Министерство образования и науки Российской Федерации
Московский физико-технический институт
(государственный университет)

Ипатова В.М.

Аттракторы неавтономных эволюционных систем

Научно-образовательный курс

Долгопрудный
2013

Предисловие

Научно-образовательный курс содержит основные определения теории аттракторов: полупроцессы, семейства полупроцессов, их равномерно притягивающие множества и равномерные аттракторы, а также формулировку теоремы о существовании равномерного аттрактора. Технические приемы доказательств существования аттрактора проиллюстрированы на примерах неавтономного обыкновенного дифференциального уравнения и системы Лоренца с зависящими от времени коэффициентами. Учебный материал разработан на основе оригинальных научных публикаций и адаптирован для восприятия студентами 2-4 курсов. Курс будет также полезен аспирантам, преподавателям и научным сотрудникам для первичного знакомства с новейшим направлением теории аттракторов. Курс разработан в рамках Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009 – 2013 годы.

1. Полупроцессы и их аттракторы

Вначале определим понятия полупроцессов и их аттракторов. При этом мы будем придерживаться изложения, принятого в [1, 2].

Пусть E – полное метрическое пространство с метрикой $\mathrm{dist}_E(\cdot,\cdot)$; T – нетривиальная подгруппа аддитивной группы $\mathbf{R}$ вещественных чисел, $T_+ = T \cap [0;+\infty]$ – полугруппа неотрицательных элементов из T. Например, $T_+ = \mathbf{R}_+ = [0,+\infty)$ для систем с непрерывным временем, $T_+ = \mathbf{Z}_+ = \{0,1,2,\ldots\}$ и $T_+ = \mathbf{Z}_+\tau = \{0,\tau,2\tau,\ldots\}$, где $\tau > 0$, для систем с дискретным временем. Пусть при всех $h \in T_+$, $t \in T_+$, $t \ge h$ на E определены непрерывные операторы $U(t,h)\colon E \to E$ такие, что

$$U(t,s)U(s,h) = U(t,h) \quad \forall t,s,h \in T_+ : t \ge s \ge h. \tag{1.1}$$

Тройку $\{U,T_+,E\}$ будем называть *полупроцессом*. Рассмотрим семейство операторов $U_f(t,h)$, функционально зависящих от символа $f = f(t)$, где под $f(t)$ подразумеваются зависящие от времени коэффициенты и члены в правой части уравнения. Пусть F – некоторое множество символов и каждому $f \in F$ поставлен в соответствие полупроцесс $\left\{U_f, T_+, E\right\}$. Множество всех полупроцессов $\left\{U_f, T_+, E\right\}$ таких, что $f \in F$, будем называть *семейством полупроцессов* (СПП) и обозначать как $\left\{U_f, T_+, E, F\right\}$.

Множество $P \subset E$ называется *равномерно притягивающим множеством* семейства полупроцессов $\left\{U_f, T_+, E, F\right\}$, если для любого ограниченного в E множества B имеет место равенство

$$\lim_{\substack{t\to\infty \\ t\in T_+}} \sup_{f\in F} \operatorname{dist}_E\left(U_f\left(t,h\right)B, P\right) = 0 \qquad \forall h \in T_+, \tag{1.2}$$

где $\operatorname{dist}_E\left(X, Y\right) = \sup_{x\in X} \inf_{y\in Y} \operatorname{dist}_E\left(x, y\right)$.

Определение (1.2) можно сформулировать и следующим образом: множество $P \subset E$ называется *равномерно притягивающим множеством* семейства полупроцессов $\left\{U_f, T_+, E, F\right\}$, если для любого $\varepsilon > 0$, любого $h \in T_+$ и любого ограниченного в E множества B существует время $t_0 = t_0(\varepsilon, h, B) > 0$ такое, что

$$U_f\left(t+h, h\right)B \subseteq O_\varepsilon(P) \qquad \forall t \in T_+, t > t_0, \quad \forall f \in F,$$

где $O_\varepsilon(P) = \bigcup_{x\in P} O_\varepsilon(x)$ есть ε-окрестность множества P в E.

Равномерным аттрактором семейства полупроцессов называется его наименьшее замкнутое равномерно притягивающее множество. Равномерный аттрактор СПП будем для краткости называть просто *аттрактором*.

Теорема 1.1 [1]. *Если семейство полупроцессов обладает компактным равномерно притягивающим множеством, то указанное СПП имеет компактный аттрактор.*

2. Аттрактор неавтономного ОДУ

Пусть функции $a^0(t)$, $b^0(t)$, $f^0(t)$ непрерывны на $T_+ = \mathbf{R}_+ = [0, +\infty)$, причем существуют постоянные α, β, σ такие, что

$$0<\alpha \le a^0(t), \quad |b^0(t)| \le \beta, \quad |f^0(t)| \le \sigma \qquad \forall t \ge 0. \tag{2.1}$$

Введем вектор $q^0(t) = (a^0(t), b^0(t), f^0(t))$, обозначим через $T(h),\ h \ge 0$, операторы сдвига по времени, то есть $T(h)f^0(t) = f^0(t+h)$, и через

$$F = \bigcup_{h\ge 0} T(h)q^0(t) = \bigcup_{h\ge 0} q^0(t+h) \tag{2.2}$$

множество всех неотрицательных сдвигов по времени вектора $q^0(t)$. Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + a(t)x + b(t)\sin x^2 = f(t), \\ x|_{t=h} = x_0, \end{cases} \tag{2.3}$$

где $h \ge 0$, $x \in E = \mathbf{R}$, $q(t) = (a(t), b(t), f(t)) \in F$.

Из (2.1) – (2.2) следует, что для всех $q(t) \in F$ выполняются неравенства

$$0<\alpha \le a(t), \quad |b(t)| \le \beta, \quad |f(t)| \le \sigma \qquad \forall t \ge 0. \tag{2.4}$$

Вектор $q(t) = (a(t), b(t), f(t)) \in F$ является *символом*, то есть множеством всех зависящих от времени коэффициентов и членов в правой части уравнения (2.3). По теореме о продолжении решений нормальных систем, решение задачи (2.3) определено при $\forall t \ge h$. Будем его записывать как $x(t) = U_q(t,h)x_0$, $t \ge h$. Тем самым заданы операторы $U_q(t,h)$, обладающие свойством (1.1) при $\forall q \in F$. Непрерывность $U_q(t,h)$ следует из теоремы о непрерывной зависимости от начального условия решений задачи Коши. Таким образом, для каждого $q \in F$ определён *полупроцесс* $\{U_q, \mathbf{R}_+, E\}$, где $\mathbf{R}_+ = T_+ = [0,+\infty)$ - область изменения переменной t, $E = \mathbf{R}$ - множество, которому принадлежат начальные состояния x_0. Объединение этих полупроцессов по всем $q \in F$ образует *семейство полупроцессов* $\{U_q, \mathbf{R}_+, E, F\}$, порождаемое задачей (2.3).

В дальнейшем нам потребуется

Лемма 2.1. *Для всех чисел* $A, B \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0$ *верно неравенство*

$$AB \le \varepsilon A^2 + \frac{B^2}{4\varepsilon}. \qquad (2.5)$$

Доказательство даётся равенством $\varepsilon A^2 + \frac{B^2}{4\varepsilon} - AB = \left(\sqrt{\varepsilon}A + \frac{B}{2\sqrt{\varepsilon}}\right)^2$.

Теорема 2.1 [3]. *Для решения задачи (2.3) при всех* $t \ge h$ *выполняется оценка*

$$x^2(t) \le e^{-\alpha(t-h)}x_0^2 + \frac{G^2}{\alpha^2}(1 - e^{-\alpha(t-h)}), \quad . \qquad (2.6)$$

где $G = \sigma + \beta$.

Доказательство. Умножая (2.3) на x, получаем равенство

$$\frac{1}{2}\frac{dx^2}{dt} + a(t)x^2 + b(t)x\sin x^2 = xf(t). \qquad (2.7)$$

Из (2.4) и (2.7) следует, что

$$\frac{1}{2}\frac{dx^2}{dt} + \alpha x^2 \le \frac{1}{2}\frac{dx^2}{dt} + a(t)x^2 = xf(t) - b(t)x\sin x^2 \le |xf(t)| + |b(t)x\sin x^2| \le G|x|. \qquad (2.8)$$

Используя (2.5), оценим член в правой части (2.8)

$$G|x| \le \frac{\alpha}{2}x^2 + \frac{G^2}{2\alpha}. \qquad (2.9)$$

Подставив (2.9) в (2.8), получаем неравенство

$$\frac{dx^2}{dt} + \alpha x^2 \le \frac{G^2}{\alpha}. \qquad (2.10)$$

Умножив (2.10) на $e^{\alpha t}$, приведём его к виду

$$\frac{d}{dt}\left(e^{\alpha t}x^2\right) \le \frac{G^2}{\alpha}e^{\alpha t}. \qquad (2.11)$$

Проинтегрировав (2.11) по времени от h до $t \ge h$, имеем

$$e^{\alpha t}x^2(t) - e^{\alpha h}x_0^2 \le \frac{G^2}{\alpha^2}(e^{\alpha t} - e^{\alpha h}). \qquad (2.12)$$

Поделив (2.12) на $e^{\alpha t}$, получаем (2.6)

Теорема 2.2 [3]. *Семейство полупроцессов* $\{U_q, \mathbf{R}_+, E, F\}$*, порождаемое задачей (2.3), имеет аттрактор* A*, причём*

$$|x| \le G/\alpha \qquad \forall x \in A. \tag{2.13}$$

Доказательство. Покажем, что отрезок $P = [-G/\alpha, G/\alpha]$ является равномерно притягивающим множеством СПП $\{U_q, \mathbf{R}_+, E, F\}$. Возьмём произвольные $\varepsilon > 0$ и ограниченное множество $B \subset \mathbf{R}$. Существует постоянная $M > 0$ такая, что $|x| \le M$ для всех $x \in B$. Используя (2.6), находим, что для решений (2.3) с начальным условием $x_0 \in B$ верна оценка

$$x^2(t) \le e^{-\alpha(t-h)} M^2 + \frac{G^2}{\alpha^2}(1 - e^{-\alpha(t-h)}). \tag{2.14}$$

Из (2.14) вытекает, что:

1) если $M < G/\alpha + \varepsilon$, то $x(t) \in O_\varepsilon(P) = (-\varepsilon - G/\alpha, G/\alpha + \varepsilon)$ всех $t \ge h$, $x_0 \in B$, $q \in F$;

2) если $M \ge G/\alpha + \varepsilon$, то $x(t) \in O_\varepsilon(P)$ при всех $t > h + t_0$, $x_0 \in B$, $q \in F$, где $t_0 = \dfrac{1}{\alpha} \ln \dfrac{\varepsilon\alpha(2G + \varepsilon\alpha)}{\alpha^2 M^2 - G^2}$.

По теореме 1.1 семейство полупроцессов $\{U_q, \mathbf{R}_+, E, F\}$ имеет компактный аттрактор A. Поскольку $A \subseteq P$, то верно (2.13).

3. Равномерный аттрактор, порождаемый неавтономной системы Лоренца

Пусть заданы непрерывные функции $\sigma^0(t)$, $r^0(t)$, $b^0(t)$, причём $\sigma^0(t)$ и $r^0(t)$ непрерывно дифференцируемы и существуют положительные постоянные c_k, $k = \overline{1,8}$ такие, что при всех $t \ge 0$ верны неравенства

$$c_1 \le \sigma^0(t) \le c_2, \ \left|\frac{d\sigma^0(t)}{dt}\right| \le c_3, \ c_4 \le r^0(t) \le c_5, \ \left|\frac{dr^0(t)}{dt}\right| \le c_6, \ c_7 \le b^0(t) \le c_8. \tag{3.1}$$

Обозначим вектор $q^0(t)=\left(\sigma^0(t), r^0(t), b^0(t)\right)$ и введём множество всех его неотрицательных сдвигов по времени $Q=\bigcup\limits_{s\ge 0} q^0(t+s)$.

Рассмотрим задачу Коши для системы Лоренца с зависящими от времени коэффициентами

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=\sigma(t)\,(y-x), \quad \dfrac{dy}{dt}=r(t)x-y-xz, \quad \dfrac{dz}{dt}=xy-b(t)z, \quad t>h, \\ x(h)=x_0, \quad y(h)=y_0, \quad z(h)=z_0, \end{cases} \tag{3.2}$$

где $h\ge 0$ и $q(t)=\left(\sigma(t), r(t), b(t)\right)\in Q$.

Вектор $q(t)=\left(\sigma(t), r(t), b(t)\right)\in Q$ является *символом*, то есть множеством всех зависящих от времени коэффициентов системы уравнений (3.2). По теореме о продолжении решений нормальных систем, решение задачи (3.2) определено при $\forall t\ge 0$. Будем его записывать как $(x(t), y(t), z(t))=K_q(t,h)(x_0, y_0, z_0)$, $t\ge h$. Тем самым заданы операторы $K_q(t,h)$, обладающие свойством (1.1) при $\forall q\in Q$. Непрерывность $K_q(t,h)$ следует из теоремы о непрерывной зависимости от начального условия решений задачи Коши. Таким образом, для каждого $q\in Q$ определён *полупроцесс* $\{K_q, \mathbf{R}_+, E\}$, где $\mathbf{R}_+=T_+=[0,+\infty)$ - область изменения переменной t, $E=\mathbf{R}^3$ - множество, которому принадлежат начальные состояния (x_0, y_0, z_0). Объединение этих полупроцессов по всем $q\in Q$ образует *семейство полупроцессов* $\{K_q, \mathbf{R}_+, E, Q\}$, порождаемое задачей (3.2).

Далее мы будем использовать неравенство

$$AB\le \varepsilon A^2+\frac{B^2}{4\varepsilon} \quad \forall A,B\in\mathbf{R}, \forall\varepsilon>0. \tag{3.3}$$

Обозначим $u=z-\sigma-r$, в новых переменных (3.2) принимает вид

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=\sigma(t)\,(y-x), \quad \dfrac{dy}{dt}=-\sigma(t)x-y-xu, \\ \dfrac{du}{dt}=xy-b(t)u-b(t)\left(\sigma(t)+r(t)\right)-\dfrac{d\sigma(t)}{dt}-\dfrac{dr(t)}{dt}, \\ x(h)=x_0, \quad y(h)=y_0, \quad u(h)=u_0=z_0-\sigma(h)-r(h). \end{cases} \tag{3.4}$$

Аналогичным образом, задача (3.4) порождает *семейство полупроцессов* $\{W_q, \mathbf{R}_+, I, Q\}$, где $(x(t), y(t), u(t)) = W_q(t,h)(x_0, y_0, u_0)$, $I = \mathbf{R}^3$ - множество, которому принадлежат начальные состояния (x_0, y_0, u_0). Умножая уравнения (3.4) на x, y и u соответственно, получаем

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\frac{dx^2}{dt} = \sigma(t)\,(yx - x^2), \quad \frac{1}{2}\frac{dy^2}{dt} = -\sigma(t)xy - y^2 - xuy, \\ \frac{1}{2}\frac{du^2}{dt} = uxy - b(t)u^2 - b(t)u\left(\sigma(t) + r(t)\right) - u\frac{d\sigma(t)}{dt} - u\frac{dr(t)}{dt}, \\ x(h) = x_0, \quad y(h) = y_0, \quad u(h) = u_0 = z_0 - \sigma(h) - r(h). \end{cases} \tag{3.5}$$

Суммируя уравнения системы, получим

$$\frac{d}{dt}(x^2 + y^2 + u^2) = 2\left(-\sigma x^2 - y^2 - bu^2 - bu(\sigma + r) - u\left(\frac{d\sigma}{dt} + \frac{dr}{dt}\right)\right). \tag{3.6}$$

Здесь и далее в тексте для сокращения записи не будем явно указывать, что коэффициенты σ, r, b зависят от времени, хотя об этом, конечно же, нужно помнить.

Далее сделаем оценку сверху членов в правой части уравнения (3.6)

$$2\left(-\sigma x^2 - y^2 - bu^2\right) \le 2\left(-c_1 x^2 - y^2 - c_7 u^2\right) \le -a(x^2 + y^2 + u^2), \tag{3.7}$$

где $a = \min\{2c_1, 2, 2c_7\}$.

Опираясь на неравенство (3.3), находим

$$\begin{aligned} -2ub(\sigma + r) &\le 2|u|c_8(c_2 + c_5) \le 4\varepsilon u^2 + \frac{c_8^{\,2}(c_2 + c_5)^2}{4\varepsilon}, \\ -2u\left(\frac{d\sigma}{dt} + \frac{dr}{dt}\right) &\le 2|u|(c_3 + c_6) \le 4\varepsilon u^2 + \frac{(c_3 + c_6)^2}{4\varepsilon}. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Введем следующие обозначения $U = x^2 + y^2 + u^2$, $C = c_8^{\,2}(c_2 + c_5)^2 + (c_3 + c_6)^2$ и, используя их, а также (3.6), (3.7), (3.8), получим неравенство

$$\frac{dU}{dt} \le -aU + 8\varepsilon u^2 + \frac{C}{4\varepsilon} \le U(-a + 8\varepsilon) + \frac{C}{4\varepsilon}. \tag{3.9}$$

В силу произвольности выбора $\varepsilon > 0$ возьмем его таким что $-a + 8\varepsilon < 0,$ т.е. $0 < \varepsilon < \frac{a}{8}.$

Обозначим $\gamma \equiv a-8\varepsilon>0$. Тогда из неравенства (3.9) получим

$$\frac{dU}{dt}+\gamma U \le \frac{2C}{a-\gamma}.$$

Умножив полученное соотношение на $e^{\gamma t}$, приведем его к виду

$$\frac{d}{dt}\left(e^{\gamma t}U\right) \le \frac{2C}{a-\gamma}e^{\gamma t}.$$

Проинтегрировав последнее неравенство по времени от h до $t \ge h$, и затем поделив его на $e^{\gamma t}$, приходим к оценке

$$U(t) \le U_0 e^{-\gamma(t-h)}+\frac{2C}{\gamma(a-\gamma)}\left(1-e^{-\gamma(t-h)}\right), \tag{3.10}$$

где $U_0 = {x_0}^2+{y_0}^2+{u_0}^2$.

Теорема 3.1 [4]. *Семейство полупроцессов* $\{K_q, \mathbf{R}_+, E, Q\}$, *порождаемое задачей (3.2), имеет аттрактор* A, *причем*

$$x^2+y^2+z^2 \le \frac{16C}{a^2}-2D+4(c_2+c_5)^2 \qquad \forall\,(x,y,z)\in A,$$

где $D = {c_1}^2+{c_4}^2+2c_1c_4=(c_1+c_4)^2$.

Доказательство. Сначала докажем, что СПП $\{W_q, \mathbf{R}_+, I, Q\}$, порождаемое задачей (3.4) имеет равномерно притягивающее множество. Для этого воспользуемся оценкой (3.10), полученной для решений системы (3.4), и возьмем $\varepsilon = \frac{a}{16}>0$, тогда $\gamma=\frac{a}{2}>0$ и неравенство (3.10) примет вид

$$U(t) \le U_0 e^{-\frac{a}{2}(t-h)}+\frac{8C}{a^2}\left(1-e^{-\frac{a}{2}(t-h)}\right). \tag{3.11}$$

Покажем, что замкнутый шар $P=\left\{x,y,u:\ x^2+y^2+u^2 \le \frac{8C}{a^2}\right\}$ является равномерно притягивающим множеством СПП, порождаемого задачей (3.4). Возьмём произвольные $\varepsilon>0$ и ограниченное множество $B\subset \mathbf{R}^3$. Существует постоянная $M>0$ такая, что $x^2+y^2+u^2=U\le M$ для всех $(x,y,u)\in B$. Используя (3.11), находим, что для решений (3.4) с начальным условием $(x_0,y_0,u_0)\in B$ верна оценка

$$U(t) \le Me^{-\frac{a}{2}(t-h)} + \frac{8C}{a^2}\left(1 - e^{-\frac{a}{2}(t-h)}\right) = \frac{8C}{a^2} + e^{-\frac{a}{2}(t-h)}\left(M - \frac{8C}{a^2}\right). \qquad (3.12)$$

Из вытекает, что :

1) если $M - \frac{8C}{a^2} < \varepsilon^2$, то справедлива оценка $U(t) \le \frac{8C}{a^2} + e^{-\frac{a}{2}(t-h)}\left(M - \frac{8C}{a^2}\right) \le \frac{8C}{a^2} + \varepsilon^2$, из которой следует, что $(x(t), y(t), u(t)) \in \left\{x, y, u:\ x^2 + y^2 + u^2 \le \frac{8C}{a^2} + \varepsilon^2\right\} \subset O_\varepsilon(P)$ при всех $t \ge h$, $(x_0, y_0, u_0) \in B$

2) если $M - \frac{8C}{a^2} \ge \varepsilon^2$, то $(x(t), y(t), u(t)) \in \left\{x, y, u:\ x^2 + y^2 + u^2 \le \frac{8C}{a^2} + \varepsilon^2\right\} \subset O_\varepsilon(P)$ при всех $t > h + t_0$, $(x_0, y_0, u_0) \in B$, где $t_0 = -\frac{2}{a}\ln\frac{\varepsilon a^2}{Ma^2 - 8C} > 0.$

Далее воспользуемся неравенством, которое получается из соотношения (3.3),

$$-AB \ge -\varphi A^2 - \frac{B^2}{4\varphi} \quad \forall A, B \in \mathbf{R}, \forall \varphi > 0.$$

Применим его, а также соотношения (3.1), для оценки снизу следующего выражения

$$u^2 = (z - \sigma - r)^2 = z^2 + \sigma^2 + r^2 - 2z\sigma - 2zr + 2\sigma r \ge z^2 + c_1{}^2 + c_4{}^2 - 2z(\sigma + r) + 2c_1c_4.$$

Перепишем полученное соотношение как

$$u^2 \ge D + z^2 - 2z(\sigma + r) \qquad (3.13)$$

и оценим в нем последнее слагаемое

$$-2z(\sigma + r) \ge -2\varphi z^2 - \frac{(\sigma + r)^2}{2\varphi} \ge -2\varphi z^2 - \frac{(c_2 + c_5)^2}{2\varphi} \quad \forall \varphi > 0.$$

Тогда (3.13) примет вид

$$u^2 \ge D + z^2(1 - 2\varphi) - \frac{(c_2 + c_5)^2}{2\varphi} \quad \forall \varphi > 0.$$

Используя эту оценку, получим неравенство

$$(1 - 2\varphi)\left[x^2 + y^2 + z^2\right] + D - \frac{(c_2 + c_5)^2}{2\varphi} \le x^2 + y^2 + (1 - 2\varphi)z^2 + D - \frac{(c_2 + c_5)^2}{2\varphi} \le$$

$$\le x^2 + y^2 + u^2 \le \frac{8C}{a^2} + \varepsilon^2 \quad \forall \varphi > 0,$$

из которого при $\varphi = \frac{1}{4}$ имеем $x^2 + y^2 + z^2 \le \frac{16C}{a^2} + 2\varepsilon - 2D + 4(c_2 + c_5)^2$.

Получили, что замкнутый шар $H = \left\{ x, y, z : x^2 + y^2 + z^2 \le \frac{16C}{a^2} - 2D + 4(c_2 + c_5)^2 \right\}$ является равномерно притягивающим множеством СПП $\{K_q, \mathbf{R}_+, E, Q\}$, порождаемого задачей (3.2). Но по теореме 1.1 если семейство полупроцессов обладает компактным равномерно притягивающим множеством, то указанное СПП имеет компактный аттрактор. Таким образом, наша теорема доказана.

Литература

1. Chepyshov V.V., Vishik M.I. Attractors of non-autonomous dynamical systems and their dimension // J. Math. Pures Appl. 1994, V. 73, P. 279-333.
2. Ипатова В.М. Об аттракторах аппроксимаций неавтономных эволюционных уравнений // Математический сборник. 1997, Т. 188, № 6. С. 47-56.
3. Ипатова В.М. Равномерный аттрактор неавтономного дифференциального уравнения // Альманах современной науки и образования. 2009, № 12, ч. 1. С. 39-42.
4. Ипатова В.М. Аттракторы конечно-разностных схем для системы Лоренца с зависящими от времени коэффициентами // Труды МФТИ, 2011, Т. 3, № 1, С. 74-80.