Московский физико-технический институт
(государственный университет)

Н.Ю. Петухова

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ПОДГОТОВКЕ К ТЕОРЕТИЧЕСКОМУ ЭКЗАМЕНУ ПО КУРСУ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Москва, 2010

УДК 517

Рецензент:

Методические указания по подготовке к теоретическому экзамену по курсу уравнений математической физики. / Сост. Петухова Н.Ю. – М.: МФТИ. 2010. – 20 с.

Предназначено для самостоятельной работы студентов третьего курса МФТИ (ГУ) при подготовке к сдаче устного экзамена по курсу уравнений математической физики. Содержит вопросы и задачи по всем основным темам курса.

Будет также полезным для преподавателей курса уравнений математической физики: как при составлении заданий по курсу, так и при приёме заданий у студентов.

Содержание

Предисловие

Данное методическое пособие предназначено для студентов третьего курса МФТИ (ГУ) при подготовке к сдаче устного экзамена по курсу уравнений математической физики. В первую очередь оно будет полезно для студентов, которые не справились со сдачей устного экзамена в основной срок и готовятся к переэкзаменовке. Пересдача экзамена по математике проходит в два этапа: первый этап — письменное тестирование. Здесь студент в письменной форме должен ответить на предложенные ему вопросы (обычно их 6 в варианте). Чтобы ответить на них, надо уметь решать простые стандартные задачи, знать основные определения и теоремы из пройденного курса уравнений математической физики. Тогда, дав правильные ответы на бо́льшую часть вопросов из варианта, студент покажет, что он готов к экзамену и может продолжать сдавать экзамен дальше: отвечать на экзамене. Следует также отметить, что ответы на все вопросы тестирования должны быть обоснованны: указаны формулы, теоремы, которые были использованы, приведены основные расчётные этапы решения практических задач.

В пособии представлено более ста оригинальных задач по всем основным темам из курса уравнений математической физики МФТИ. Часть этих задач предлагалась студентам на переэкзаменовке в 2005–2008 учебных годах. Поработав с данным методическим пособием, студент повторит все основные темы из курса уравнений математической физики, поэтому пособие будет полезным для всех студентов третьего курса, которые готовятся к сдаче устного экзамена по данному предмету.

Вопросы и задачи

1. Классификация дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка.

1.1. В каком случае линейное дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка относится в точке $x_0 \in \in \mathbb{R}^n$ к

а) гиперболическому типу;

б) параболическому типу;

в) эллиптическому типу?

1.2. Дать определение характеристической поверхности (характеристики) для уравнения в частных производных второго порядка.

1.3. Дано волновое уравнение для $(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1}$: $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta u$, $\Delta u = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$.

а) Определить тип этого уравнения в произвольной точке $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

б) Выписать его характеристическое уравнение.

1.4. Определить тип уравнения:

а) уравнение теплопроводности: $\dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u$ для $(x_0, t_0) \in \in \mathbb{R}^{n+1}$;

б) $\Delta u = \dfrac{\partial u}{\partial x_1} + x_2 \dfrac{\partial u}{\partial x_4} + e^{x_3}$, в произвольной точке $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

1.5. Определить тип уравнения во всех точках $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$:, указать те множества в $\mathbb{R}^3$, где тип уравнения сохраняется (множества обязательно задать аналитически (равенствами или неравенствами)):

а) $u_{xx} + u_{yy} + (x^2 - 1)u_{zz} = u_z$;

б) $u_{xx} + xyu_{yy} + e^x u_{zz} = 0$;

в) $\sin x u_{xx} + u_{yy} = u_z$;

г) $(x^2 + y^2 + z^2 - 1)u_{xx} + (2 + \cos y)u_{yy} + 3u_{zz} = xu_x$.

1.6. Определить тип уравнения и указать те множества плоскости (x,y), на которых он сохраняется (множества обязательно нарисовать или задать аналитически (равенствами или неравенствами)):

а) $(x^2+y^2-1)u_{xx}+xyu_{yy}-u_x=0$;
б) $xu_{xx}+u_{xy}-yu_{yy}=u_x$;
в) $xu_{xx}-(x+y)u_{xy}+yu_{yy}-u_y=0$;
г) $x^2u_{xx}+xyu_{xy}+u_{yy}=2u_y$;
д) $u_{xx}+2e^xu_{xy}+u_{yy}+e^xu_y=0$;
е) $e^yu_{xx}+u_{xy}-u_{yy}=u_x$;
ж) $u_{xx}-3x^2u_{xy}+2x^4u_{yy}+2u_y=0$;
з) $16u_{xx}+8u_{xy}+u_{yy}-16u_x+4u_y=0$;
и) $9u_{xx}+6u_{xy}+u_{yy}-12u_x-4u_y=0$;
к) $25u_{xx}+10u_{xy}+u_{yy}+20u_x+4u_y=0$.

2. Решение элементарных уравнений в частных производных второго порядка.

2.1–2.3: Найти общее решение уравнения $u(x,y)$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

2.1. $4xu_{xy}-3u_y=0$; **2.2.** $2yu_{xy}-u_y=0$;
2.3. $u_{xy}-2xu_y=0$.

2.4–2.9: Найти общее решение уравнения $u(x,y)$, приведя его к каноническому виду:

2.4. $u_{xx}-3u_{xy}+2u_{yy}=0$; **2.5.** $u_{xx}-u_{xy}-2u_{yy}=0$;
2.6. $49u_{xx}+28u_{xy}+3u_{yy}=0$; **2.7.** $u_{xx}+12u_{xy}+27u_{yy}=0$;
2.8. $48u_{xx}+16u_{xy}+u_{yy}=0$; **2.9.** $75u_{xx}+20u_{xy}+u_{yy}=0$.

3. Характеристики уравнения второго порядка.

3.1–3.6: Найти характеристики уравнения, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$.

3.1. $u_{xx}-4u_{xy}+3u_{yy}=0$; **3.2.** $2u_{xx}+u_{xy}-u_{yy}=0$;
3.3. $u_{xx}-3x^2u_{xy}+2x^4u_{yy}-2u_x=0$;
3.4. $3x^2u_{xx}+2xyu_{xy}-y^2u_{yy}=yu_x$.
3.5. $xu_{xx}-xu_{yy}+yu_x=0$; **3.6.** $y^2u_{xx}-x^2u_{yy}-u=0$.

4. Решение уравнения гиперболического типа в $\mathbb{R}^2$.

4.1–4.4: Решить задачу, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

4.1. $\begin{cases} u_{xy}=0, \\ u(x,0)=x^2+1, \\ u(0,y)=\sin y+1; \end{cases}$ **4.2.** $\begin{cases} u_{xy}=0, \\ u(x,0)=\sin x+1, \\ u(0,y)=e^y+y^2; \end{cases}$

4.3. $\begin{cases} u_{xy}=0, \\ u|_{x=y}=2y,\ u_x|_{x=y}=1; \end{cases}$ **4.4.** $\begin{cases} u_{xy}=0, \\ u|_{x=y}=2y,\ u_x|_{x=y}=2y. \end{cases}$

5. Одномерное волновое уравнение.

5.1. Поставить задачу Коши для однородного волнового уравнения на прямой и выписать формулу Даламбера для её решения (в том числе указать условия на гладкость всех входящих в формулу функций).

5.2. Поставить задачу Коши для неоднородного волнового уравнения на прямой и выписать формулу Дюамеля для нахождения решения неоднородного уравнения (в том числе указать условия на гладкость функций, входящих в формулу).

5.3–5.8: Найти решение задачи по формуле Даламбера ($x \in \in \mathbb{R}^1$, $t > 0$):

5.3. $\begin{cases} 9u_{tt} = u_{xx}, \\ u|_{t=0} = e^{3x},\ u_t|_{t=0} = 2; \end{cases}$

5.4. $\begin{cases} 4u_{tt} = u_{xx}, \\ u|_{t=0} = \sin 2x,\ u_t|_{t=0} = e^{-x}; \end{cases}$

5.5. $\begin{cases} u_{tt} = 4u_{xx}, \\ u|_{t=0} = x^2 + 1,\ u_t|_{t=0} = 3x^2; \end{cases}$

5.6. $\begin{cases} u_{tt} = 16u_{xx}, \\ u|_{t=0} = \cos^2 x,\ u_t|_{t=0} = \cos^2 x; \end{cases}$

5.7. $\begin{cases} u_{tt} = 9u_{xx}, \\ u|_{t=0} = x + e^{-x},\ u_t|_{t=0} = e^{-x}; \end{cases}$

5.8. $\begin{cases} 5u_{tt} = u_{xx}, \\ u|_{t=0} = x \sin x,\ u_t|_{t=0} = x \cos x^2. \end{cases}$

5.9–5.10: Найти решение задачи Коши для неоднородного волнового уравнения по формуле Дюамеля ($x \in \mathbb{R}^1$, $t > 0$):

5.9. $\begin{cases} u_{tt} = 4u_{xx} + \dfrac{x}{t+1}, \\ u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0; \end{cases}$ **5.10.** $\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} + \dfrac{xt}{t+2}, \\ u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0. \end{cases}$

6. Двумерное и трёхмерное волновое уравнение.

6.1. Поставить задачу Коши для однородного волнового уравнения в $\mathbb{R}^2$ ($\mathbb{R}^3$) и указать, при каких условиях её решение можно выписать по формуле Пуассона (формуле Кирхгофа).

6.2–6.7: Решить следующие задачи в $\mathbb{R}^2$ ($t > 0$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$):

6.2. $\begin{cases} 9u_{tt} = \Delta u, \\ u|_{t=0} = x^2,\ u_t|_{t=0} = y; \end{cases}$

6.3. $\begin{cases} u_{tt} = a^2\Delta u, \\ u|_{t=0} = \sin x e^y, \ \ u_t|_{t=0} = 2; \end{cases}$

6.4. $\begin{cases} u_{tt} = a^2\Delta u, \\ u|_{t=0} = 0, \ \ u_t|_{t=0} = (2x+y)^2; \end{cases}$

6.5. $\begin{cases} u_{tt} = \dfrac{1}{4}\,\Delta u, \\ u|_{t=0} = 0, \ \ u_t|_{t=0} = (2x-3y)^2; \end{cases}$

6.6. $\begin{cases} u_{tt} = 4\Delta u, \\ u|_{t=0} = 4x^2+5y^2, \ \ u_t|_{t=0} = 0; \end{cases}$

6.7. $\begin{cases} u_{tt} = 25\Delta u, \\ u|_{t=0} = 5x^2-6y^2, \ \ u_t|_{t=0} = 0. \end{cases}$

6.8–6.15: Решить следующие задачи в $\mathbb{R}^3$ ($t>0$, $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$):

6.8. $\begin{cases} u_{tt} = 4\Delta u, \\ u|_{t=0} = xy, \ \ u_t|_{t=0} = z; \end{cases}$

6.9. $\begin{cases} u_{tt} = a^2\Delta u, \\ u|_{t=0} = x+y, \ \ u_t|_{t=0} = \sin z; \end{cases}$

6.10. $\begin{cases} u_{tt} = \dfrac{1}{4}\,\Delta u, \\ u|_{t=0} = x^2+y^2+z^2, \ \ u_t|_{t=0} = 0; \end{cases}$

6.11. $\begin{cases} u_{tt} = \Delta u, \\ u|_{t=0} = \sin(x^2+y^2+z^2), \ \ u_t|_{t=0} = 0; \end{cases}$

6.12. $\begin{cases} u_{tt} = 2\Delta u, \\ u|_{t=0} = 0, \ \ u_t|_{t=0} = (x-2y+z)^2; \end{cases}$

6.13. $\begin{cases} u_{tt} = 16\Delta u, \\ u|_{t=0} = x^2+y^2-z^2, \ \ u_t|_{t=0} = 0; \end{cases}$

6.14. $\begin{cases} 4u_{tt} = \Delta u, \\ u|_{t=0} = 2x^2+y^2-2z^2, \ \ u_t|_{t=0} = 0; \end{cases}$

6.15. $\begin{cases} u_{tt} = 9\Delta u, \\ u|_{t=0} = 0, \ \ u_t|_{t=0} = (3x+4y+2z)^2. \end{cases}$

7. Смешанная задача для волнового уравнения в $\mathbb{R}^1$.

7.1–7.4: Решить следующие задачи ($t>0$, $x>0$):

7.1. $\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, \\ u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0, \ \ u|_{x=0} = \sin t; \end{cases}$

7.2. $\begin{cases} u_{tt} = 4u_{xx}, \\ u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0, \ \ u_x|_{x=0} = \sin t; \end{cases}$

7.3. $\begin{cases} 9u_{tt} = u_{xx}, \\ u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0, \ u_x|_{x=0} = t; \end{cases}$

7.4. $\begin{cases} u_{tt} = 2u_{xx}, \\ u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0, \ u_x|_{x=0} = t^2. \end{cases}$

8. Задача Коши для уравнения параболического типа.

8.1. а) Поставить задачу Коши для однородного уравнения теплопроводности для $(x,t) \in \mathbb{R}^2$ (для $(x,t) \in \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 1$).

б) Выписать формулу Пуассона для её решения и указать условия её применимости (на гладкость всех входящих в неё функций).

8.2–8.5: Решить следующие задачи для $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ $(t > 0)$:

8.2. $\begin{cases} 9u_t = \Delta u, \\ u|_{t=0} = (xy)^2; \end{cases}$ **8.3.** $\begin{cases} u_t = 4\Delta u, \\ u|_{t=0} = \sin x + \sin y; \end{cases}$

8.4. $\begin{cases} u_t = 4\Delta u, \\ u|_{t=0} = \sin x \cdot \sin y; \end{cases}$ **8.5.** $\begin{cases} 4u_t = \Delta u, \\ u|_{t=0} = e^x y^2. \end{cases}$

8.6–8.9: Решить следующие задачи в $\mathbb{R}^3$ $(t > 0,\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3)$:

8.6. $\begin{cases} 9u_t = \Delta u, \\ u|_{t=0} = x^2 + y^2 + z^2; \end{cases}$

8.7. $\begin{cases} u_t = 2\Delta u, \\ u|_{t=0} = \sin x + \sin y + \cos z; \end{cases}$

8.8. $\begin{cases} u_t = 4\Delta u, \\ u|_{t=0} = \sin x \cdot \sin y \cdot \cos z; \end{cases}$ **8.9.** $\begin{cases} 4u_t = \Delta u, \\ u|_{t=0} = xy + z^2. \end{cases}$

9. Смешанная задача для уравнения гиперболического или параболического типа на отрезке. Применение метода Фурье.

9.1–9.6: а) Записать общий вид решения следующей задачи в виде функционального ряда (функций, зависящих от x и зависящих от t);

б) Указать необходимые условия на гладкость функций $f(x)$, $g(x)$, $F(x,t)$;

в) Вычислить в нём все функции, зависящие от x (функции, зависящие от t, вычислять не надо):

9.1. $\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad t > 0, \ 0 < x < \pi, \\ u|_{t=0} = f(x), \ u_t|_{t=0} = g(x), \ u|_{x=0} = 0 = u_x|_{x=\pi}; \end{cases}$

9.2. $\begin{cases} u_{tt} = 4u_{xx} + 4u + \cos t, \quad t > 0,\ 0 < x < 1, \\ u|_{t=0} = f(x),\ u_t|_{t=0} = g(x),\ u_x|_{x=0} = 0 = u_x|_{x=1}; \end{cases}$

9.3. $\begin{cases} 4u_{tt} = u_{xx} + F(x,t), \quad t > 0,\ 0 < x < 2, \\ u|_{t=0} = f(x),\ u_t|_{t=0} = g(x),\ u_x|_{x=0} = 0 = u_x|_{x=2}; \end{cases}$

9.4. $\begin{cases} u_{tt} = 9u_{xx} + F(x,t), \quad t > 0,\ 0 < x < 2, \\ u|_{t=0} = f(x),\ u_t|_{t=0} = g(x),\ u|_{x=0} = 0 = u|_{x=2}; \end{cases}$

9.5. $\begin{cases} u_t = a^2u_{xx} - 3u + x^2e^t, \quad t > 0,\ 0 < x < 1, \\ u|_{t=0} = f(x),\ u_x|_{x=0} = 0 = u|_{x=1}; \end{cases}$

9.6. $\begin{cases} 9u_t = u_{xx} + F(x,t), \quad t > 0,\ 0 < x < 3, \\ u|_{t=0} = f(x),\ u_x|_{x=0} = u|_{x=3} = 0. \end{cases}$

10. Смешанная задача в прямоугольной области.

Применение метода Фурье.

10.1–10.4: а) Записать общий вид решения следующей задачи в виде функционального ряда (функций, зависящих от x, зависящих от y и зависящих от t),

б) Вычислить в нём все функции, зависящие от x и зависящие от y (функции, зависящие от t вычислять не надо):

10.1. $\begin{cases} u_{tt} = a^2\Delta u, \quad t > 0,\ 0 < x < 1,\ 0 < y < 1, \\ u|_{t=0} = 2xy,\ u_t|_{t=0} = 0, \\ u|_{x=0} = u|_{x=1} = 0,\ u|_{y=0} = u|_{y=1} = 0; \end{cases}$

10.2. $\begin{cases} u_{tt} = 4\Delta u + xyt, \quad t > 0,\ 0 < x < 1,\ 0 < y < \pi, \\ u|_{t=0} = 0,\ u_t|_{t=0} = y, \\ u_x|_{x=0} = u_x|_{x=1} = 0,\ u|_{y=0} = u|_{y=\pi} = 0; \end{cases}$

10.3. $\begin{cases} 9u_t = \Delta u, \quad t > 0,\ 0 < x < 1,\ 0 < y < 2, \\ u|_{t=0} = x + y,\ u|_{x=0} = u_x|_{x=1} = 0,\ u|_{y=0} = u|_{y=2} = 0; \end{cases}$

10.4. $\begin{cases} u_t = 25\Delta u, \quad t > 0,\ 0 < x < \pi,\ 0 < y < 2\pi, \\ u|_{t=0} = xy,\ u_x|_{x=0} = u|_{x=\pi} = 0,\ u|_{y=0} = u_y|_{x=2\pi} = 0. \end{cases}$

11. Краевая задача для уравнения эллиптического типа.

11.1. Поставить внутреннюю (внешнюю) задачу Дирихле для уравнения Лапласа в $\mathbb{R}^3$, указать условия, при которых она имеет решения.

11.2. Поставить внутреннюю (внешнюю) задачу Неймана для уравнения Лапласа в $\mathbb{R}^3$, указать условия, при которых она имеет решение.

11.3. Сформулировать теорему о среднем для гармонических функций, обязательно указать условия на гладкость функций.

11.4. Сформулировать принцип максимума модуля для гармонических функций, обязательно указать необходимые условия на гладкость функций.

11.5. Сформулировать первую и вторую формулы Грина, обязательно указать условия на гладкость функций.

12. Краевая задача для уравнения Лапласа в круге. Применение метода Фурье.

12.1–12.4: Решение следующей задачи записать в виде функционального ряда (функций, зависящих от r и зависящих от φ) и указать в нём общий вид этих функций ($(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$):

12.1. $\begin{cases} \Delta u = 0, \quad r < R, \\ u|_{r=R} = \cos^4\varphi; \end{cases}$

12.2. $\begin{cases} \Delta u = 0, \quad r > 2, \\ (u + 2u_r)|_{r=2} = \varphi^2, \ |u||_{r=\infty} < \infty; \end{cases}$

12.3. $\begin{cases} \Delta u = 0, \quad 1 < r < 2, \\ u|_{r=1} = \sin^2\varphi + \cos^3\varphi, \ u|_{r=2} = 0; \end{cases}$

12.4. $\begin{cases} \Delta u = 0, \quad 2 < r < 4, \\ u|_{r=2} = 0, \ u_r|_{r=4} = \varphi. \end{cases}$

12.5–12.10: Решить следующие задачи ($(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$):

12.5. $\begin{cases} \Delta u = 0, \quad r < 2, \\ u|_{r=2} = 3 + \sin\varphi; \end{cases}$

12.6. $\begin{cases} \Delta u = 0, \quad r > 1, \\ |u(r,\varphi)||_{r=\infty} < \infty, \ u_r|_{r=1} = \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right); \end{cases}$

12.7. $\begin{cases} \Delta u = 0, \quad r < R, \\ (u + u_r)|_{r=R} = 2\cos\varphi; \end{cases}$

12.8. $\begin{cases} \Delta u = 0, \quad r > 2, \\ u|_{r=2} = \cos^2\varphi, \ |u(r,\varphi)||_{r=\infty} < \infty; \end{cases}$

12.9. $\begin{cases} \Delta u = 0, \quad r < 10, \\ (u + 3u_r)|_{r=10} = \cos\left(\varphi - \frac{\pi}{6}\right); \end{cases}$

12.10. $\begin{cases} \Delta u = 0, \quad r > 3, \\ u_r|_{r=3} = 2 - \sin^2\varphi, \ |u(r,\varphi)||_{r=\infty} < \infty. \end{cases}$

13. Смешанная начально-краевая задача в круге. Применение функций Бесселя.

13.1–13.4: а) Решение следующей задачи записать в виде функционального ряда с разделёнными переменными (функций, зависящих от t, зависящих от r и зависящих от φ);

б) указать в нём общий вид функций, зависящих от r и зависящих от φ (функции, зависящие от t, вычислять не надо);

в) указать дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет функция Бесселя $J_0(x)$: ($t > 0$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$; $r = \sqrt{x^2+y^2}$; $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$).

13.1. $\begin{cases} u_{tt} = a^2\Delta u, \quad t > 0, \ r < 1, \\ u|_{r=1} = 0, \ u|_{t=0} = r^2\sin\varphi, \ u_t|_{t=0} = 0; \end{cases}$

13.2. $\begin{cases} 4u_{tt} = \Delta u, \quad t > 0, \ r < 1, \\ u|_{r=1} = 0, \ u|_{t=0} = J_0\left(\mu_1^{(0)} r\right), \ u_t|_{t=0} = 0, \end{cases}$ $\mu_1^{(0)}$ — положительный ноль функции $J_0(x)$;

13.3. $\begin{cases} u_t = 4\Delta u, \quad t > 0, \ r < 2, \\ u|_{r=2} = 0, \ u|_{t=0} = J_1\left(\mu_2^{(1)} \frac{r}{2}\right)\sin\varphi, \end{cases}$ $\mu_2^{(1)}$ — положительный ноль функции $J_1(x)$;

13.4. $\begin{cases} u_{tt} = \Delta u, \quad t > 0, \ r < 2, \\ u|_{r=2} = 0, \ u|_{t=0} = J_0\left(\mu_1^{(0)} \frac{r}{2}\right), \ u_t|_{t=0} J_2\left(\mu_1^{(2)} \frac{r}{2}\right)\cos 2\varphi, \end{cases}$

$\mu_1^{(0)}$ — положительный ноль функции $J_0(x)$, $\mu_1^{(2)}$ — положительный ноль $J_2(x)$.

14. Интегральные уравнения.

14.1. Дать определения ядра, собственной функции и характеристического числа для интегрального оператора Фредгольма.

14.2. Для интегрального оператора Фредгольма дано $K(x,y)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$;

а) указать $K^*(x,y)$;

б) указать, является ли $K(x,y)$ эрмитовым;

в) указать, является ли $K(x,y)$ вырожденным:

$$K(x,y)=\left\{1)\ x-y^3x;\quad 2)\ xy-x^2y^2;\quad 3)\ y\cos x-\sin y;\right.$$
$$4)\ e^{x+y}\quad 5)\ \sin(x-y);\quad 6)\ e^{xy};\quad 7)\ \cos(xy);$$
$$\left.8)\ \frac{1}{x+y};\quad 9)\ \frac{1}{(x-y)^3}\right\}.$$

14.3–14.7: В следующих задачах дано интегральное уравнение;

г) выписать $K(x,y)$;

д) выписать сопряжённое однородное уравнение;

е) указать общий вид формулы для вычисления $\varphi(x)$:

14.3. $\varphi(x)=\lambda\int_{-1}^{1}(xe^{-x}\operatorname{sh}y+\sin xy^4)\cos y\varphi(y)\,dy+f(x)$;

14.4. $\varphi(x)=\lambda\int_{0}^{2}(xy-e^{x}\operatorname{sh}y)\varphi(y)\,dy+x^3$;

14.5. $\varphi(x)=\lambda\int_{0}^{1}\sin(x+3y)\varphi(y)\,dy+\cos x$;

14.6. $\varphi(x)=\lambda\int_{1}^{2}\left(\frac{e^{x-y}+\sin x}{x}\right)\varphi(y)\,dy+x^2$;

14.7. $\varphi(x)=\lambda\int_{-1}^{1}\left(xy+\frac{x+3y}{2}\right)\varphi(y)\,dy+2x$.

14.8. Для интегрального оператора Фредгольма дано: $K(x,y)=1$ $((x,y)\in[0;1])$. Найти собственные функции и характеристические числа этого оператора.

14.9–14.12: В следующих задачах дано интегральное уравнение;

а) выписать $K^*(x,y)$;

б) сформулировать теорему Фредгольма о необходимом и достаточном условии разрешимости этого уравнения при данной функции $f(x)$ (третью теорему Фредгольма):

14.9. $\varphi(x)=\lambda\int_{0}^{2}(xy+e^{x}\operatorname{sh}y)\varphi(y)\,dy+f(x)$;

14.10. $\varphi(x)=\lambda\int_{0}^{1}\cos(x+3y)\varphi(y)\,dy+f(x)$;

14.11. $\varphi(x)=\lambda\int_{-1}^{1}e^{x-y}\varphi(y)\,dy+f(x)$;

14.12. $\varphi(x)=\lambda\int_{-2}^{-1}\left(\frac{\cos(x-y)+\sin x}{x}\right)\varphi(y)\,dy+f(x)$.

15. Задача на собственные значения и собственные функции.

15.1. Найти все собственные функции $y(x)$ для оператора $Ly = -y''$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{6}\right]$, удовлетворяющие условиям: $y(0) = 0$, $y\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0$.

15.2. Найти все собственные функции $y(x)$ для оператора $Ly = -y''$ на отрезке $[0; 1]$, удовлетворяющие условиям: $y(0) = 0$, $y'(1) = 0$.

15.3. Найти все собственные функции $y(x)$ для оператора $Ly = -y''$ на отрезке $[0; \pi]$, удовлетворяющие условиям: $y'(0) = 0$, $y'(\pi) + y(\pi) = 0$.

15.4. Найти все собственные функции $y(x)$ для оператора $Ly = -y''$ на отрезке $\left[\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right]$, удовлетворяющие условиям: $y\left(\frac{1}{4}\right) = y'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$.

15.5. Найти все собственные функции $y(x)$ для оператора $Ly = -y''$ на отрезке $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$, удовлетворяющие условиям: $y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = y(\pi) = 0$.

15.6. Найти все собственные функции $y(x)$ для оператора $Ly = -y''$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$, удовлетворяющие условиям: $y(0) = 0$, $y\left(\frac{\pi}{4}\right) - y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$.

16. Задача Штурма–Лиувилля. Применение функции Грина.

16.1. Дать определение оператора Штурма–Лиувилля. Указать условия на гладкость и знакоопределённость (если надо) всех входящих в него функций.

16.2. Дать определение функции Грина задачи Штурма–Лиувилля и указать общий вид формулы для её вычисления.

16.4–16.7: Найти функции Грина оператора Штурма–Лиувилля L:

16.3. $\begin{cases} Ly = -y'', & 0 < x < 1, \\ y(0) = y(1) = 0; \end{cases}$ **16.4.** $\begin{cases} Ly = -y'', & 0 < x < 2, \\ y(0) = y'(2) = 0; \end{cases}$

16.5. $\begin{cases} Ly = -y'' + y, \quad 0 < x < 1, \\ y(0) + y'(0) = 0,\ y(1) = 0; \end{cases}$

16.6. $\begin{cases} Ly = -y'' + 4y, \quad 0 < x < 1, \\ 2y(0) - y'(0) = 0,\ y'(1) = 0. \end{cases}$

16.8–16.11: а) С помощью функции Грина свести задачу Штурма–Лиувилля к интегральному уравнению;

б) указать общий вид функции Грина (точно вычислять функцию Грина не надо):

16.7. $\begin{cases} -y'' = \lambda y, \quad 0 < x < 2, \\ y(0) = y(2) = 0; \end{cases}$

16.8. $\begin{cases} -y'' + xy = \lambda y + x^3, \quad 1 < x < 2, \\ y(1) = 0,\ y'(2) = 0; \end{cases}$

16.9. $\begin{cases} -x^2y'' - 2xy' = \lambda y, \quad 1 < x < 2, \\ y(1) + y'(1) = 0,\ y(2) = 0; \end{cases}$

16.10. $\begin{cases} -e^x y'' - e^x y' + x^3 y = \lambda y + \sin x, \quad 0 < x < 1, \\ y(0) + 2y'(0) = 0,\ y'(1) = 0. \end{cases}$

17. Метод потенциалов.

17.1. Дать определение объёмного потенциала в $\mathbb{R}^3$ и перечислить его основные свойства.

17.2.

а) Дать определение поверхностного потенциала простого слоя в $\mathbb{R}^3$;

б) указать необходимые условия на гладкость задающих его функций и на гладкость поверхности;

в) перечислить его основные свойства.

17.3. Дать определение объёмного потенциала в $\mathbb{R}_3$ и перечислить его основные свойства.

18. Задачи на сферические функции.

18.1. Выписать формулу для оператора Лапласа Δu в сферических координатах (r, φ, θ) ($(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $x = r\cos\varphi\sin\theta$, $y = r\sin\varphi\sin\theta$, $z = r\cos\theta$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\varphi \in [0; 2\pi]$, $\theta \in [0, \pi]$).

18.2. Решение уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ в сферических координатах находят методом разделения переменных: $u(r, \varphi, \theta) = Z(r)Y(\varphi, \theta)$.

а) Выписать дифференциальные уравнения для функций $Z(r)$ и $Y(\varphi,\theta)$;

б) Пусть $Y(\varphi,\theta)=\Phi(\varphi)X(\theta)$. Выписать уравнение для функции $\Phi(\varphi)$, решение этого уравнения, уравнения для функции $X(\theta)$.

18.3. Дать определение полинома Лежандра $P_n(\xi)$, $n=0$, 1, 2, $\ldots$, выписать дифференциальное уравнение, которому он удовлетворяет, вычислить также

$$\int_{-1}^{1} P_n(\xi)P_m(\xi)\,d\xi, \quad n\neq m.$$

18.4. Дать определение полинома Лежандра $P_n(\xi)$, $n=0$, 1, 2, $\ldots$ и присоединённых полиномов Лежандра $P_n^{(m)}(\xi)$, $m=0$, 1, $\ldots$, n.

18.5. Решение уравнения Лапласа $\Delta u=0$ в сферических координатах находят методом разделения переменных: $u(r,\varphi,\theta)=$ $=\sum\limits_{n=0}^{\infty} Z_n(r)Y_n(\varphi,\theta)$. Выписать формулы для $Z_n(r)$ и $Y_n(\varphi,\theta)$.

18.6. Выписать формулу для решения задачи Дирихле $u(r,\varphi,\theta)$:

а) внутри шара $\begin{cases}\Delta u=0,\ r<R,\\ u|_{r=R}=f(\varphi,\theta);\end{cases}$

б) вне шара $\begin{cases}\Delta u=0,\ r>R,\\ |u|\,|_{r>\infty}<\infty,\ u|_{r=R}=f(\varphi,\theta);\end{cases}$

в) в сферическом слое $\begin{cases}\Delta u=0,\ R_1<r<R_2,\\ u|_{r=R_1}=f(\varphi,\theta), u|_{r=R_2}=f(\varphi,\theta).\end{cases}$

18.7–18.14: Решить следующие задачи: ($(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, $x=$ $=r\cos\varphi\sin\theta$, $y=r\sin\varphi\sin\theta$, $z=r\cos\theta$, $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$):

18.7. $\begin{cases}\Delta u=0,\ r<R,\\ u|_{r=R}=\cos\theta;\end{cases}$

18.8. $\begin{cases}\Delta u=0,\ r>R,\\ |u|\underset{r\to\infty}{\to}0,\ u|_{r=R}=\cos\theta;\end{cases}$

18.9. $\begin{cases}\Delta u=0,\ r<R,\\ u|_{r=R}=\cos^2\theta;\end{cases}$

18.10. $\begin{cases}\Delta u=0,\ r>R,\\ |u|\underset{r\to\infty}{\to}0,\ u|_{r=R}=\cos^2\theta;\end{cases}$

18.11. $\begin{cases} \Delta u = 0, \ r < R, \\ u|_{r=R} = \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right)\sin\theta; \end{cases}$

18.12. $\begin{cases} \Delta u = 0, \ r > R, \\ |u| \underset{r\to\infty}{\to} 0, \ u|_{r=R} = \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right)\sin\theta; \end{cases}$

18.13. $\begin{cases} \Delta u = 0, \ r < 1, \\ (u + u_r)|_{r=1} = \sin\theta\cos\varphi + \sin^2\theta; \end{cases}$

18.14. $\begin{cases} \Delta u = 0, \ r > 1, \\ |u| \underset{r\to\infty}{\to} 0, \ (u - 2u_r)|_{r=R} = 1 + \sin\varphi\sin\theta. \end{cases}$

19. Вариационные задачи.

19.1. Дифференциальный оператор L имеет вид

$$\begin{gathered} Lu = -\frac{d}{dx}\left(p(x)\,\frac{du}{dx}\right) + \varepsilon(x)u, \quad a < x < b, \\ p(x) \in C^2(a;b); \quad \varepsilon(x) \in C(a,b), \ p(x) > 0. \end{gathered} \tag{1}$$

Дать определение квадратичной формы оператора L.

19.2. Выписать квадратичную форму оператора L, если:

а) $Lu = -u''$, $0 < x < 1$, $u \in \mathring{C}^1[0;1]$;

б) $Lu = -\frac{d}{dx}\left(e^x \cdot u'(x)\right)$, $-1 < x < 1$, $u \in \mathring{C}^1[-1;1]$;

в) $Lu = -\frac{d}{dx}\left(x^2 u'(x)\right) - u(x)$, $1 < x < 2$, $u \in \mathring{C}^1[1;2]$;

г) $Lu = -\frac{d}{dx}\left((1+x^2)u'(x)\right) + \sin u(x)$, $-1 < x < 1$, $u \in \mathring{C}^2[-1;1]$.

19.3. Пусть функция $u(x) \in \mathring{C}_1(a;b]$ есть минимум функционала

$$\begin{gathered} J(u) = \int_a^b \left(p(x)u'^2(x) + \varepsilon(x)\cdot u\right)dx, \\ p(x) \in C^1(a,b), \quad \varepsilon(x) \in C(a,b), \quad p(x) > 0. \end{gathered}$$

Поставить задачу, решением которой является функция $u(x)$.

19.4. Найти $\inf\limits_{u\in D} J(u)$, если:

а) $J(u) = \int_0^1 u'^2(x)\,dx$, $D = \{u(x) \in \mathring{C}^1[0;1], \ \|u\| = 1\}$;

б) $J(u) = \int_0^\pi u'^2(x)\,dx$, $D = \{u(x) \in \mathring{C}^1[0;\pi], \ \|u\| = 1\}$;

в) $J(u) = \int_0^\pi u'^2(x)\,dx$, $D = \{u(x) \in C^1[0;\pi], \ u'(0) = u'(\pi) = 0\}$;

г) $J(u) = \int_0^1 u'^2(x)\,dx$, $D = \{u(x) \in C^1[0;1],\ u(0) = 0,\ u'(1) = 0\}$.

19.5. Пусть функция $u_0(x) \in D$ реализует минимум функционала $J(u)$. Найти $u_0(x)$, если:

а) $D = \{u(x) \in \mathring{C}^1[0;1]\}$, $J(u) = \int_0^1 (u'^2 + 2u)\,dx$;

б) $D = \{u(x) \in \mathring{C}_1[0,\pi]\}$, $J(u) = \int_0^\pi (u'^2 - 2u\sin x)\,dx$;

в) $D = \{u(x) \in C^1(0,\pi),\ u(0) = 0 = u'(\pi)\}$, $J(u) = \int_0^\pi (u'^2 - 2u\cos x)\,dx$;

г) $D = \{u(x) \in C^1(0,1),\ u(0) = 0 = u'(1)\}$, $J(u) = \int_0^1 (u'^2 + 2xu)\,dx$.

19.6. Пусть функция $u_0(x) \in D$ реализует минимум функционала

$$J(u) = \int_\Omega (|\nabla u|^2 + 2f(x)u)\,dx, \quad \text{где} \quad x = (x_1, x_2, x_3),$$

Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}_3$, $D = \{u(x) \in C^1(\overline{\Omega}),\ u|_{\partial\Omega} = \varphi\}$, $f(x) \in C(\overline{\Omega})$. Поставить краевую задачу, решением которой является $u_0(x)$.

19.7. Пусть функция $u_0(x) \in D$ реализует минимум функционала $J(u)$, $x = (x_1, x_2)$. Найти $u_0(x)$, если:

а) $D = \{u(x) \in C^1(|x| \leqslant 1),\ u|_{|x|=1} = x_1$, $J(u) = \int_{|x|<1} u'^2\,dx$;

б) $D = \{u(x) \in C^1(|x| \leqslant 1),\ u|_{|x|=1} = x_1^2\}$, $J(u) = \int_{|x|<1} (u'^2 + 2u)\,dx$;

в) $D = \{u(x) \in C^1(|x| \leqslant 2),\ u|_{|x|=2} = x_1 + x_2$, $J(u) = \int_{|x|<2} u'^2\,dx$;

г) $D = \{u(x) \in C^1(|x| \leqslant 2),\ u|_{|x|=2} = 0\}$, $J(u) = \int_{|x|<2} (u'^2 + 2\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\,u)\,dx$.

19.8. Найти $\inf\limits_{u \in D} J(u)$, если

а) $J(u) = \int_0^\pi u'^2 dx$, $D = \{u(x) \in \mathring{C}^1(0,\pi]$, $\|u\|^2 = \int_0^\pi u^2(x)\,dx = 1$, и $\int_0^\pi u(x)\sin(kx)\,dx = 0$, $k = 1,\ 2,\ \ldots,\}$;

б) $J(u) = \int_0^\pi (u'^2 + u^2) dx$, $D = \{u(x) \in C^1(0,\pi)$, $\|u\|^2 = 1$, $u'(0) = u'(\pi) = 1$ и $\int_0^\pi u(x)\cos kx\,dx = 0$, $k = 1,\ 2,\ \ldots,\}$.

20. Задачи на обобщённые функции.

20.1. Пусть $x \in \mathbb{R}^n$. Дать определение пространства основных функций D, пространства обобщённых функций D', заданных на D, а также пространства основных и обобщённых функций медленного роста $L(\mathbb{R}^n)$ и $L'(\mathbb{R}^n)$.

20.2. Дать определения сходимости последовательности обобщённых функций $\{f_k(x)\}$, $f_k(x) \in D'$; регулярной и сингулярной обобщённой функции.

20.3. Дать определение производной обобщённой функции $f(x) \in D'$, а также определение производной любого порядка m, $m \geqslant 1$: $f^{(m)}(x)$.

20.4–20.13: Вычислить производные порядка m обобщённых функций $f(x) \in D'(\mathbb{R}^1)$: ($\theta(x)$ — функция Хевисайда).

20.4. $f(x) = \theta(x)\sin x$, $m = 1$; **20.5.** $f(x) = \theta(x)\cos x$, $m = 1$;

20.6. $f(x) = x^2\theta(x)$, $m = 1, 2$;

20.7. $f(x) = (1 - \cos x)\theta(x)$, $m = 1, 2, 3$;

20.8. $f(x) = \operatorname{sign} x$, $m = 1, 2$;

20.9. $f(x) = x \operatorname{sign} x$, $m = 1, 2, 3, \ldots$;

20.10. $f(x) = x\theta(x - 1)$, $m = 1$;

20.11. $f(x) = \theta(1 - |x|)$, $m = 1, 2, \ldots$;

20.12. $f(x) = x\theta(x)$, $m = 1, 2, \ldots$;

20.13. $f(x) = (1 - \cos x)^2\delta(x)$, $m = 1, 2, \ldots$

20.14. Дать определение преобразования Фурье обобщённой функции медленного роста и обратного преобразования Фурье.

20.15–20.20: Найти преобразование Фурье следующих обобщённых функций $f(x) \in D'(\mathbb{R}^1)$:

20.15. $f(x) = \delta(x)$; **20.16.** $f(x) = \delta(x - x_0)$;

20.17. $f(x) = x^3$; **20.18.** $f(x) = \theta(1 - |x|)$;

20.19. $f(x) = 1$; **20.20.** $f(x) = \cos x$.

20.21. Дать определение обобщённого решения линейного дифференциального уравнения $Lu = f(x)$, а также фундаментального решения дифференциального оператора L: $Lu = \sum\limits_{k=0}^{m} a_k u^{(k)}(x)$.

20.22. Сформулировать постановку обобщённой задачи Коши для волнового уравнения с источником $f(x,t) \in D'(\mathbb{R}^2)$, дать определения её фундаментального решения $\varepsilon(x,t)$ выписать формулу для $\varepsilon(x,t)$ и формулу для решения обобщённой задачи Коши.

20.23. Сформулировать постановку обобщённой задачи Коши для уравнения теплопроводности с источником $f(x,t) \in \in D'(\mathbb{R}^{n+1})$, выписать её фундаментальное решение $\varepsilon(x,t)$ и формулу для решения обобщённой задачи Коши.