-компактным, если любое его счетное открытое покрытие имеет конечное подпокрытие. Множество S называется секвенциально компактным, если любая последовательность точек из S имеет сходящуюся подпоследовательность к точке S . Очевидно, что компактность влечет счетную компактность.

Известно, что компактность S влечет следующее свойство: любое бесконечное подмножество $E \subset S$ имеет в S предельную точку, т. е. существует точка x множества S , в любой окрестности которой найдется точка множества E , отличная от x . Докажем более сильное утверждение: если S счетно-компактно, то любое бесконечное подмножество $E \subset S$ имеет в S предельную точку. Предположим, рассуждая от против-

ного, что ни одна точка из S не является предельной для E . В силу бесконечности E существует счетное подмножество $E_1 \subset E$, которое, очевидно, также лишено предельных точек в S . Следовательно, для любого $x \in S$ существует его окрестность $U(x) \in \tau$, такая, что $E_1 \cap (U(x) \setminus \{x\}) = \emptyset$. Следовательно, $S \setminus E_1$ открыто в S , так как для любого $x \in S \setminus E_1$ существует $U(x) \in \tau$, такое, что $E_1 \cap U(x) = \emptyset$, т. е. $S \cap U(x) \subset S \setminus E_1$. Это означает существование $V \in \tau$, такого, что $V \cap S = S \setminus E_1$. Определим счетное открытое покрытие $\mathcal{P} = \{ V, U(x) \mid x \in E_1 \}$ множества S . По построению, удаление из \mathcal{P} любого его элемента $U(x)$ для $x \in E_1$ приведет к тому, что оставшийся набор открытых множеств перестанет быть покрытием S . Действительно, для любых точек $x, y \in E_1$ вида $x \neq y$ справедливо соотношение $x \notin U(y)$. Далее, так как $S \cap V = S \setminus E_1$, то для $x \in E_1$ выполнено $x \notin V$. Следова-

тельно, для любого $x \in E_1$ выполнено $x \notin \left(\bigcup_{\substack{y \in E_1 \\ y \neq x}} U(y) \right) \cup V$,

что и требовалось. Если же из \mathcal{P} удалить только V , то оставшийся набор окрестностей останется счетным. Таким образом, счетное покрытие \mathcal{P} не имеет конечного подпокрытия. Получили противоречие со счетной компактностью множества S .

Пример 9. *Некомпакт, любое подмножество которого имеет в нем предельную точку.* Этот пример предложил студент 076 группы МФТИ Р. Таханов. Пусть $S = X = \mathbb{N}$ — множество натуральных чисел. Определим топологию τ в X следующим образом. Объявим базой топологии τ семейство $\beta = \{ \{2k - 1, 2k\} \mid k \in \mathbb{N} \}$, т. е. любое множество семейства β состоит из двух чисел $2k - 1$ и $2k$ для подходящего $k \in \mathbb{N}$. Так как разные множества из β не пересекаются, а объединение всех элементов семейства β совпадает с \mathbb{N} , то

по критерию базы (см. теорему 2 из [3, глава II, § 5, с. 88]) получаем, что β действительно является базой некоторой топологии τ . Иными словами, множество $V \in \tau$ если и только если число $2k \in V$ тогда и только тогда, когда $2k - 1 \in V$, где $k \in \mathbb{N}$. Ясно, что X не является счетно-компактным, так как счетное открытое покрытие $\{V_k\}_{k=1}^{+\infty}$, состоящее из множеств $V_k = \{2k - 1, 2k\} \in \tau$, где $k \in \mathbb{N}$, не имеет конечного подпокрытия. Также X не является секвенциально компактным, так как последовательность $x_n = n$ не имеет сходящейся подпоследовательности (докажите это в качестве упражнения). Тем не менее любое непустое подмножество $E \subset X$ имеет в (X, τ) предельную точку. Действительно, если для некоторого $k \in \mathbb{N}$ точка $2k \in E$, то $2k - 1$ является предельной для E , так как любая окрестность точки $2k - 1$ содержит точку $2k \in E$, и $2k \neq 2k - 1$. Аналогично, если $2k - 1 \in E$, то $2k$ является предельной для E , так как любая окрестность точки $2k$ содержит точку $2k - 1 \in E$, и $2k - 1 \neq 2k$.

Замечание. В монографии [3] понятие счетной компактности определяется иначе: множество S называется счетно-компактным по [3], если любое его бесконечное подмножество имеет в S предельную точку (см. [3, глава II, § 6, с. 103]). Теорема 9 из [3, глава II, § 6, с. 103] вроде бы устанавливает эквивалентность между определением счетной компактности из [3] и определением счетной компактности через счетное открытое покрытие, используемое в данном пособии. Однако, как видно из примера 9, наличие предельной точки у любого бесконечного подмножества не влечет наличие конечного подпокрытия у произвольного счетного покрытия. Ошибка в доказательстве упомянутой теоремы 9 заключается в том, что предельная точка x_0 последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, состоящей из различных точек, может и не быть предельной точкой *хвоста* этой последовательности $\{x_n, x_{n+1}, \dots\}$ (см. дета-

ли доказательства теоремы 9 в [3, глава II, § 6, с. 104]). Это было бы справедливо в случае, когда x_0 является пределом подпоследовательности последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, однако для этого нужна уже секвенциальная компактность. Например, в топологическом пространстве из примера 9 последовательность $x_n = n + 1$, $n \in \mathbb{N}$ имеет предельную точку $x_0 = 1$, так как любая окрестность x_0 содержит x_1 . Однако уже множество $\{x_2, x_3, \dots\}$ не имеет x_0 в качестве предельной точки.

Задача. Привести пример счетно-компактного топологического пространства (в смысле определения данного пособия), не являющегося компактным (например, см. задачу № 190 из [1, глава III, § 3, с. 155]).

Выясним, при каком условии счетно-компактное множество в смысле определения из [3] является счетно-компактным в смысле определения данного пособия? Пусть топологическое пространство (X, τ) удовлетворяет первой аксиомой отделимости (см. [3, глава II, § 5, с. 94]), т. е. каждое одноточечное множество из X является замкнутым. Тогда всякое множество $S \subset X$, любое бесконечное подмножество которого имеет в S предельную точку, является счетно-компактным. Предположим, рассуждая от противного, что множество S не является счетно-компактным. Тогда существует счетное открытое покрытие $\mathcal{P} = \{V_k\}_{k=1}^{\infty}$ множества S , которое не имеет конечного подпокрытия. Следовательно, для любого номера n существует $x_n \in S$, такое, что $x_n \notin \bigcup_{k=1}^n V_k$. Если множество значений последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ конечно, то существует стационарная подпоследовательность $x_{n_m} = x_0 \in S$. Так как семейство \mathcal{P} является покрытием S , то существует номер k_0 , такой, что $x_0 \in V_{k_0}$. Тогда существует номер m_0 , такой, что для всех $m > m_0$ выполнено неравенство $n_m >$

$> k_0$. Следовательно, $x_{n_m} = x_0 \in V_{k_0} \subset \bigcup_{k=1}^{n_m} V_k$, т. е. получили противоречие. Если же множество значений последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ бесконечно, то существует подпоследовательность $\{x_{n_m}\}_{m=1}^{\infty}$, целиком состоящая из различных точек, т. е. $x_{n_m} \neq x_{n_k}$ при $m \neq k$. По условию, бесконечное множество $E = \{x_{n_m}\}_{m=1}^{\infty}$ имеет в S предельную точку x_0 . Так как все элементы множества E различны, то без ограничения общности можно считать, что $x_0 \notin E$. Действительно, так как в любой окрестности x_0 есть элемент множества E , отличный от x_0 , то точка x_0 является предельной и для множества $E \setminus \{x_0\}$. Следовательно, если существует номер s_0 , такой, что $x_0 = x_{n_{s_0}}$, то исключим элемент $x_{n_{s_0}}$ из рассматриваемой последовательности. Итак, далее считаем, что $x_0 \neq x_{n_m}$ для любого $m \in \mathbb{N}$. Так как семейство \mathcal{P} является покрытием S , то существует номер k_0 , такой, что $x_0 \in V_{k_0}$. Тогда существует номер m_0 , такой, что для всех $m > m_0$ выполнено неравенство $n_m > k_0$. Рассмотрим конечное множество $F_0 = \{x_{n_1}, \dots, x_{n_{m_0}}\}$. В силу первой аксиомы отделимости, множество F_0 является замкнутым как конечное объединение замкнутых одноточечных множеств. Так как $x_0 \notin F_0$, то существует окрестность $U(x_0) \in \tau$, такая, что $U(x_0) \cap F_0 = \emptyset$. Так как x_0 является предельной точкой множества E , то в окрестности $W_0 = U(x_0) \cap V_{k_0} \in \tau$ точки x_0 находится хотя бы один элемент множества E . Следовательно, существует номер m , такой, что $x_{n_m} \in W_0$. Так как первые m_0 элементов последовательности $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ не лежат в $U(x_0)$, то получаем, что $m > m_0$. Следовательно, справедливо неравенство $n_m > k_0$ и при этом выполнено включение $x_{n_m} \in W_0 \subset V_{k_0} \subset \bigcup_{k=1}^{n_m} V_k$, т. е. получили противоречие.

Обсудим взаимосвязь счетной и секвенциальной компакт-

ности множества топологического пространства. Покажем, что секвенциальная компактность влечет счетную компактность. Пусть (X, τ) — топологическое пространство, а $S \subset X$ — секвенциально компактное множество. Предположим, рассуждая от противного, что S не является счетно-компактным. Тогда существует счетное открытое покрытие $\mathcal{P} = \{V_k\}_{k=1}^{\infty}$ множества S , не имеющее конечного подпокрытия. Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$ существует $x_n \in S$, такое, что $x_n \notin \bigcup_{k=1}^n V_k$. В силу секвенциальной компактности S последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ имеет сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n_m}\}_{m=1}^{\infty}$ к точке $x_0 \in S$, т. е. $x_{n_m} \xrightarrow{\tau} x_0$ при $m \rightarrow \infty$. Так как \mathcal{P} является покрытием множества S , то существует номер $k_0 \in \mathbb{N}$, такой, что $x_0 \in V_{k_0}$. Тогда существует номер $m_0 \in \mathbb{N}$, такой, что для всех $m \geq m_0$ выполнено включение $x_{n_m} \in V_{k_0}$. Так как $n_m \rightarrow \infty$ при $m \rightarrow \infty$, то $n_m \geq k_0$ при всех достаточно больших $m \geq m_0$. Но тогда при всех таких m выполнено соотношение $x_{n_m} \notin \bigcup_{k=1}^{n_m} V_k \supset V_{k_0}$, т. е. $x_{n_m} \notin V_{k_0}$. Получили противоречие.

Задача. Привести пример секвенциально компактного топологического пространства, не являющегося компактным (см. задачи № 184 и № 185 из [1, глава III, § 3, с. 155]).

Выясним, при каких условиях счетно-компактное множество $S \subset X$ является секвенциально компактным? Пусть топологическое пространство (X, τ) удовлетворяет первой аксиоме отделимости (см. [3, глава II, § 5, с. 94]) и первой аксиоме счетности (см. [3, глава II, § 5, с. 89]), т. е. каждая точка $x \in X$ обладает счетной определяющей системой окрестностей. Напомним, что семейство окрестностей $\{U_{\alpha}(x)\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ точки x топологического пространства (X, τ) называется определяющим, если любая окрестность точки x содержит хотя бы

одну окрестность этого семейства, т. е. для любой окрестности $V(x)$ точки x существует $\alpha \in \mathcal{A}$, такое, что $U_\alpha(x) \subset V(x)$. Тогда всякое счетно-компактное множество $S \subset X$ является секвенциально компактным. Предположим, рассуждая от противного, что S не является секвенциально компактным. Тогда существует последовательность $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset S$, не имеющая сходящейся к элементу S подпоследовательности. Покажем, что в этом случае для любого $x \in S$ существует его окрестность $U(x) \in \tau$, содержащая не более конечного набора элементов последовательности $\{x_n\}_{n=1}^\infty$. Действительно, пусть существует $x \in S$, любая окрестность которого содержит бесконечное число элементов последовательности $\{x_n\}_{n=1}^\infty$. Пусть $\{U_m\}_{m=1}^\infty$ — счетная определяющая система окрестностей точки x . Определим $W_m = \bigcap_{k=1}^m U_k$. Ясно, что $\{W_m\}_{m=1}^\infty$ также является определяющей системой окрестностей точки x , при этом $W_{m+1} \subset W_m$ для любого $m \in \mathbb{N}$. Так как в окрестности W_m точки x находится бесконечное число элементов последовательности $\{x_n\}_{n=1}^\infty$, то существует строго возрастающая последовательность натуральных чисел n_m , такая, что $x_{n_m} \in W_m$ для любого $m \in \mathbb{N}$. Получили подпоследовательность $\{x_{n_m}\}_{m=1}^\infty$ рассматриваемой последовательности, которая сходится к x . Действительно, для любой окрестности $V(x) \in \tau$ точки x существует $m_0 \in \mathbb{N}$, такой, что $W_{m_0} \in V(x)$. Тогда для любого $m \geq m_0$ выполнено $x_{n_m} \in W_m \subset W_{m_0} \subset V(x)$, т. е. $x_{n_m} \xrightarrow{\tau} x$ при $m \rightarrow \infty$. Получили противоречие с отсутствием у рассматриваемой последовательности сходящейся подпоследовательности.

Далее для произвольного $x \in S$ выделим все элементы последовательности $\{x_n\}_{n=1}^\infty$, входящие в $U(x)$ и не совпадающие с x . Обозначим их через $\{x_{n_k}\}_{k=1}^N$. Так как для любого $k \in \overline{1, N}$ одноточечное множество $\{x_{n_k}\}$ замкнуто, то сущест-

вует окрестность $U_k(x) \in \tau$ точки x , такая, что $x_{n_k} \notin U_k(x)$. Тогда окрестность $V(x) = U(x) \cap U_1(x) \cap \dots \cap U_N(x) \in \tau$ точки x не содержит элементов последовательности $\{x_n\}_{n=1}^\infty$, за исключением, быть может, самой точки x . Следовательно, множество $S \setminus \{x_n\}_{n=1}^\infty$ открыто в S , т. е. существует $V_0 \in \tau$, такое, что $V_0 \cap S = S \setminus \{x_n\}_{n=1}^\infty$. Для любого $n \in \mathbb{N}$ обозначим $V_n = V(x_n)$. Определим счетное открытое покрытие $\mathcal{P} = \{V_n\}_{n=0}^\infty$, которое по построению не имеет конечного подпокрытия. Получили противоречие.

Задача. Привести пример счетно-компактного топологического пространства, не удовлетворяющего первой аксиоме отделимости или первой аксиоме счетности и не являющегося секвенциально компактным.

Установим взаимосвязь секвенциальной компактности топологического пространства (X, τ) и наличия предельной точки у любого его бесконечного подмножества. Очевидно, что из секвенциальной компактности (X, τ) следует, что любое бесконечное подмножество $E \subset X$ имеет предельную точку в X . Действительно, в силу бесконечности множества E существует последовательность $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset E$, состоящая из различных элементов. В силу секвенциальной компактности (X, τ) эта последовательность имеет сходящуюся к некоторому $x_0 \in X$ подпоследовательность $\{x_{n_k}\}_{k=1}^\infty$, т. е. $x_{n_k} \xrightarrow{\tau} x_0$ при $k \rightarrow \infty$. Следовательно, в любой окрестности x_0 находится бесконечно много элементов последовательности $\{x_{n_k}\}_{k=1}^\infty$, отличных от x_0 . Последнее означает, что точка $x_0 \in X$ является предельной для множества E .

Пример 9 показывает, что наличие предельной точки у любого непустого подмножества топологического пространства (X, τ) не влечет его секвенциальную компактность, если топология не удовлетворяет первой аксиоме отделимости. Пусть топологическое пространство (X, τ) удовлетворяет

первой аксиоме отделимости (см. [3, глава II, § 5, с. 94]) и первой аксиоме счетности (см. [3, глава II, § 5, с. 89]). Пусть также любое бесконечное подмножество $E \subset X$ имеет в X предельную точку. Тогда топологическое пространство (X, τ) является секвенциально компактным. Это сразу следует из доказанных выше утверждений. Тем не менее проведем также независимое доказательство указанного факта. Рассмотрим произвольную последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$. Требуется найти ее сходящуюся подпоследовательность. Если рассматриваемая последовательность содержит стационарную подпоследовательность $x_{n_k} = x_0$ для любого $k \in \mathbb{N}$, то она является искомой. Если это не так, то существует подпоследовательность $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, состоящая из различных элементов (докажите это). По условию, бесконечное множество $E = \{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ имеет в X предельную точку x_0 . Так как все элементы последовательности $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ различны, то без ограничения общности можно считать, что $x_0 \neq x_{n_k}$ при всех $k \in \mathbb{N}$. Пусть $\{U_m\}_{m=1}^{\infty}$ — счетная определяющая система окрестностей точки x_0 . Тогда $W_m = \bigcap_{k=1}^m U_k$ также образуют определяющую систему окрестностей x_0 , причем $W_{m+1} \subset W_m$ для любого $m \in \mathbb{N}$. Существует номер $k_1 \in \mathbb{N}$, такой, что $x_{n_{k_1}} \in W_1$. Предположим, рассуждая по индукции, что для $m \in \mathbb{N}$ существуют номера $k_m > k_{m-1} > \dots > k_1 \geq 1$ и $s_m > s_{m-1} > \dots > s_1 = 1$, такие, что $x_{n_{k_r}} \in W_{s_r}$ для всех $r \in \overline{1, m}$. Так как одноточечное множество из X замкнуто в (X, τ) в силу первой аксиомы отделимости, а конечное объединение замкнутых множеств является замкнутым, то множество $E_m = \{x_{n_k}\}_{k=1}^{k_m}$ замкнуто в X и не содержит x_0 . Следовательно, существует окрестность $V(x_0)$ точки x_0 , не пересекающаяся с E_m , т. е. не содержащая первые k_m элементов последовательности $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$. Существует $s_{m+1} > s_m$,

такой, что $W_{s_{m+1}} \subset V(x_0)$. Так как x_0 предельная точка E , то существует $k_{m+1} \in \mathbb{N}$, такой, что $x_{n_{k_{m+1}}} \in W_{s_{m+1}} \subset V(x_0)$. Так как первые k_m элементов последовательности x_{n_k} не содержатся в $V(x_0)$, то $k_{m+1} > k_m$. Итак, построены подпоследовательность $\{x_{n_{k_r}}\}_{r=1}^{\infty}$ и подпоследовательность натуральных чисел $\{s_r\}_{r=1}^{\infty}$, такие, что $x_{n_{k_r}} \in W_{s_r}$ для любого $r \in \mathbb{N}$. Для любой окрестности $U(x_0)$ точки x_0 существует $m_0 \in \mathbb{N}$, такой, что $W_{m_0} \subset U(x_0)$. Далее, существует $r_0 \in \mathbb{N}$, что для любого $r \geq r_0$ выполнено неравенство $s_r \geq m_0$. Следовательно, $x_{n_{k_r}} \in W_{s_r} \subset W_{m_0} \subset U(x_0)$. Таким образом, $x_{n_{k_r}} \in U(x_0)$ для любого $r \geq r_0$, т. е. $x_{n_{k_r}} \xrightarrow{\tau} x_0$ при $r \rightarrow \infty$, что и требовалось.

Задача. Привести пример топологического пространства, не являющегося секвенциально компактным, удовлетворяющего первой аксиоме отделимости, не удовлетворяющего первой аксиоме счетности, в котором любое бесконечное подмножество имеет предельную точку.

Напомним, что топологическое пространство называется хаусдорфовым (или удовлетворяющим второй аксиоме отделимости, см. [3, глава II, § 5, с. 95]), если любые две различные точки этого пространства имеют непересекающиеся окрестности. Известно (см. теорему 4 из [3, глава II, § 6, с. 100]), что компактное подмножество S хаусдорфова топологического пространства (X, τ) является замкнутым в X , т. е. его дополнение открыто: $X \setminus S \in \tau$. Покажем на примере, что компактное подмножество топологического пространства, удовлетворяющего первой и не удовлетворяющего второй аксиоме отделимости, может быть незамкнутым.

Пример 10. *Незамкнутый компакт в топологическом пространстве, удовлетворяющем первой аксиоме отделимости.* Пусть $X = [0, 1]$. Непустое множество $V \subset X$ объявим открытым, если оно отличается от X не более чем на конечное множество точек. Докажите, что так определенная сово-

купность открытых множеств образует в X топологию τ . Ясно, что любое одноточечное подмножество $\{x\} \subset X$ замкнуто в (X, τ) , так как его дополнение $X \setminus \{x\} \in \tau$ по определению τ . Отметим также, что (X, τ) не является хаусдорфовым, так как ни одна пара различных точек из X не имеет непересекающихся окрестностей. Действительно, если $x, y \in X$ и $x \neq y$, а $U \in \tau$ и $V \in \tau$ — окрестности x и y соответственно, то $U \cap V$ отличается от X не более чем на конечное множество точек, а значит не пусто. Далее определим множество $K \subset X$ вида $K = \{0\} \cup \{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$. Так как K счетно, то $X \setminus K \notin \tau$, т. е. $X \setminus K$ не открыто, следовательно, K не замкнуто. Тем не менее K является компактом в (X, τ) . Действительно, пусть $\{V_{\alpha}\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ — произвольное открытое покрытие K . Тогда существует $\alpha_0 \in \mathcal{A}$, такое, что $0 \in V_{\alpha_0}$. Так как V_{α_0} отличается от X не более чем на конечное число точек, то существует $n_0 \in \mathbb{N}$, такое, что для любого $n > n_0$ справедливо включение $\frac{1}{n} \in V_{\alpha_0}$. Так как для любого $n \in \overline{1, n_0}$ существует $\alpha_n \in \mathcal{A}$, такое, что $\frac{1}{n} \in V_{\alpha_n}$, то получаем, что $K \subset \bigcup_{n=0}^{n_0} V_{\alpha_n}$. Следовательно, $\{V_{\alpha_n}\}_{n=0}^{n_0}$ — конечное подпокрытие для K . Компактность K доказана.

Задача. Доказать, что топологическое пространство (X, τ) является компактным тогда и только тогда, когда любое его замкнутое собственное подмножество является компактным в (X, τ) , или, что то же, любое его некомпактное собственное подмножество не является замкнутым в (X, τ) .

Перейдем к рассмотрению компактных подмножеств метрического пространства (X, ρ) . Известно, что компактность множества $S \subset X$ метрического пространства (X, ρ) эквивалентна полноте метрического пространства (S, ρ) и вполне ограниченности множества S в (X, ρ) (см. [3, глава II, § 7]). Напомним, что множество $S \subset X$ называется вполне ограни-

ченным, если для любого $\varepsilon > 0$ существует конечный набор точек x_1, \dots, x_N множества S , такой, что $S \subset \bigcup_{k=1}^N O_\varepsilon(x_k)$. Указанный набор точек x_1, \dots, x_N называется конечной ε -сетью множества S . Также компактность и секвенциальная компактность (а значит, и счетная компактность) подмножества метрического пространства эквивалентны.

Задача. Привести пример замкнутого ограниченного не вполне ограниченного множества из линейного нормированного пространства $C[0, 1]$.

Пример 11. *Замкнутое вполне ограниченное некомпактное подмножество неполного метрического пространства.* В данном примере некомпактность подмножества S неполного метрического пространства (X, ρ) может получиться только вследствие неполноты метрического пространства (S, ρ) , которая не обеспечивается замкнутостью S в (X, ρ) . Рассмотрим $X = \mathbb{R}$, метрика в котором задается соотношением

$$\rho(x, y) = |e^x - e^y| \quad \text{для всех } x, y \in \mathbb{R}.$$

Докажите, что для введенной функции ρ выполнены все аксиомы метрики. Метрическое пространство (\mathbb{R}, ρ) не является полным. Действительно, рассмотрим последовательность $x_n = -n$, где $n \in \mathbb{N}$. Эта последовательность фундаментальна в (\mathbb{R}, ρ) , так как для любого $\varepsilon > 0$ выполнено $\rho(x_n, x_{n+p}) = |e^{-n} - e^{-n-p}| < e^{-n} < \varepsilon$ при любом $n > \ln \frac{1}{\varepsilon}$ и любом $p \in \mathbb{N}$. Тем не менее $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ не является сходящейся в (\mathbb{R}, ρ) , так как для любого $x \in \mathbb{R}$ выполнено $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(x_n, x) = e^x > 0$. Рассмотрим множество $S = (-\infty, 0]$. Так как $x_n = -n \in S$ для любого $n \in \mathbb{N}$, то метрическое пространство (S, ρ) не является полным. Следовательно, S не является компактным множеством в (\mathbb{R}, ρ) . Однако S является замкнутым и вполне ограниченным в (\mathbb{R}, ρ) . Покажем это.

Если $x \in \mathbb{R}$ — предельная точка S , то существует последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset S$, такая, что $\rho(x_n, x) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда $e^{x_n} \rightarrow e^x$ при $n \rightarrow \infty$. Так как функция натурального логарифма непрерывна на своей области определения $(0, +\infty)$, то $x_n = \ln e^{x_n} \rightarrow \ln e^x = x$ при $n \rightarrow \infty$. Так как $x_n \leq 0$ для любого $n \in \mathbb{N}$, то $x \leq 0$, т. е. $x \in S$. Таким образом, S замкнуто в метрическом пространстве (\mathbb{R}, ρ) .

Далее, для любого $\varepsilon > 0$ существует $x_0 < 0$, такое, что $e^{x_0} < \varepsilon$. Тогда справедливо неравенство $e^x < \varepsilon$ для любого $x \leq x_0$. По теореме Кантора, функция e^x равномерно непрерывна на отрезке $[x_0, 0]$. Следовательно, существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, такое, что для любых чисел $x, y \in [x_0, 0]$ вида $|x - y| < \delta$ выполнено неравенство $|e^x - e^y| < \varepsilon$. Пусть $x_0 < x_1 < \dots < x_N = 0$ — разбиение отрезка $[x_0, 0]$ мелкости меньше δ . Тогда $\{x_k\}_{k=0}^N$ является конечной ε -сетью в S . Действительно, если $x \leq x_0$, то $\rho(x, x_0) = |e^x - e^{x_0}| < \varepsilon < \varepsilon$, т. е. $x \in O_\varepsilon(x_0)$. Если же $x \in [x_{k-1}, x_k]$ для $k \in \overline{1, N}$, то $\rho(x, x_k) = |e^x - e^{x_k}| < \varepsilon$, т. е. $x \in O_\varepsilon(x_k)$. Таким образом, $S \subset \bigcup_{k=0}^N O_\varepsilon(x_k)$, т. е. S является вполне ограниченным в (X, ρ) .

Можно привести пример неполного линейного нормированного пространства, в котором существует замкнутое вполне ограниченное некомпактное подмножество. Рассмотрим линейное нормированное пространство $(\ell_1, \|\cdot\|_{\ell_2})$ из примера 7. Как показано в примере 7, это линейное нормированное пространство неполно. Рассмотрим множество

$$S = \left\{ x \in \ell_1 \mid |x(k)| \leq \frac{1}{k} \quad \forall k \in \mathbb{N} \right\}.$$

Метрическое пространство (S, ρ) , метрика в котором индуцирована $\|\cdot\|_{\ell_2}$ -нормой, не является полным, так как последовательность $\{x_m\}_{m=1}^{\infty} \subset S$ вида $x_m(k) = \frac{1}{k}$ для $k \in \overline{1, m}$ и

$x_m(k) = 0$ для $k > m$ является фундаментальной и расходящейся в метрическом пространстве (S, ρ) (см. подробности в примере 7).

Покажем, что множество S замкнуто и вполне ограничено в $(\ell_1, \|\cdot\|_{\ell_2})$. Пусть $x \in \ell_1$ — предельная точка S . Тогда существует последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset S$, такая, что $\|x - x_n\|_{\ell_2} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Следовательно, для любого $k \in \mathbb{N}$ получаем $|x(k)| \leq |x_n(k)| + |x(k) - x_n(k)| \leq \frac{1}{k} + \|x - x_n\|_{\ell_2} \rightarrow \frac{1}{k}$ при $n \rightarrow \infty$. Следовательно, $|x(k)| \leq \frac{1}{k}$ для любого $k \in \mathbb{N}$, т. е. $x \in S$. Таким образом, S замкнуто.

Далее, для любого $\varepsilon > 0$ определим $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, такое, что $\sqrt{\sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{k^2}} < \frac{\varepsilon}{2}$. Рассмотрим для числа $\delta = \frac{\varepsilon\sqrt{6}}{2\pi}$ разбиение $-1 = z_0 < z_1 < \dots < z_M = 1$ отрезка $[-1, 1]$ мелкости меньше δ . Так как для любого $x \in S$ и любого $k \in \mathbb{N}$ выполнено $kx(k) \in [-1, 1]$, то существует $n_k \in \overline{0, M}$, такое, что $|kx(k) - z_{n_k}| < \delta$. Определим конечное множество S_ε , состоящее из последовательностей $y = \{y(k)\}_{k=1}^{\infty}$ вида: $y(k) = 0$ для $k > N$ и $y(k) = \frac{z_{n_k}}{k}$ для $k \in \overline{1, N}$, где $n_k \in \overline{0, M}$. Количество элементов S_ε не превышает $(M+1)^N$. По построению $S_\varepsilon \subset S$, причем для любого $x \in S$ существует $y \in S_\varepsilon$, такой, что для любого $k \in \overline{1, N}$ выполнено неравенство $|x(k) - y(k)| < \frac{\delta}{k}$. Тогда получаем

$$\begin{aligned} \|x - y\|_{\ell_2} &\leq \sqrt{\sum_{k=1}^N (x(k) - y(k))^2} + \sqrt{\sum_{k=N+1}^{\infty} (x(k))^2} < \\ &< \delta \sqrt{\sum_{k=1}^N \frac{1}{k^2}} + \sqrt{\sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{k^2}} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Таким образом, $S \subset \bigcup_{y \in S_\varepsilon} O_\varepsilon(y)$, т. е. S_ε — конечная ε -сеть для

множества S .

Задача. Доказать, что в полном метрическом пространстве (X, ρ) множество $S \subset X$ замкнуто в (X, ρ) тогда и только тогда, когда метрическое пространство (S, ρ) полно.

§ 3. Линейные нормированные пространства и линейные операторы

Пример 12. *Ближайший элемент для заданного вектора в замкнутом множестве.* Пусть $(X, \|\cdot\|)$ — линейное нормированное пространство, множество $M \subset X$ является замкнутым. Для любого вектора $x \in X$ расстоянием от x до множества M назовем неотрицательное число

$$\rho(x, M) = \inf_{y \in M} \|x - y\|.$$

Вектор $y \in M$ назовем ближайшим к заданному вектору x , если справедливо равенство

$$\|x - y\| = \rho(x, M).$$

Если линейное нормированное пространство X является конечномерным, то для любого вектора $x \in X$ существует вектор $y \in M$, ближайший к вектору x . Действительно, по определению нижней грани для вектора x существует минимизирующая последовательность $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset M$, т. е. $\rho(x, M) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x - y_n\|$. Так как $\|y_n\| \leq \|x\| + \|x - y_n\| \leq \|x\| + \rho(x, M) + 1$ для всех достаточно больших номеров n , то последовательность $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ является ограниченной в конечномерном пространстве X . По теореме Больцано—Вейерштрасса, она

имеет сходящуюся к некоторому вектору $y \in X$ подпоследовательность $\{y_{n_m}\}_{m=1}^{\infty}$. Так как множество M является замкнутым, то $y \in M$. При этом $\rho(x, M) = \lim_{m \rightarrow \infty} \|x - y_{n_m}\| = \|x - y\|$. Следовательно, вектор $y \in M$ является ближайшим к вектору x в множестве M .

Если же пространство X бесконечномерно, то ближайшего элемента для вектора $x \in X$ в замкнутом ограниченном множестве $M \subset X$ может и не оказаться. Рассмотрим пространство $(\ell_2, \|\cdot\|_{\ell_2})$ и множество $M \subset \ell_2$, состоящее из всех векторов $e_n \in \ell_2$ вида $e_n(k) = \delta_{nk}$ для всех номеров n, k . Множество M ограничено, так как $\|e_n\|_{\ell_2} = 1$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Множество M замкнуто. Действительно, если $y \in \ell_2$ является точкой прикосновения множества M , то существует последовательность натуральных чисел n_m , такая, что $\|e_{n_m} - z\|_{\ell_2} \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$. Если $n_m \neq n_k$, то $\|e_{n_m} - e_{n_k}\|_{\ell_2} = \sqrt{2}$. Так как сходящаяся последовательность e_{n_m} является фундаментальной, то существует номер m_0 , такой, что для всех $m \geq m_0$ выполнено $n_m = n_{m_0}$. Тогда $z = e_{n_{m_0}} \in M$, т. е. множество M является замкнутым. Рассмотрим элемент $x \in \ell_2$ вида $x(k) = -\frac{1}{k}$ для любого $k \in \mathbb{N}$. Тогда для любого номера n получаем

$$\|x - e_n\|_{\ell_2} = \sqrt{\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^{\infty} \frac{1}{k^2} + \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2} = \sqrt{\frac{\pi^2}{6} + 1 + \frac{2}{n}}.$$

Следовательно, $\rho(x, M) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x - e_n\|_{\ell_2} = \sqrt{\frac{\pi^2}{6} + 1} < \|x - e_m\|_{\ell_2}$ для любого $m \in \mathbb{N}$. Таким образом, для рассмотренного элемента $x \in \ell_2$ не существует ближайшего элемента в замкнутом ограниченном множестве $M \subset \ell_2$.

Можно привести примеры выпуклых замкнутых ограниченных множеств из X , не имеющих ближайшего элемента

для заданного вектора $x \in X$. Следующий пример предложил студент 574 группы МФТИ Р. Гимадеев. В пространстве $(\ell_1, \|\cdot\|_{\ell_1})$ рассмотрим базис $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ вида $e_n(k) = \delta_{nk}$ для всех $n, k \in \mathbb{N}$ и определим множество $S = \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right) e_n \right\}_{n=1}^{\infty}$. В качестве выпуклого замкнутого множества из ℓ_1 рассмотрим замыкание в ℓ_1 выпуклой оболочки множества S , т. е. $M = \overline{\text{conv}} S$. Напомним, что выпуклой оболочкой множества линейного пространства называется совокупность всевозможных конечных выпуклых комбинаций точек этого множества, т. е. выпуклой оболочкой множества S является множество

$$\text{conv } S = \left\{ \sum_{k=1}^N \alpha_k x_k \mid N \in \mathbb{N}, \begin{matrix} x_1 \in S, \dots, x_N \in S, \\ \alpha_1 \geq 0, \dots, \alpha_N \geq 0, \\ \sum_{k=1}^N \alpha_k = 1 \end{matrix} \right\}.$$

Будем изучать расстояние от нуля до множества M , т. е. $\rho(0, M) = \inf_{z \in M} \|z\|_{\ell_1}$. Рассмотрим произвольную точку $z \in M = \overline{\text{conv}} S$. Так как все элементы множества S имеют неотрицательные компоненты, то тем же свойством обладают элементы множеств $\text{conv } S$ и $\overline{\text{conv}} S$. Следовательно, $z(k) \geq 0$ для любого $k \in \mathbb{N}$. Определим для любого номера k число $\beta_k = \frac{z(k)}{1 + \frac{1}{k}} \geq 0$. Тогда получаем $z = \sum_{k=1}^{\infty} z(k) e_k = \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right) \beta_k e_k$. Для любого $\varepsilon > 0$ существуют $N \in \mathbb{N}$, неотрицательные числа $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ вида $\sum_{k=1}^N \alpha_k = 1$, такие, что

$$\begin{aligned} \varepsilon &\geq \left\| z - \sum_{k=1}^N \alpha_k \left(1 + \frac{1}{k}\right) e_k \right\|_{\ell_1} = \\ &= \sum_{k=1}^N \left(1 + \frac{1}{k}\right) |\beta_k - \alpha_k| + \sum_{k=N+1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right) \beta_k \geq \\ &\geq \sum_{k=1}^N |\beta_k - \alpha_k| + \sum_{k=N+1}^{\infty} \beta_k. \end{aligned}$$

Следовательно, получаем неравенства

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k &\leq \varepsilon + \sum_{k=1}^N \alpha_k = \varepsilon + 1, \\ \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k &\geq -\varepsilon + \sum_{k=1}^N \alpha_k + 2 \sum_{k=N+1}^{\infty} \beta_k \geq -\varepsilon + 1.\end{aligned}$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$, справедливо равенство $\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k = 1$. Таким образом, получаем неравенство

$$\|z\|_{\ell_1} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right) \beta_k > \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k = 1.$$

Следовательно, справедлива оценка $\rho(0, M) \geq 1$. С другой стороны, имеем неравенства

$$\rho(0, M) \leq \rho(0, S) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right) = 1.$$

Таким образом, $\rho(0, M) = 1 < \|z\|_1$ для любого $z \in M$, т. е. нулевой элемент из ℓ_1 не имеет ближайшего элемента в выпуклом замкнутом множестве M .

Другой пример выпуклого замкнутого множества в пространстве $(\ell_\infty, \|\cdot\|_{\ell_\infty})$, не имеющего ближайшего элемента для нулевого элемента, предложил студент 574 группы МФТИ В. Кузнецов. В пространстве $(\ell_\infty, \|\cdot\|_{\ell_\infty})$ рассмотрим множество $S = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \ell_\infty$, где для любого номера n

$$x_n(k) = \begin{cases} 0, & 1 \leq k \leq n, \\ 1 + \frac{1}{n}, & k > n. \end{cases}$$

Рассмотрим выпуклое замкнутое множество $M = \overline{\text{conv}} S$. Рассмотрим произвольный элемент $z \in M$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $m(\varepsilon)$, такой, что $z(m(\varepsilon)) \geq 1 - \varepsilon$.

Действительно, если предположить противное, то найдется число $\delta_0 > 0$, такое, что для любого номера m выполнено неравенство $z(m) < 1 - \delta_0$. Так как существует элемент $y_0 \in \text{conv } S$, такой, что $\|z - y_0\|_\infty \leq \delta_0$, а для элемента y_0 существует номер N , неотрицательные числа $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ вида $\sum_{k=1}^N \alpha_k = 1$, такие, что $y_0 = \sum_{k=1}^N \alpha_k x_k$, то для любого номера $m > N$ получаем противоречие:

$$\begin{aligned} \delta_0 &\geq \|y_0 - z\|_\infty \geq |y_0(m) - z(m)| \geq \\ &\geq \sum_{k=1}^N \alpha_k \left(1 + \frac{1}{k}\right) - z(m) > 1 + \sum_{k=1}^N \frac{\alpha_k}{k} - 1 + \delta_0 > \delta_0. \end{aligned}$$

Итак, для любого числа $\varepsilon > 0$ существует номер $m(\varepsilon)$ вида $z(m(\varepsilon)) \geq 1 - \varepsilon$. Выберем $\varepsilon_0 = \frac{1}{10}$ и обозначим номер $m_0 = m(\varepsilon_0)$. Так как z является точкой прикосновения множества $\text{conv } S$, то для любого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ существует $y_\varepsilon \in \text{conv } S$, такой, что $\|z - y_\varepsilon\|_\infty \leq \varepsilon$. Следовательно, выполнены неравенства $y_\varepsilon(m_0) \geq 1 - \varepsilon_0 - \varepsilon \geq 1 - 2\varepsilon_0 = \frac{4}{5}$. При этом, по определению выпуклой оболочки, существует номер N_ε , неотрицательные числа $\alpha_1^\varepsilon, \dots, \alpha_{N_\varepsilon}^\varepsilon$ вида $\sum_{k=1}^{N_\varepsilon} \alpha_k^\varepsilon = 1$, такие, что $y_\varepsilon = \sum_{k=1}^{N_\varepsilon} \alpha_k^\varepsilon x_k$. Без ограничения общности можем считать $N_\varepsilon > m_0$. Если предположить, что выполнено неравенство $\sum_{k=1}^{m_0-1} \alpha_k^\varepsilon < \frac{1}{4}$, то получим неравенство

$$y_\varepsilon(m_0) = \sum_{k=1}^{m_0-1} \alpha_k^\varepsilon x_k(m_0) = \sum_{k=1}^{m_0-1} \alpha_k^\varepsilon \left(1 + \frac{1}{k}\right) \leq \sum_{k=1}^{m_0-1} 2\alpha_k^\varepsilon < \frac{1}{2}.$$

Однако выше показано, что $y_\varepsilon(m_0) \geq \frac{4}{5} > \frac{1}{2}$. Полученное противоречие показывает, что выполнено неравенство $\sum_{k=1}^{m_0-1} \alpha_k^\varepsilon \geq$

$\geq \frac{1}{4}$. Следовательно, для любого номера $s > N_\varepsilon$ получаем

$$\begin{aligned} y_\varepsilon(s) &= \sum_{k=1}^{m_0-1} \alpha_k^\varepsilon \left(1 + \frac{1}{k}\right) + \sum_{k=m_0}^{N_\varepsilon} \alpha_k^\varepsilon \left(1 + \frac{1}{k}\right) \geq \\ &\geq \sum_{k=1}^{m_0-1} \alpha_k^\varepsilon \left(1 + \frac{1}{m_0}\right) + \sum_{k=m_0}^{N_\varepsilon} \alpha_k^\varepsilon = 1 + \sum_{k=1}^{m_0-1} \frac{\alpha_k^\varepsilon}{m_0} \geq 1 + \frac{1}{4m_0}. \end{aligned}$$

Следовательно, при $\varepsilon \in \left(0, \frac{1}{4m_0}\right)$ получаем строгое неравенство

$$\|z\|_\infty \geq \|y_\varepsilon\|_\infty - \varepsilon \geq 1 + \frac{1}{4m_0} - \varepsilon > 1.$$

Таким образом, справедливы неравенства

$$1 \leq \rho(0, M) \leq \rho(0, S) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right) = 1.$$

Следовательно, $\rho(0, M) = 1 < \|z\|_\infty$ для любого $z \in M$, т. е. нулевой элемент из ℓ_∞ не имеет ближайшего элемента в выпуклом замкнутом множестве M .

Задача. В пространстве $C[0, 1]$ привести пример выпуклого замкнутого множества, не имеющего ближайшего элемента для нулевой функции.

Пример 13. Замкнутое подпространство, расстояние до которого от любого элемента единичной сферы меньше единицы. Пусть $(X, \|\cdot\|)$ — линейное нормированное пространство, а $M \subset X$ — замкнутое подпространство, причем $M \neq X$. Как следует из леммы Рисса о почти перпендикуляре (см. [6, глава I, § 3, с. 32]), для любого $\varepsilon > 0$ существует $x_\varepsilon \in X$, $\|x_\varepsilon\| = 1$, такой, что $\rho(x_\varepsilon, M) > 1 - \varepsilon$. Приведем пример линейного нормированного пространства $(X, \|\cdot\|)$ и его замкнутого подпространства $M \neq X$, такого, что для любого $x \in X$, $\|x\| = 1$, выполнено неравенство $\rho(x, M) < 1$. Подпространство M будем искать в виде ядра ненулевого линейного непрерывного функционала $f: X \rightarrow \mathbb{C}$, т. е. в виде

$M = \text{Ker } f = \{ x \in X \mid f(x) = 0 \}$. Как известно, для любого $x \notin \text{Ker } f$ справедливо равенство $X = \text{Ker } f \oplus \text{Lin}\{x\}$. Действительно, для любого $z \in X$ справедливо включение $y = z - \frac{f(z)}{f(x)}x \in \text{Ker } f$. Следовательно, $z = y + \frac{f(z)}{f(x)}x \in \text{Ker } f + \text{Lin}\{x\}$. Далее, если $z \in \text{Ker } f \cap \text{Lin}\{x\}$, то $z = \alpha x$ для подходящего $\alpha \in \mathbb{C}$, и $f(z) = 0 = \alpha f(x)$. Так как $f(x) \neq 0$, то $\alpha = 0$ и $z = 0$. Следовательно, $\text{Ker } f \cap \text{Lin}\{x\} = \{0\}$, а значит, сумма подпространств $\text{Ker } f$ и $\text{Lin}\{x\}$ прямая. Получаем:

$$\begin{aligned} \|f\| &= \sup_{z \neq 0} \frac{|f(z)|}{\|z\|} = \sup_{\substack{\alpha \neq 0 \\ y \in \text{Ker } f}} \frac{|\alpha| |f(x)|}{\|y + \alpha x\|} = \\ &= \frac{|f(x)|}{\inf_{\substack{\alpha \neq 0 \\ y \in \text{Ker } f}} \left\| \frac{y}{\alpha} + x \right\|} = \frac{|f(x)|}{\inf_{w \in \text{Ker } f} \|x - w\|} = \frac{|f(x)|}{\rho(x, \text{Ker } f)}. \end{aligned}$$

Таким образом, $\rho(x, \text{Ker } f) = \frac{|f(x)|}{\|f\|} < 1$ для любого $\|x\| = 1$ тогда и только тогда, когда функционал f не достигает своей нормы: $|f(x)| < \|f\|$ для любого $\|x\| = 1$, или, что то же, $\frac{\|f(z)\|}{\|z\|} < \|f\|$ для любого $z \neq 0$. Предъявим такой функционал в банаховом пространстве ℓ_1 . Рассмотрим $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{kx(k)}{k+1}$ для любого $x \in \ell_1$. Тогда справедливы неравенства

$$|f(x)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k|x(k)|}{k+1} \leq \sum_{k=1}^{\infty} |x(k)| = \|x\|_{\ell_1},$$

следовательно, $\|f\| \leq 1$. С другой стороны, для любого $k \in \mathbb{N}$ рассмотрим элемент $e_k \in \ell_1$, где $e_k(s) = \delta_{ks}$ для всех $k, s \in \mathbb{N}$. Получаем $1 \geq \|f\| \geq |f(e_k)| = \frac{k}{k+1} \rightarrow 1$ при $k \rightarrow \infty$. Итак, $\|f\| = 1$. При этом для любого $z \in \ell_1, z \neq 0$ получаем

$$|f(z)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k|z(k)|}{k+1} < \sum_{k=1}^{\infty} |z(k)| = \|z\|_{\ell_1},$$

так как $\frac{k}{k+1} < 1$ для любого $k \in \mathbb{N}$, и существует $k_0 \in \mathbb{N}$, такой, что $z(k_0) \neq 0$. Таким образом, для любого $z \neq 0$ из ℓ_1 справедливо строгое неравенство $\frac{|f(z)|}{\|z\|} < 1 = \|f\|$, т. е. для $M = \text{Ker } f$ справедливо строгое неравенство $\rho(x, M) < 1$ для любого $\|x\| = 1$.

Задача. Привести пример линейного непрерывного функционала $f: \ell_\infty \rightarrow \mathbb{C}$, не достигающего своей нормы.

Пример 14. *Существование линейного оператора с бесконечной нормой.* Пусть $(X, \|\cdot\|_X)$ — бесконечномерное линейное нормированное пространство, а $(Y, \|\cdot\|_Y)$ — ненулевое линейное нормированное пространство. Тогда существует линейный оператор $A: X \rightarrow Y$, норма которого бесконечна, т. е. $\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X} = +\infty$. Покажем это. По условию, существует $y_0 \in Y$, такой, что $y_0 \neq 0$. Далее, в силу бесконечномерности X существует счетная совокупность $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ линейно независимых элементов единичной сферы из X . Пусть $L = \text{Lin}\{e_n\}_{n=1}^\infty$ — подпространство в X . Покажем, что существует подпространство $M \subset X$, такое, что $L \oplus M = X$. Рассмотрим семейство \mathcal{P} всех подпространств из X , имеющих с L тривиальное пересечение. Так как нулевое подпространство принадлежит \mathcal{P} , то семейство $\mathcal{P} \neq \emptyset$. Частично упорядочим \mathcal{P} относительно теоретико-множественного включения. По теореме Хаусдорфа о максимальной [5, приложение А1, с. 412], в \mathcal{P} существует максимальное линейно упорядоченное подмножество \mathcal{S} . Рассмотрим множество $M = \bigcup_{N \in \mathcal{S}} N$. Покажем, что M является подпространством X . Если $x_1, x_2 \in M$, то существуют подпространства $N_1 \in \mathcal{S}$ и $N_2 \in \mathcal{S}$, такие, что $x_k \in N_k$, $k = \overline{1, 2}$. В силу линейной упорядоченности \mathcal{S} без ограничения общности можно считать, что $N_1 \subset N_2$. Тогда $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \in N_2 \subset M$, что и требовалось. Далее, если $x \in M \cap L$, то $x \in N \cap L$ для подходящего $N \in \mathcal{S}$. Так как по

построению $N \cap L = \{0\}$ для любого $N \in \mathcal{S}$, то $x = 0$, что означает $M \cap L = \{0\}$. Покажем наконец, что $L + M = X$. Предположим, рассуждая от противного, что $L + M \neq X$. Тогда существует $x_0 \in X$, такой, что $x_0 \notin L + M$. В частности, $x_0 \notin L$ и $x_0 \notin M$. Рассмотрим подпространство $M_0 = M + \text{Lin}\{x_0\}$. Покажем, что $M_0 \cap L = \{0\}$. Если $z \in M_0 \cap L$, то существуют $y \in M$ и $\alpha \in \mathbb{C}$, такие, что $z = y + \alpha x_0 \in L$. Если $\alpha \neq 0$, то получаем $x_0 \in L - \frac{y}{\alpha} \subset L + M$ — противоречие. Следовательно, $\alpha = 0$, и $z = y \in M \cap L = \{0\}$, что и требовалось. Таким образом, $M_0 \in \mathcal{P}$, причем по построению $M_0 \notin \mathcal{S}$, но $M_0 \supset N$ для любого $N \in \mathcal{S}$. Получили противоречие с максимальностью семейства \mathcal{S} .

Итак, существует подпространство $M \subset X$, такое, что $L \oplus M = X$. Определим линейный оператор $A: X \rightarrow Y$, такой, что $A(x) = 0$ для любого $x \in M$, а $A(e_n) = n$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Так как для любого $x \in X$ существуют единственные $y(x) \in L$ и $z(x) \in M$, такие, что $x = y(x) + z(x)$, а вектор $y(x)$ раскладывается единственным образом в конечную линейную комбинацию векторов $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$, то оператор A определен однозначно. При этом $\|A\| \geq \|A(e_n)\|_Y = n \rightarrow +\infty$ при $n \rightarrow \infty$, т. е. $\|A\| = +\infty$.

Задача. Пусть $(X, \|\cdot\|_X)$ и $(Y, \|\cdot\|_Y)$ — линейные нормированные пространства, причем X конечномерно. Доказать, что любой линейный оператор $A: X \rightarrow Y$ будет ограниченным, т. е. $\|A\| < +\infty$.

Пример 15. *Неполнота линейного нормированного пространства линейных операторов.* Пусть $(X, \|\cdot\|_X)$ и $(Y, \|\cdot\|_Y)$ — линейные нормированные пространства. Рассмотрим линейное нормированное пространство $\mathcal{L}(X, Y)$, состоящее из линейных ограниченных операторов $A: X \rightarrow Y$, нормированных операторной нормой $\|A\| = \sup_{\|x\|_X=1} \|Ax\|_Y$ (см. [6, гла-

ва III, § 11]). Известно, что полнота пространства $(Y, \|\cdot\|_Y)$ влечет полноту пространства $\mathcal{L}(X, Y)$ (см. теорему 2 из [6, глава III, § 11, с. 120]). Покажем, что в случае, когда пространство $(Y, \|\cdot\|_Y)$ не является полным, а пространство X отлично от нулевого, пространство $\mathcal{L}(X, Y)$ не полно. Для этого построим фундаментальную расходящуюся в $\mathcal{L}(X, Y)$ последовательность операторов $\{A_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{L}(X, Y)$. В силу неполноты пространства Y существует фундаментальная расходящаяся в Y последовательность $\{y_n\}_{n=1}^\infty \subset Y$. Далее, существует нетривиальный $x_0 \in X$, т. е. $x_0 \neq 0$. Пусть $L_0 = \text{Lin}\{x_0\}$ — одномерное подпространство в X . По лемме 4.21 из [5, глава 4, с. 120], подпространство L_0 дополняемо в X замкнутым подпространством $N \subset X$, т. е. $X = L_0 \oplus N$. Для любого $n \in \mathbb{N}$ определим линейный оператор $A_n: X \rightarrow Y$ так, что $A_n(z) = 0$ для любого $z \in N$, а $A_n(x_0) = y_n$. Так как для любого $x \in X$ существуют единственные $z \in N$ и $\alpha \in \mathbb{C}$, такие, что $x = z + \alpha x_0$, то $A_n(x) = \alpha y_n$. Покажем, что $A_n \in \mathcal{L}(X, Y)$. Имеем

$$\|A_n\| = \sup_{\substack{\alpha \neq 0 \\ z \in N}} \frac{|\alpha| \|y_n\|_Y}{\|z + \alpha x_0\|_X} = \sup_{\substack{\alpha \neq 0 \\ z \in N}} \frac{\|y_n\|_Y}{\|\frac{z}{\alpha} + x_0\|_X} = \frac{\|y_n\|_Y}{\inf_{z \in N} \|x_0 - z\|_X} = \frac{\|y_n\|_Y}{\rho(x_0, N)}.$$

Так как N замкнуто, а $x_0 \notin N$, то $\rho(x_0, N) > 0$, поэтому $\|A_n\| < +\infty$, т. е. $A_n \in \mathcal{L}(X, Y)$. Аналогично можно показать (прделайте необходимые выкладки самостоятельно в качестве упражнения), что $\|A_n - A_m\| = \frac{\|y_n - y_m\|_Y}{\rho(x_0, N)}$. Отсюда следует, что последовательность операторов $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ фундаментальна в $\mathcal{L}(X, Y)$, так как последовательность $\{y_n\}_{n=1}^\infty$ фундаментальна в Y . Если предположить, что $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ сходится в $\mathcal{L}(X, Y)$ к оператору $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, т. е. $\|A_n - A\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, то отсюда сразу получаем поточечную сходимость последовательности $\{A_n x\}_{n=1}^\infty$ в Y к вектору Ax для любого $x \in X$, так как $\|A_n x - Ax\|_Y \leq \|A_n - A\| \|x\|_X \rightarrow 0$

при $n \rightarrow \infty$. Однако для $x = x_0$ последовательность $A_n x_0 = y_n$ является расходящейся в Y по условию. Следовательно, фундаментальная в $\mathcal{L}(X, Y)$ последовательность $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ является расходящейся.

Задача. Пусть $(X, \|\cdot\|_X)$ и $(Z, \|\cdot\|_Z)$ — линейные нормированные пространства, причем X не является нулевым, а Z является полным. Пусть $Y \subset Z$ — всюду плотное в Z незамкнутое подпространство. Доказать, что линейное нормированное пространство $\mathcal{L}(X, Y)$ является неполным, а его пополнением является линейное нормированное пространство $\mathcal{L}(X, Z)$.

Пример 16. *Неограниченная последовательность линейных непрерывных операторов, ограниченная поточечно.*

Пусть $(X, \|\cdot\|_X)$ и $(Y, \|\cdot\|_Y)$ — линейные нормированные пространства. Напомним, что последовательность операторов $\{A_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{L}(X, Y)$ называется поточечно ограниченной, если для любого $x \in X$ последовательность $\{A_n x\}_{n=1}^\infty$ ограничена в Y . Если пространство X является полным, то из поточечной ограниченности последовательности $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ следует ее ограниченность в $\mathcal{L}(X, Y)$, т. е. существует $R > 0$, такое, что для любого $n \in \mathbb{N}$ выполнено $\|A_n\| \leq R$. В этом состоит утверждение теоремы Банаха—Штейнгауза (см. теорему 2.6 из [5, глава 2, с. 55]). Если же пространство X не является полным, то поточечная ограниченность уже не влечет ограниченность последовательности операторов по операторной норме. Приведем соответствующий пример. Пусть $X = Y = \ell_1$, $\|\cdot\|_X = \|\cdot\|_{\ell_2}$, $\|\cdot\|_Y = \|\cdot\|_{\ell_1}$. Рассмотрим последовательность операторов $A_n: X \rightarrow Y$ вида

$$(A_n x)(k) = \begin{cases} \frac{x(k)}{\sqrt{k}} & , \quad 1 \leq k \leq n, \\ 0 & , \quad k > n. \end{cases}$$

Покажем, что $A_n \in \mathcal{L}(X, Y)$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Действи-

тельно, в силу неравенства Коши—Буняковского для любого $x \in \ell_1$ получаем

$$\|A_n x\|_{\ell_1} = \sum_{k=1}^n \frac{|x(k)|}{\sqrt{k}} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}} \sqrt{\sum_{k=1}^n (x(k))^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}} \|x\|_{\ell_2}.$$

Следовательно, $\|A_n\| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}}$. Далее, рассмотрев последовательность $x_n \in \ell_1$ вида $x_n(k) = \frac{1}{\sqrt{k}}$ для $1 \leq k \leq n$ и $x_n(k) = 0$ для $k > n$, получаем

$$\|A_n\| \geq \frac{\|A_n x_n\|_{\ell_1}}{\|x_n\|_{\ell_2}} = \frac{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}}{\sqrt{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}}} = \sqrt{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}}.$$

Следовательно, $\|A_n\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}}$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Тем самым доказано, что $A_n \in \mathcal{L}(X, Y)$ для любого $n \in \mathbb{N}$ и $\|A_n\| \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, т. е. последовательность $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ не является ограниченной в $\mathcal{L}(X, Y)$. Тем не менее последовательность $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ является ограниченной поточечно, так как для любого $x \in \ell_1$ имеем

$$\|A_n x\|_{\ell_1} = \sum_{k=1}^n \frac{|x(k)|}{\sqrt{k}} \leq \sum_{k=1}^n |x(k)| \leq \|x\|_{\ell_1} < +\infty.$$

Задача. Привести пример неполного линейного нормированного пространства $(X, \|\cdot\|_X)$, банахова пространства $(Y, \|\cdot\|_Y)$ и последовательности операторов $A_n \in \mathcal{L}(X, Y)$ поточечно сходящейся к неограниченному линейному оператору $A: X \rightarrow Y$, т. е. для любого $x \in X$ существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n x = Ax$, но $A \notin \mathcal{L}(X, Y)$. Сравнить полученный пример с утверждением теоремы 2.8 из [5, глава 2, с. 56].

Пример 17. *Существование линейного правого обратного оператора.* Пусть X и Y — линейные пространства, линейный оператор $A: X \rightarrow Y$. Определим образ оператора $\text{Im } A = \{ Ax \mid x \in X \}$, являющийся линейным подпространством в Y . Оператор $A_{\text{пр.}}^{-1}: \text{Im } A \rightarrow X$ называется правым обратным к A , если для любого $y \in \text{Im } A$ выполнено $A \left(A_{\text{пр.}}^{-1}(y) \right) = y$. Так как для любого $y \in \text{Im } A$ существует (вообще говоря, не единственный) вектор $x(y) \in X$, такой, что $A(x(y)) = y$, то правый обратный оператор всегда существует и определяется по формуле $A_{\text{пр.}}^{-1}(y) = x(y)$. Это означает, что правый обратный оператор может определяться не единственным образом и даже может не являться линейным. Приведите в качестве упражнения пример линейного оператора A , который имеет несколько нелинейных правых обратных операторов. Покажем, что всегда можно выбрать линейный правый обратный оператор (конечно, неединственным образом). Если $\text{Im } A = \{0\}$, то нулевой оператор является искомым линейным правым обратным оператором. Пусть $\text{Im } A \neq \{0\}$. Рассмотрим в ненулевом линейном пространстве $\text{Im } A$ базис Гамеля \mathcal{G} (см. пример 8). Для любого $e \in \mathcal{G}$ существует $x(e) \in X$, такой, что $A(x(e)) = e$. Определим линейный оператор $B: \text{Im } A \rightarrow X$ так, что $B(e) = x(e)$ для любого $t \in \mathcal{G}$. Так как для любого $y \in \text{Im } A$ существует единственный набор элементов $\{e_n\}_{n=1}^N \subset \mathcal{G}$ и чисел $\{\alpha_n\}_{n=1}^N$, таких, что $y = \sum_{n=1}^N \alpha_n e_n$, то определяем $B(y) = \sum_{n=1}^N \alpha_n x(e_n)$. При этом $A(B(y)) = \sum_{n=1}^N \alpha_n A(x(e_n)) = \sum_{n=1}^N \alpha_n e_n = y$, т. е. оператор B является линейным правым обратным для линейного оператора A .

Задача. Докажите, что линейный оператор $A: X \rightarrow Y$ имеет единственный правый обратный оператор тогда и только

ко тогда, когда $\text{Кег } A = \{0\}$. Докажите, что в этом случае для любого $x \in X$ выполнено $A_{\text{пр.}}^{-1}(A(x)) = x$, т. е. правый обратный оператор является также и левым обратным, а также является линейным оператором.

Пример 18. *Линейный ограниченный сюръективный оператор, не являющийся открытым отображением.*

Пусть $(X, \|\cdot\|_X)$ и $(Y, \|\cdot\|_Y)$ — линейные нормированные пространства, а оператор $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ является сюръективным, т. е. $\text{Im } A = Y$. Если при этом пространства X и Y являются полными, то оператор A является открытым отображением, т. е. образ любого открытого множества из X под действием оператора A является открытым множеством в Y . В этом состоит теорема Банаха об открытом отображении (см. теорему 2.11 из [5, глава 2, с. 58]). Покажем на примерах, что отказ от полноты пространства X или Y ведет к нарушению утверждения теоремы, т. е. в этом случае сюръективный оператор $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ может не быть открытым отображением.

Рассмотрим сначала случай, когда X полное, а Y не является полным. Пусть $(X, \|\cdot\|_X) = (\ell_1, \|\cdot\|_{\ell_1})$, $(Y, \|\cdot\|_Y) = (\ell_1, \|\cdot\|_{\ell_2})$. Пусть $A: X \rightarrow Y$ тождественное отображение, т. е. $Ax = x$ для любого $x \in \ell_1$. Тогда для любого $x \in \ell_1$ имеем $\|Ax\|_{\ell_2} = \|x\|_{\ell_2} \leq \|x\|_{\ell_1}$, т. е. $\|A\| \leq 1$ (и даже $\|A\| = 1$ — докажите это в качестве упражнения). Таким образом, $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. Сюръективность A очевидна. Покажем, что A не является открытым отображением. Рассмотрим образ открытого единичного шара с центром в нуле из X под действием A . Это множество $O = \{x \in \ell_1 \mid \|x\|_{\ell_1} < 1\}$. Покажем, что O не является открытым в Y . Рассмотрим последовательность $y_n \in \ell_1$ вида $y_n(k) = \frac{1}{k}$ для $1 \leq k \leq n$ и $y_n(k) = 0$ при $k > n$. Для любого $x_0 \in O$ и любого $\varepsilon > 0$ определим

$x_{n,\varepsilon} = x_0 + \varepsilon y_n$. Тогда $\|x_{n,\varepsilon} - x_0\|_{\ell_2} < \frac{\varepsilon\pi}{\sqrt{6}}$, а $\|x_{n,\varepsilon}\|_{\ell_1} \geq \varepsilon \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \|x_0\|_{\ell_1} \rightarrow +\infty$ при $n \rightarrow \infty$. Следовательно, для любого $\delta > 0$ существует $\varepsilon = \frac{\delta\sqrt{6}}{\pi}$, такое, что для любого $n \in \mathbb{N}$ точка $x_{n,\varepsilon} \in O_\delta^Y(x_0) = \{x \in \ell_1 \mid \|x - x_0\|_{\ell_2} < \delta\}$, но $\|x_{n,\varepsilon}\|_{\ell_1} > 1$ при всех достаточно больших $n \in \mathbb{N}$, т. е. $x_{n,\varepsilon} \notin O$. Таким образом, ни одна точка O не является внутренней для O в пространстве Y , т. е. O не является открытым в Y .

Задача. Докажите, что тождественное отображение

$$I: (\ell_1, \|\cdot\|_{\ell_2}) \rightarrow (\ell_1, \|\cdot\|_{\ell_1})$$

не является непрерывным, т. е. $\|I\| = +\infty$.

Теперь рассмотрим случай, когда X не является полным, а Y полное. Приведенный ниже пример предложил студент 474 группы МФТИ М. Исаев. Рассмотрим линейные нормированные пространства $(Y, \|\cdot\|_Y) = (\ell_2, \|\cdot\|_{\ell_2})$ и $(X, \|\cdot\|_X) = (\ell_2, \|\cdot\|_*)$, где $\|\cdot\|_*$ — специальная норма в ℓ_2 , которую определим позднее. Идея заключается в таком подборе $\|\cdot\|_*$, чтобы тождественный оператор $A: X \rightarrow Y$ вида $Ax = x$ для любого $x \in \ell_2$ оказался непрерывным, а обратный к нему $A^{-1}: Y \rightarrow X$, также тождественный $A^{-1}x = x$ для любого $x \in \ell_2$, уже непрерывным бы не являлся. В этом случае оператор A не является открытым отображением. Действительно, предположив противное, получим, что прообраз любого открытого из X множества под действием оператора A^{-1} (т. е. образ этого множества под действием A) будет открытым в Y , что означает непрерывность A^{-1} по теореме 6 из [3, глава II, § 5, с. 92]. Получаем противоречие с разрывностью A^{-1} .

Определим теперь $\|\cdot\|_*$ в ℓ_2 . Рассмотрим в ℓ_1 специальный базис Гамеля \mathcal{G}_1 , элементы которого имеют единичную ℓ_2 -норму, содержащий неограниченное по ℓ_1 -норме подмно-

жество E . Такой базис Гамеля существует. Действительно, рассмотрим в роли E счетное множество линейно независимых элементов $y_n \in \ell_1$ вида $y_n(k) = \frac{1}{kR_n}$ для $1 \leq k \leq n$ и $y_n(k) = 0$ для $k > n$, где $R_n = \sqrt{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}}$ для любого $n \in \mathbb{N}$.

Тогда получаем $\|y_n\|_{\ell_2} = 1$ для любого $n \in \mathbb{N}$, а $\|y_n\|_{\ell_1} = \frac{1}{R_n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \rightarrow +\infty$ при $n \rightarrow \infty$, и E является базисом Гамеля в $\text{Lin } E$. При этом $\text{Lin } E \neq \ell_1$, так как банахово пространство $(\ell_1, \|\cdot\|_{\ell_1})$ не может иметь счетный базис Гамеля E . Далее рассмотрим семейство \mathcal{P} , состоящее из пар $(\mathcal{L}, \mathcal{G}_{\mathcal{L}})$, где $\mathcal{L} \subset \ell_1$ — подпространство, содержащее $\text{Lin } E$, а $\mathcal{G}_{\mathcal{L}}$ — базис Гамеля в \mathcal{L} , содержащий E , элементы которого нормированы по ℓ_2 -норме. Семейство $\mathcal{P} \neq \emptyset$, так как $(\text{Lin } E, E) \in \mathcal{P}$. Частично упорядочим \mathcal{P} отношением \leq из примера 8 и по теореме Хаусдорфа о максимальнойности [5, приложение A1, с. 412] выделим в \mathcal{P} максимальное линейно упорядоченное подмножество \mathcal{S} . Определим $\mathcal{M}_1 = \bigcup_{(\mathcal{L}, \mathcal{G}_{\mathcal{L}}) \in \mathcal{S}} \mathcal{L}$ и $\mathcal{G}_1 = \bigcup_{(\mathcal{L}, \mathcal{G}_{\mathcal{L}}) \in \mathcal{S}} \mathcal{G}_{\mathcal{L}}$. Так же, как и в примере 8, можно показать (проведите необходимые выкладки в качестве упражнения), что $\mathcal{M}_1 = \ell_1$, а \mathcal{G}_1 — искомый базис Гамеля в ℓ_1 .

Далее, рассмотрим в ℓ_2 базис Гамеля \mathcal{G}_2 , содержащий \mathcal{G}_1 , элементы которого нормированы по ℓ_2 -норме. Для доказательства существования \mathcal{G}_2 рассмотрим семейство \mathcal{P} , состоящее из пар $(\mathcal{L}, \mathcal{G}_{\mathcal{L}})$, где $\mathcal{L} \subset \ell_2$ — подпространство, содержащее ℓ_1 , а $\mathcal{G}_{\mathcal{L}}$ — базис Гамеля в \mathcal{L} , содержащий \mathcal{G}_1 , элементы которого нормированы по ℓ_2 -норме. Семейство $\mathcal{P} \neq \emptyset$, так как $(\ell_1, \mathcal{G}_1) \in \mathcal{P}$. Частично упорядочим \mathcal{P} отношением \leq из примера 8 и по теореме Хаусдорфа о максимальнойности [5, приложение A1, с. 412] выделим в \mathcal{P} максимальное линейно

упорядоченное подмножество \mathcal{S} . Определим $\mathcal{M}_2 = \bigcup_{(\mathcal{L}, \mathcal{G}_{\mathcal{L}}) \in \mathcal{S}} \mathcal{L}$ и $\mathcal{G}_2 = \bigcup_{(\mathcal{L}, \mathcal{G}_{\mathcal{L}}) \in \mathcal{S}} \mathcal{G}_{\mathcal{L}}$. Так же, как и в примере 8, можно показать (проведите необходимые выкладки в качестве упражнения), что $\mathcal{M}_2 = \ell_2$, а \mathcal{G}_2 – искомый базис Гамеля в ℓ_2 .

Определим $\|\cdot\|_*$ на \mathcal{G}_2 следующим образом: для любого $e \in \mathcal{G}_2$

$$\|e\|_* = \begin{cases} \|e\|_{\ell_1}, & e \in \mathcal{G}_1, \\ \|e\|_{\ell_2}, & e \in \mathcal{G}_2 \setminus \mathcal{G}_1. \end{cases}$$

Так как для любого $x \in \ell_2$ существует единственный набор векторов $\{e_k\}_{k=1}^n \subset \mathcal{G}_2$ и чисел $\{\alpha_k\}_{k=1}^n$, таких, что $x = \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k$, то определим норму $\|x\|_* = \sum_{k=1}^n |\alpha_k| \|e_k\|_*$. Докажите в качестве упражнения, что введенная функция $\|\cdot\|_*$ удовлетворяет определению нормы на ℓ_2 .

Рассмотрим оператор $A: (\ell_2, \|\cdot\|_*) \rightarrow (\ell_2, \|\cdot\|_{\ell_2})$ вида $Ax = x$ для любого $x \in \ell_2$ (т. е. A — тождественный оператор). Покажем, что A является непрерывным. Действительно, для любого $x \in \ell_2$ имеем

$$\|Ax\|_{\ell_2} = \|x\|_{\ell_2} = \left\| \sum_{k=1}^n \alpha_k e_k \right\|_{\ell_2} \leq \sum_{k=1}^n |\alpha_k| \|e_k\|_{\ell_2} \leq \|x\|_*,$$

так как $\|e\|_{\ell_2} \leq \|e\|_{\ell_1}$ для любого $e \in \mathcal{G}_1$. Следовательно, $\|A\| \leq 1$, т. е. A является непрерывным. Однако обратный оператор $A^{-1}: (\ell_2, \|\cdot\|_{\ell_2}) \rightarrow (\ell_2, \|\cdot\|_*)$ вида $A^{-1}x = x$ для любого $x \in \ell_2$ уже не будет непрерывным. Действительно, множество $E \subset \mathcal{G}_1$, ограниченное в $(\ell_2, \|\cdot\|_{\ell_2})$ (по определению, $\|e\|_{\ell_2} = 1$ для любого $e \in E$), является неограниченным в $(\ell_2, \|\cdot\|_*)$ (по определению, $E \subset \ell_1$, поэтому $\|e\|_* = \|e\|_{\ell_1}$ для любого $e \in E$, а E не ограничено в $(\ell_1, \|\cdot\|_{\ell_1})$). Следовательно, оператор A^{-1} переводит ограниченное в простран-

в $(\ell_2, \|\cdot\|_{\ell_2})$ множество E неограниченное в пространстве $(\ell_2, \|\cdot\|_*)$ множество $A^{-1}(E) = E$, что и требовалось.

Задача. Пусть $(X, \|\cdot\|_X)$ и $(Y, \|\cdot\|_Y)$ — банаховы пространства, а оператор $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. Доказать, что существует непрерывный обратный оператор $A^{-1} \in \mathcal{L}(Y, X)$ тогда и только тогда, когда $\text{Ker } A = \{0\}$ и $\text{Im } A = Y$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Архангельский А.В., Пономарев В.И.* Основы общей топологии в задачах и упражнениях. М.: Наука, 1974.
2. *Гелбаум Г., Олмстед Дж.* Контрпримеры в анализе. М.: Мир, 1967.
3. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976.
4. *Рудин У.* Основы математического анализа. М.: Мир, 1976.
5. *Рудин У.* Функциональный анализ. М.: Мир, 1975.
6. *Треногин В.А.* Функциональный анализ. М.: Физматлит, 2002.