Министерство образования и науки Российской Федерации
Московский физико-технический институт
(государственный университет)

Ипатова В.М.

Аттракторы неавтономных уравнений

Научно-популярный материал

Долгопрудный
2013

Предисловие

Научно-популярный материал содержит:

1. Предварительные сведения из теории дифференциальных уравнений. Понятие автономного и неавтономного уравнения. Формулировки теорем существования и единственности решения, удовлетворяющего заданному начальному условию, и о непрерывной зависимости решения от начальных данных. Формулировка теоремы о возможности продолжения решений на бесконечно большой промежуток времени.
2. Сведения из теории аттракторов. Понятия равномерно притягивающего множества и равномерного аттрактора. Формулировка теоремы о существовании аттрактора неавтономного дифференциального уравнения.
3. Подробное доказательство существования аттрактора на примере конкретного уравнения.

Материал рассчитан на школьников старших классов, интересующихся физикой и математикой. Он будет также полезен учителям, в том числе для проведения факультативных занятий с целью знакомства с новейшим направлением современной теории динамических систем.

Научно-популярный материал разработан в рамках Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009 – 2013 годы.

1. Сведения из теории дифференциальных уравнений

Будем использовать следующие обозначения:

$\mathbf{R}$ - множество всех действительных чисел; t - независимая переменная;

$x = x(t)$ - искомая функция; $\dfrac{dx}{dt}$ - производная x по t.

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \tag{1}$$

где $f(\cdot,\cdot)$ - некоторая заданная функция двух переменных.

Функция $x=\varphi(t)$ называется *решением* (1) на интервале (t_1,t_2), если:

1) $\varphi(t)$ и её производная $\dfrac{d\varphi(t)}{dt}$ непрерывны на (t_1,t_2);

2) верно равенство $\dfrac{d\varphi(t)}{dt}=f\big(t,\varphi(t)\big)$ при всех $t\in(t_1,t_2)$.

Уравнение (1) называется *автономным*, если оно не содержит явно независимую переменную, то есть имеет вид $\dfrac{dx}{dt}=f(x)$, в противном случае (1) называется *неавтономным уравнением*.

Рассмотрим следующую задачу, известную как *задача Коши*:
заданы числа t_0 и x_0, требуется найти решение (1), удовлетворяющее *начальному условию*

$$x(t_0)=x_0. \tag{2}$$

Справедлива следующая теорема (см., например, [1]).

Теорема 1. *Если функции* $f(t,x)$ *и* $\dfrac{\partial f(t,x)}{\partial x}$ *непрерывны при всех* $t\in(t_1,t_2)$ *и* $x\in(x_1,x_2)$, *причём* $t_0\in(t_1,t_2)$ *и* $x_0\in(x_1,x_2)$, *то решение задачи Коши (1)-(2) существует и единственно на некотором интервале* $(t_0-\varepsilon,t_0+\varepsilon)$.

Будем теперь считать, что в начальном условии (2) точка t_0 зафиксирована, а число x_0 может изменяться. Решение уравнения (1) с начальным условием

$$x(t_0)=\rho. \tag{3}$$

обозначим как $x=\varphi(t,\rho)$.

Теорема 2 [1]. *Пусть выполнены условия теоремы 1, тогда существуют числа* $\varepsilon_1>0$ *и* $\varepsilon_2>0$ *такие, что решение* $x=\varphi(t,\rho)$ *задачи Коши (1), (3) определено и непрерывно на множестве*

$$Q=\Big\{(t,\rho)\Big|\,|t-t_0|\le\varepsilon_1,\ |\rho-x_0|\le\varepsilon_2\Big\}.$$

Отметим, что по утверждению теоремы 1 решения (1) существуют только в малой окрестности начальной точки. Однако в некоторых случаях решения дифференциального уравнения могут быть продолжены на бесконечно большой промежуток времени. А именно, верна следующая теорема

Теорема 3 [1]. *Если функции* $f(t,x)$ *и* $\dfrac{\partial f(t,x)}{\partial x}$ *непрерывны в области*

$$\Omega=\left\{(t,x)\middle|\, t_1<t<t_2, x\in\mathbf{R}\right\}$$

(допускаются случаи $t_1=-\infty$ *и* $t_2=+\infty$*) и существую непрерывные на* (t_1,t_2) *неотрицательные функции* $f_1(t)$ *и* $f_2(t)$ *такие, что*

$$|f(t,x)|\le f_1(t)|x|+f_2(t) \qquad \forall(t,x)\in\Omega,$$

то каждое решение (1), проходящее в Ω*, можно продолжить на весь интервал* (t_1,t_2).

2. Сведения из теории аттракторов

Пусть при всех $t\ge h\ge 0$ на $\mathbf{R}$ определены непрерывные операторы $U(t,h):\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, зависящие от параметров t и h. Это семейство операторов называется *полупроцессом*, если:

$$\begin{aligned}&1)\, U(t,t)=I \ \text{(тождественныйоператор)} \quad \text{при всех } t\ge 0;\\ &2)\, U(t,s)U(s,h)=U(t,h) \quad \text{при всех } t\ge s\ge h\ge 0.\end{aligned} \tag{4}$$

Рассмотрим семейство операторов $U_f(t,h)$, функционально зависящих от символа $f=f(t)$, где под $f(t)$ подразумеваются зависящие от времени коэффициенты и члены в правой части уравнения. Пусть F – некоторое множество символов и каждому $f\in F$ поставлен в соответствие полупроцесс U_f. Множество всех полупроцессов таких, что $f\in F$, будем называть *семейством полупроцессов* (СПП) и обозначать как $\{U_f, F\}$.

Множество $P\subset\mathbf{R}$ называется *равномерно притягивающим множеством* семейства полупроцессов $\{U_f, F\}$, если для любого $\varepsilon>0$, любого $h\ge 0$ и любого ограниченного множества действительных чисел B существует время $t_0 = t_0(\varepsilon, h, B) > 0$ такое, что $U_f\left(t+h, h\right)x$ содержится в ε-окрестности P при всех $t > t_0$, всех $x \in B$ и всех $f \in F$.

Равномерным аттрактором семейства полупроцессов называется его наименьшее замкнутое равномерно притягивающее множество. Равномерный аттрактор СПП будем для краткости называть просто *аттрактором*.

Теорема 4 [2]. *Если семейство полупроцессов обладает компактным равномерно притягивающим множеством, то указанное СПП имеет компактный аттрактор.*

3. Аттрактор неавтономного дифференциального уравнения

Пусть функции $a^0(t)$, $b^0(t)$, $f^0(t)$ непрерывны на $[0, +\infty)$, причем существуют постоянные α, β, σ такие, что

$$0 < \alpha \le a^0(t), \quad |b^0(t)| \le \beta, \quad |f^0(t)| \le \sigma \qquad \forall t \ge 0. \tag{5}$$

Введем вектор $q^0(t) = (a^0(t), b^0(t), f^0(t))$, обозначим через $T(h),\ h \ge 0$, операторы сдвига по времени, то есть $T(h) f^0(t) = f^0(t+h)$, и через

$$F = \bigcup\nolimits_{h \ge 0} T(h) q^0(t) = \bigcup\nolimits_{h \ge 0} q^0(t+h) \tag{6}$$

множество всех неотрицательных сдвигов по времени вектора $q^0(t)$.

Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + a(t)x + b(t)\sin x^2 = f(t), \\ x|_{t=h} = x_0, \end{cases} \tag{7}$$

где $q(t) = (a(t), b(t), f(t)) \in F$.

Из (5)-(6) следует, что для всех $q(t) \in F$ выполняются неравенства

$$0 < \alpha \le a(t), \quad |b(t)| \le \beta, \quad |f(t)| \le \sigma \qquad \forall t \ge 0. \tag{8}$$

Вектор $q(t) = (a(t), b(t), f(t)) \in F$ является *символом*, то есть множеством всех зависящих от времени коэффициентов и членов в правой части уравнения (7).

По теореме 3 решение задачи (7) определено при всех $t \geq h$. Будем его записывать как $x(t) = U_q(t,h)x_0$, $t \geq h$. Тем самым заданы операторы $U_q(t,h)$, обладающие свойством (4) при $\forall q \in F$. Непрерывность $U_q(t,h)$ следует из теоремы 2. Таким образом, для каждого $q \in F$ определён полупроцесс $U_q(t,h)$. Объединение этих полупроцессов по всем $q \in F$ образует семейство полупроцессов $\{U_q, F\}$, порождаемое задачей (7).

В дальнейшем нам потребуется

Лемма 1. *Для всех чисел* $A, B \in \mathbf{R}, \varepsilon > 0$ *верно неравенство*

$$AB \leq \varepsilon A^2 + \frac{B^2}{4\varepsilon}. \tag{9}$$

Доказательство даётся равенством $\varepsilon A^2 + \frac{B^2}{4\varepsilon} - AB = \left(\sqrt{\varepsilon}A + \frac{B}{2\sqrt{\varepsilon}}\right)^2$.

Теорема 5. *Для решения задачи (7) при всех* $t \geq h$ *выполняется оценка*

$$x^2(t) \leq e^{-\alpha(t-h)}x_0^2 + \frac{G^2}{\alpha^2}(1 - e^{-\alpha(t-h)}), \qquad . \tag{10}$$

где $G = \sigma + \beta$.

Доказательство. Умножая (7) на x, получаем равенство

$$\frac{1}{2}\frac{dx^2}{dt} + a(t)x^2 + b(t)x\sin x^2 = xf(t). \tag{11}$$

Из (8) и (11) следует, что

$$\frac{1}{2}\frac{dx^2}{dt} + \alpha x^2 \leq \frac{1}{2}\frac{dx^2}{dt} + a(t)x^2 = xf(t) - b(t)x\sin x^2 \leq |xf(t)| + |b(t)x\sin x^2| \leq G|x|. \tag{12}$$

Используя (9), оценим член в правой части (12)

$$G|x| \leq \frac{\alpha}{2}x^2 + \frac{G^2}{2\alpha}. \tag{13}$$

Подставив (13) в (12), получаем неравенство

$$\frac{dx^2}{dt}+\alpha x^2 \le \frac{G^2}{\alpha}. \tag{14}$$

Умножив (14) на $e^{\alpha t}$, приведём его к виду

$$\frac{d}{dt}\left(e^{\alpha t}x^2\right) \le \frac{G^2}{\alpha}e^{\alpha t}. \tag{15}$$

Проинтегрировав (15) по времени от h до $t \ge h$, имеем

$$e^{\alpha t}x^2(t) - e^{\alpha h}x_0^2 \le \frac{G^2}{\alpha^2}(e^{\alpha t} - e^{\alpha h}). \tag{16}$$

Поделив (16) на $e^{\alpha t}$, получаем (10)

Теорема 6 [3]. *Семейство полупроцессов* $\{U_q, F\}$*, порождаемое задачей (7), имеет аттрактор* A*, причём*

$$|x| \le G/\alpha \qquad \forall x \in A. \tag{17}$$

Доказательство. Покажем, что отрезок $P = [-G/\alpha, G/\alpha]$ является равномерно притягивающим множеством СПП $\{U_q, F\}$. Возьмём произвольные $\varepsilon > 0$ и ограниченное множество $B \subset \mathbf{R}$. Существует постоянная $M > 0$ такая, что $|x| \le M$ для всех $x \in B$. Используя (10), находим, что для решений (7) с начальным условием $x_0 \in B$ верна оценка

$$x^2(t) \le e^{-\alpha(t-h)}M^2 + \frac{G^2}{\alpha^2}(1 - e^{-\alpha(t-h)}). \tag{18}$$

Из (18) вытекает, что:

1) если $M < G/\alpha + \varepsilon$, то $x(t) \in O_\varepsilon(P) = (-\varepsilon - G/\alpha, G/\alpha + \varepsilon)$ всех $t \ge h$, $x_0 \in B$, $q \in F$;

2) если $M \ge G/\alpha + \varepsilon$, то $x(t) \in O_\varepsilon(P)$ при всех $t > h + t_0$, $x_0 \in B$, $q \in F$, где $t_0 = \dfrac{1}{\alpha}\ln\dfrac{\varepsilon\alpha(2G + \varepsilon\alpha)}{\alpha^2 M^2 - G^2}$.

По теореме 4 семейство полупроцессов $\{U_q, F\}$ имеет компактный аттрактор A. Поскольку $A \subset P$, то верно (17).

Литература

1. Филиппов А.Ф. Введение в теорию дифференциальных уравнений. – М.: УрСС, 2004, 2007; М.: КомКнига, 2007, 2010.
2. Chepyshov V.V., Vishik M.I. Attractors of non-autonomous dynamical systems and their dimension // J. Math. Pures Appl. 1994, V. 73, P. 279-333.
3. Ипатова В.М. Равномерный аттрактор неавтономного дифференциального уравнения // Альманах современной науки и образования. 2009, № 12, ч. 1. С. 39-42.