Министерство образования и науки Российской Федерации

Московский физико-технический институт

(государственный университет)

Ипатова В.М., Шутяев В.П.

Алгоритмы и задачи ассимиляции данных для моделей динамики атмосферы и океана

Научно-образовательный курс

Долгопрудный

2013

Предисловие

Научно-образовательный курс содержит основные понятия и определения, исторический обзор и описание современных методов ассимиляции данных. Учебный материал основан на оригинальных научных публикациях и рассчитан на студентов, аспирантов и научных сотрудников с целью их знакомства с актуальной областью приложения методов статистики и оптимального управления. Курс разработан в рамках Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009 – 2013 годы.

Введение

Коррекция расчетов математической модели данными измерений представляет собой одну из наиболее актуальных и интересных задач в современной математической геофизике. В мировой практике такие задачи получили название задач ассимиляции (усвоения) и им посвящена обширная литература. Тем не менее, данная область исследования по-прежнему актуальна и сравнительно молода. Более того, в последние годы наблюдается заметный всплеск интереса к данным исследованиям. Связано это, в первую очередь, с развитием компьютерных сетей и систем, развитием суперкомпьютеров и значительным прогрессом в области численных методов. Также важно отметить появление больших массивов наблюдаемой геофизической информации, систем спутниковых наблюдений и измерений, скоростных средств связи и т.д. Все это требует развития соответствующего математического аппарата, разработки надежных алгоритмов и их реализации. Задача усвоения данных в геофизической (численной) модели является одной из таких актуальных и непростых задач. В целом методы ассимиляции можно разделить на две большие группы. Одна группа методов основана на вариационных принципах (поиск минимума некоторого функционала, описывающего "близость" модельного решения и данных измерений в некоторой заданной метрике), и получившей название в литературе как "вариационный метод" решения задач усвоения (в англоязычной литературе используется термин "ajoint method"). Этот метод (группа методов) сравнительно хорошо разработан и успешно применяется на практике, его последняя версия 4D-var используется, например, в метеобюро Франции. Другой подход, получивший название "фильтрации Калмана" (Kalman filtering), основан на статистической теории оценивания и фильтрации процессов на фоне "шума" с известными статистическими свойствами.

В последние десятилетия достигнут значительный прогресс в науках о Земле благодаря улучшению систем наблюдений и пониманию закономерностей геосистемы. Ниже мы приведем обзор методов усвоения данных в задачах геофизической гидродинамики, начиная с простейших последовательных схем усвоения и заканчивая современными вариационными методами.

Исторический экскурс

Исследователи всегда хотели не только знать, но и понимать климатические и текущие состояния гидродинамических течений (в атмосфере и в океане), но и уметь предсказывать их состояние. Чтобы делать прогноз на будущее, необходимо оценить текущее состояние, которое, в свою очередь, зависит от некоторого состояния в прошлом. Первые попытки оценить состояние системы на основе анализа данных наблюдений были сделаны в метеорологии еще в середине 19 века.

Технологии измерений основных параметров погоды, таких как температура, давление, скорость ветра, количество выпавших осадков, были развиты уже в конце 18-го века. После этого возник вопрос: можно ли предсказать погоду? Именно в середине 19-го века для решения этого вопроса был развит субъективный анализ погоды в конкретный момент времени (адмирал Фитцрой, основатель Британской Метеорологической службы). Математически этот подход сводится к простейшей интерполяции данных. Первые попытки сделать прогноз на основе субъективного анализа нельзя считать полностью успешными.

Следующие исследования предсказания погоды относятся к началу 20-х годов XX века, когда был поставлен знаменитый эксперимент Ричардсона (Richardson, 1922). Это была первая попытка сделать численный прогноз погоды, используя уравнения движения атмосферы. Для того чтобы получить для прогноза начальные условия, Ричардсон использовал простейшую интерполяцию первых измерений свободной тропосферы над континентальной Европой. Почти через 30 лет этот эксперимент был повторен Чарни (Charney et al, 1950) с использованием первого цифрового компьютера. Его эксперимент был более удачен, хотя инициализация (отыскание начальных условий) требовала довольно много времени.

В дальнейшем Чарни (Charney, 1955) предложил лучшую оценку начального состояния, используя нелинейное уравнение состояния, а Филлипс (Phillips, 1960) исследовал проблему шума при инициализации.

Впоследствии объективный анализ заменил ручную графическую интерполяцию данных наблюдений более строгими математическими методами, начиная с полиномиальной интерполяции, последовательных алгоритмов оценивания и заканчивая современными вариационными методами.

Наибольшее развитие методы усвоения данных получили в динамической метеорологии и физической океанографии, а также при оперативном численном предсказании атмосферных и океанских течений (Panel 1991; Schmidt et al, 2006). В настоящее время теоретические и практические идеи ассимиляции данных можно найти в инженерной литературе (Bucy and Joseph, 1987; Gelb, 1974; Jazwinski, 1970), математической (Lions, 1968; Марчук Г.И., 1995; Gill et al, 1987; Агошков

В.И., 2003) и геофизической литературе (Bennet, 1992; Daley, 1991; Ghil and Malanotte-Rizzoli, 1991; Kalnay, 2003). Пятый международный симпозиум Всемирной Метеорологической Организации по ассимиляции данных наблюдений в метеорологии и океанографии (Мельбурн, октябрь 2009) показал существенный прогресс в практическом применении современных методов усвоения, основанных как на подходе оптимального управления (вариационного усвоения данных), так и на подходе последовательного оценивания (статистические методы), а также на комбинации обоих подходов.

Прежде чем приступить к обзору этих методов, введем основные понятия и обозначения.

Основные понятия и обозначения. Постановка задач

Рассмотрим математическую модель, описывающую эволюцию гидродинамической системы (атмосферной, океанской или совместной) в виде

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = M\left(x,t\right), t > 0 \\ x\big|_{t=0} = x_0, \end{cases} \tag{1}$$

где x – вектор состояния модели, M – соответствующий динамический оператор модели, x_0 – вектор начального состояния. При численном моделировании или прогнозе динамический оператор M в общем случае нелинейный и детерминированный, в то время как истинное поле течений отличается от (1) на случайную или систематическую ошибку. Как правило, в геофизической гидродинамике (1) есть система нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, которую в математической литературе часто называют системой с распределёнными параметрами. Зависимую переменную x называют «полем».

Наблюдения задаются некоторой вектор-функцией $y^0(t)$, которая удовлетворяет уравнению

$$y^0(t) = H\left(x^t, t\right) + \varepsilon, \qquad (2)$$

где H – оператор наблюдений, x^t - истинное поле течений, ε - функция ошибки (шум). Функция $y^0(t)$ считается заданной, в то время как информация о ε, как правило, отсутствует. Оператор H, так же как M, может быть нелинейным, а также зависеть в общем случае от вектора состояния x. Он задаёт отображение вектора состояния в пространство наблюдений.

Строго говоря, уравнения (1), (2) должны рассматриваться в соответствующих функциональных пространствах, и в каждом конкретном случае для разработки численных алгоритмов важно исследовать вопросы разрешимости и свойства решения задачи.

При дискретизации модели (1) по времени с помощью конечных разностей, конечных элементов или (псевдо-) спектральных методов часто приходят к дискретной модели, описывающей переход от момента времени t_i в момент t_{i+1}:

$$x\left(t_{i+1}\right) = M_i\left(x\left(t_i\right)\right), \qquad (3)$$

где $x(t_i)$ - вектор состояния размерности n, i – номер шага по времени, M_i - разностный оператор перехода со слоя на слой.

При рассмотрении дискретной модели (3) наблюдения y^0 в момент времени t_i задаются уравнением

$$y_i^0 = H_i\left(x^t\left(t_i\right)\right) + \varepsilon_i, \qquad (4)$$

где H_i - оператор наблюдений в момент времени $t = t_i$, x^t - истинное поле течений, ε_i - функция ошибки. Векторы y_i^0 имеют размерности p_i. В большинстве практических задач p_i много меньше n.

Для предсказания эволюции течений в задачах геофизической гидродинамики требуется дополнительная информация о модели (например, начальные условия, неизвестные параметры модели). Эту информацию можно получить с помощью данных наблюдений. Так возникает задача об усвоении данных: при заданной функции наблюдений $y^0(t)$ требуется найти неизвестные параметры модели (например, начальное условие), так, чтобы вектор состояния x удовлетворял задаче (1), а вектор Hx был близок в каком-либо смысле к $y^0(t)$. Найденное в результате решение х называется оценкой состояния и обозначается x^a.

В следующих параграфах мы приведём обзор методов решения задач об усвоении данных, начиная с первых шагов объективного анализа.

Объективный анализ: схема Крессмана и метод последовательных поправок

Первая попытка объективного анализа данных была выполнена Пановски (Panosky, 1949). Суть его метода – двумерная (2-D) полиномиальная интерполяция данных наблюдений. В дальнейшем этот подход был развит Гилкристом и Крессманом (Gilchrist and Cressman, 1954), которые ввели область влияния для каждого наблюдения и предложили использовать так называемое поле «бэкграунда» (поле из предыдущего прогноза).

В подходе Бергторссона и Дуза (Bergthorsson and Doos, 1955) поле «бэкграунда» играет более важную роль – их методика усвоения основана на анализе разности данных наблюдений и ошибок «бэкграунда», а не самих значений функции наблюдений. Они попытались оптимизировать веса, приписанные каждому наблюдению. Впоследствии модификация этого подхода была дана Крессманом (Cressman, 1959) и состояла в нескольких итерациях анализа – так называемый метод последовательных поправок, или SCM-метод (Successive Correction Method).

В схеме Крессмана каждому наблюдению приписан вес, который зависит от расстояния между точками наблюдений и точкой сетки, а также от «радиуса влияния». Эта схема задается равенствами:

$$x_j^a = x_j^b + \frac{\sum_{i=1}^{p} \omega_{ij} \left(y_i^0 - x_i^b \right)}{\sum_{i}^{p} \omega_{ij}}, \tag{5}$$

где индекс j есть номер узла сетки, i - номер точки наблюдения, x^a - искомая оценка состояния, x^b – вектор «бэкграунда» (background) (некоторое начальное приближение), ω_{ij} – весовая функция. Функция ω_{ij} зависит от номера узла сетки j и номера точки наблюдения i; она равна единице, если $i = j$, и является убывающей функцией расстояния d_{ij} между i-ой и j-ой точками, кроме того, $\omega_{ij} = 0$ при $d_{ij} > R$, где $R > 0$ – некоторая постоянная – так называемый «радиус влияния». В качестве ω_{ij} можно взять квадратурную зависимость вида:

$$\omega_{ij} = \max\left(0, \frac{R^2 - d_{ij}^2}{R^2 + d_{ij}^2} \right), \tag{6}$$

или экспоненциальную:

$$\omega_{ij} = e^{-d_{ij}^2 / 2R^2}. \tag{7}$$

Обобщением схемы Крессмана является метод последовательных поправок, который может быть сформулирован как итерационный алгоритм:

$$x^{k+1} = x^k + W\left(y^0 - H\left(x^k \right) \right), k = 0, 1, \dots, \tag{8}$$

где k – номер итерации, $x^0 = x^b$ – начальное приближение, W - весовой оператор, H –оператор наблюдений из (2). После выполнения k итераций полагают $x^a = x^k$, что и является приближенной оценкой состояния.

Если применять последовательную схему Крессмана (5), то, как было показано (Gressman, 1959), первые итерации дают приближение к наблюдениям на крупном масштабе, а последние итерации дают приближение к мелкомасштабным изменениям наблюдений. Хотя метод имеет свои недостатки (с помощью него мы приближаемся к данным наблюдений, которые могут содержать ошибки), он нашел свое применение для оперативного использования во многих бюро прогнозов погоды.

Статические методы, последовательные алгоритмы усвоения

Очень важным прорывом в решении задач ассимиляции данных было использование техники статистической интерполяции. Этот подход восходит к Колмогорову (Колмогоров А.Н., 1941), а в науках о Земле он стал известен благодаря монографии Л. Гандина (Гандин Л., 1963). Это позволило поставить анализ данных на надлежащую статистическую основу. Этот подход обычно называют оптимальной интерполяцией (OI – Optimal Interpolation) (Lorenc, 1981; McPherson et al, 1979). Наблюдениям присваивают веса, которые связаны с ошибками наблюдений. В тоже время поле «бэкграунда» не является первым приближением для анализа, как ранее, а вместо этого оно является дополнительным полезным источником информации вместе со своей характеристикой ошибки.

Для иллюстрации этого принципа рассмотрим две независимые оценки x_1, x_2 вектора x. Предположим, что нам известны ошибки σ_1 и σ_2 (стандартные отклонения) каждой из этих оценок. Тогда комбинируя их, мы получаем лучшую оценку по формуле:

$$x^a = \frac{\sigma_2^2 x_1 + \sigma_1^2 x_2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}. \tag{9}$$

Оптимальная оценка для x получается взвешиванием x_1 и x_2 обратно пропорционально квадратам их ошибок (чем менее точна оценка, тем меньше приписанный ей вес). Формулу (9) можно записать в виде:

$$x^a = x_1 + \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}(x_2 - x_1). \tag{10}$$

Этот подход обобщается на случай, когда имеется множество наблюдений и данных «бэкграунда» вместе с их характеристиками ошибок. Пусть оператор наблюдений H из (2) – линейный. Тогда метод оптимальной интерполяции состоит в определении анализа x^a по формуле (Ghil and Malanotte-Rizzoli, 1991; Daley, 1991):

$$x^a = x^b + BH^*\left(HDH^* + R\right)^{-1}\left(y^0 - Hx^b\right), \tag{11}$$

где y^0 - функция наблюдений, x^b - заданный вектор (поле «бэкграунда»), B,R – заданные операторы, H^* - оператор, сопряжённый к H. Обычно B – это ковариационный оператор (матрица) ошибок вектора x^b, а R – ковариационный оператор ошибок наблюдений.

Согласно (11), анализ x^a вычисляется как поле «бэкграунда» плюс поправка, которая есть не что иное как результат действия некоторого весового оператора на вектор $y^0 - Hx^b$. Последний называют инновационным вектором (innovation vector) или невязкой наблюдений. Реализация (11) сводится к формулам:

$$\left(HBH^* + R\right)\xi = y^0 - Hx^b, \tag{12}$$

$$\theta = BH^*\xi, \tag{13}$$

$$x^a = x^b + \theta, \tag{14}$$

где уравнение (12) рассматривается в пространстве наблюдений, а равенства (13) – (14) – в пространстве состояний.

Метод оптимальной интерполяции применялся во многих оперативных центрах, начиная с конца 1970-х годов (Lorenc, 1981; Lyne et al., 1982).

В дальнейшем этот метод получил развитие в работах Лоренца (Lorenc, 1986; Lorenc et al., 1991), который использовал различные аппроксимации для решения уравнений (12) – (14). Лоренц придумал «гибрид» двух методов – оптимальной интерполяции и последовательной коррекции. Это так называемый метод коррекции анализа (Lorenc et al., 1991), который формулируется следующим образом:

$$x^{k+1} = x^k + WQ\left(y^0 - H\left(x^k\right)\right), \tag{15}$$

$$y^{k+1} = y^k - Q\left(y^0 - H\left(x^k\right)\right), \tag{16}$$

где y^0 - вектор наблюдений из (2), $W = BH^*R^{-1}$, $Q = \left(HW + I\right)^{-1}$, I – единичный оператор.

В случае, когда Н – нелинейный оператор, производится линеаризация около заданного состояния x^b (вектор «бэкграунда»). После выполнения k итераций полагают $x^a = x^k$.

Метод оптимальной интерполяции и его модификации до настоящего времени наиболее широко используются для операционного анализа данных при предсказании погоды (Lorenc, 1986; Thiebaux and Pedder 1987), а также при ассимиляции океанографических данных (Carton and Hackert, 1989; Derber and Rosati, 1989).

Обобщением метода оптимальной интерполяции является фильтр Калмана.

Фильтр Калмана

Рассмотрим дискретную модель (3) и уравнение наблюдений (4) в предположении, что операторы M_i, H_i линейны. Предположим, что истинное поле течений x^t удовлетворяет равенству (3) с некоторой ошибкой:

$$x^t(t_{i+1}) = M_i\left(x^t(t_i)\right) + \eta_i, \tag{17}$$

где η_i – случайная ошибка, такая, что её математическое ожидание обращается в нуль: $E\eta_i = 0$. Аналогично для (4) предполагаем, что $E\varepsilon_i = 0$. Введем матрицы ковариаций: $Q_i = E\eta_i\eta_i^T$, $R_i = E\varepsilon_i\varepsilon_i^T$.

Рассмотрим следующий метод последовательных поправок в виде:

$$x_i = M_{i-1}\left(x_{i-1}^a\right), \tag{18}$$

$$x_i^a = x_i + K_i\left(y_i^0 - H_i x_i\right), \tag{19}$$

где $x_i = x_i(t_i)$, x_i^a – искомая оценка, y_i^a – заданные векторы наблюдений из (4), K_i – весовой оператор (матрица).

Введем также ковариационные матрицы ошибок $x_i - x^t(t_i)$ и $x_i^a - x^t(t_i)$:

$$P_i = E\left(x_i - x^t(t_i)\right)\left(x_i - x^t(t_i)\right)^T,$$

$$P_i^a = E\left(x_i^a - x^t(t_i)\right)\left(x_i^a - x^t(t_i)\right)^T.$$

На каждом шаге в методе Калмана (Kalman, 1960) следят за эволюцией ковариационных матриц P_i и P_i^a. Используя (3)-(4), (17)-(19), нетрудно получить уравнения для P_i, P_i^a:

$$P_i = M_{i-1} P_{i-1}^a M_{i-1}^* + Q_{i-1}, \tag{20}$$

$$P_i^a = (I - K_i H_i) P_i (I - K_i H_i)^* + K_i R_i K_i^* \tag{21}$$

в условиях независимости соответствующих ошибок. Весовой оператор K_i в (19) получается как решение задачи минимизации функционала

$$J = tr P_i^a \equiv tr E(x_i^a - x_i^t)(x_i^a - x_i^t)^T. \tag{22}$$

Для этого используется формула (21) для P_i^a и показывается, что минимум J достигается при

$$K_i = P_i H_i^* (H_i P_i H_i^* + R_i)^{-1}. \tag{23}$$

При подстановке (23) в (21) формула для P_i^a упрощается:

$$P_i^a = (I - K_i H_i) P_i. \tag{24}$$

Итак, алгоритм фильтра Калмана состоит в последовательном выполнении следующих шагов:

$$\begin{cases} K_i = P_i H_i^* (H_i P_i H_i^* + R_i)^{-1}, \\ x_i^a = x_i + K_i (y_i^a - H_i x_i), \\ P_i^a = (I - K_i H_i) P_i, \\ x_{i+1} = M_i (x_i^a), \\ P_{i+1} = M_i P_i^a M_i^* + Q_i. \end{cases} \tag{25}$$

Таким образом, с помощью фильтра Калмана на каждом шаге по времени дается оценка состояния x_i^a. Отметим, что если в момент $t = t_i$ нет наблюдений, то полагают $H_i = 0$, $K_i = 0$. Если положить $P_i = B_i$, где $B_i = E(x_i^b - x_i^t)(x_i^b - x_i^t)^T$, то (25) превращается в метод оптимальной интерполяции.

Непрерывный аналог метода (25) часто называют фильтром Калмана-Бьюси (Kalman and Bucy, 1961). Существуют различные обобщения этого метода на нелинейный случай (Jazwinski, 1970). В настоящее время большим успехом пользуется расширенный фильтр Калмана – метод EKF (extended Kalman filter) (Ghil et al, 1982; Budgell, 1986), который использует линеаризацию модели около некоторого известного состояния, а также ансамблевый фильтр Калмана – метод EnKF (ensemble Kalman filter) (Evensen, 2003, 2007; Kalnay et al., 2007; Fertig et al., 2007; Zhang et al ., 2009), основанный на использовании метода Монте-Карло на каждом временном шаге.

Вариационные методы

Значительным прорывом в решении задач усвоения данных было применение вариационных методов и, в частности, методов оптимального управления. Очень плодотворной оказалась идея минимизировать некоторый функционал, связанный с данными наблюдений, на траекториях (решениях) рассматриваемой модели. Тем самым, задача об усвоении данных формулируется как задача оптимального управления. Теоретические основы исследования и решения таких задач заложены в классических работах (Р. Беллман, 1957; Л.С. Понтрягин, 1962; Н.Н. Красовский, 1969; Ж.-Л. Лионс, 1968; Г.И. Марчук, 1975). Впервые вариационный формализм был использован в метеорологии Сасаки (Sasaki, 1970), а в задачах динамической океанографии – Прово и Сальмоном (Provost and Salmon, 1986).

Как известно, при решении задач минимизации возникает необходимость вычислять градиент исходного функционала. Важным шагом в этом направлении было использование теории сопряженных уравнений (Марчук, 1964; Лионс, 1968). Начиная с известных работ (Марчук Г.И., Пененко В.В., 1978; Le Dimet and Talagrand, 1986; Lewis and Derber, 1985), применение сопряженных уравнений для исследования и численного решения задач об усвоения данных (в том числе для вычисления градиента функционала) широко практикуется многими исследователями (Courier and Talagrand, 1987; Lorenc, 1988; Navon, 1986; Агошков В.И., Марчук Г.И., 1993, Марчук Г.И., Залесный В.Б., 1993; Венцель М., Залесный В.Б., 1996; Шутяев В.П., 2001; Агошков В.И., Пармузин Е.И., Шутяев В.П., 2008; и др.).

Первые применения трехмерного вариационного усвоения данных (3D-VAR) для операционного анализа были сделаны в Национальном Центре предсказаний NCEP (Parrish and Derber, 1992), а позднее в Европейском Центре прогноза погоды ECMWF (Courier et al, 1998).

В настоящее время все больший интерес вызывает четырехмерное усвоение данных (4D-VAR), при котором линеаризованные модели и сопряженные к ним используются для ассимиляции данных наблюдений не в конкретный момент времени, а на заданном временном интервале. Впервые система 4D-VAR была применена в Европейском Центре прогноза погоды (Courier et al, 1994).

Проиллюстрируем постановку задачи четырехмерного вариационного усвоения данных на примере задачи о восстановлении начального условия. Рассмотрим задачу (1) на интервале $(0,T)$:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = M(x,t), \quad t \in (0,T) \\ x\big|_{t=0} = x_0 \end{cases} \tag{26}$$

и введем функционал от её решения:

$$J(x_0) = \frac{1}{2}\left(C_1\left(x\big|_{t=0} - x_0^b\right), x\big|_{t=0} - x_0^b\right) + \frac{1}{2}\int_0^T \left(C_2\left(Hx - y^0\right), Hx - y^0\right)dt, \tag{27}$$

где H – (линейный) оператор наблюдений из (2), y^0 – функция наблюдений, x_0^b – заданный вектор, C_1, C_2 – весовые операторы, $(\cdot,\cdot)$ – скалярное произведение. Как правило, C_1, C_2 выбираются в виде: $C_1 = B^{-1}$, $C_2 = R^{-1}$, где B, R – ковариационные матрицы векторов $\xi = x_0^b - x^t\big|_{t=0}$ и ε, соответственно: $B = E(\xi\xi^T)$, $R = E(\varepsilon\varepsilon^T)$. Такие весовые операторы (или их приближения) часто выбираются в практических задачах (Ghil and Malanotte – Rizzoli, 1991; Ide et al, 1997).

Предположим, что начальное условие x_0 из (26) нам известно. Тогда простейшая задача об усвоении данных формулируется следующим образом:

найти x_0, x такие, что они удовлетворяют (26) и на множестве решений (26) функционал (27) достигает своего наименьшего значения. Другими словами,

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = M(x,t), \quad t \in (0,T) \\ x\big|_{t=0} = x_0, \\ J(x_0) = \inf\limits_{v} J(v). \end{cases} \tag{28}$$

Необходимое условие оптимальности (Lions, 1968) приводит эту задачу к системе для трех неизвестных x_0, x, x^*:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = M(x,t), \quad t \in (0,T) \\ x\big|_{t=0} = x_0, \end{cases} \tag{29}$$

$$\begin{cases} -\dfrac{dx^*}{dt} = (M'(x,t))^* x^* - H^* C_2 (Hx - y^0), \\ x^*\big|_{t=T} = 0, \end{cases} \tag{30}$$

$$C_1(x_0 - x_0^b) - x^*\big|_{t=0} = 0, \tag{31}$$

где $(M'(x,t))^*$ – оператор, сопряженный к производной динамического оператора модели M. Система (29)—(31) носит название «системы оптимальности» и играет важную роль для исследования и численного решения задач об усвоении данных. Эта система может быть получена также из принципа максимума Понтрягина, сформулированного для задачи (28) (Marchuk, Zalesny, 1993), или методом множителей Лагранжа (Евтушенко Ю.Г. и др., 1997).

Разрешимость нелинейных задач об усвоении данных и строгое обоснование численных методов их решения – непростая проблема. Достаточно полные результаты, касающиеся разрешимости линейных задач оптимального управления вида (28)-(31), были получены Ж.-Л. Лионсом с использованием разработанного им общего подхода HUM (Hilbert Uniqueness Method). Дальнейшее развитие этого подхода, а также другие методы исследования задач оптимального управления рассматривались в работах К. Бардоса (Bardos et al, 1992), Д. Руссела (Russel, 1973), А.И. Егорова (1978), А.В. Фурсикова (1999), Е. Зуазуа (Zuazua, 1990), В.И. Агошкова (1993) и др. Некоторые результаты о разрешимости слабонелинейных задач об усвоении данных были получены В.И. Агошковым и Г.И. Марчуком (1993), В.М. Ипатовой (1992), В.П. Шутяевым (2001). Дальнейшие обобщения и новые приложения были предложены в последние годы (Агошков В.И., Ипатова В.М., 2007; Ипатова В.М., 2007; Агошков В.И., Пармузин Е.И., Шутяев В.П., 2008).

Численное решение задач вида (28) осуществляется в настоящее время известными алгоритмами оптимизации, разработанными в классических трудах (Красовский Н.Н., 1969; Ж. Лионс, 1968; Моисеев Н.Н., 1971; Черноусько Ф.Л. и Баничук В.П., 1973; Самарский А.А., 1997; Васильев Ф.П., 1988; Р. Федоренко, 1978; Евтушенко Ю.Г., 1982; и др.). Ряд новых итерационных алгоритмов решения задач об усвоении данных предложены в работах В.И. Агошкова и Г.И. Марчука (1993), Г.И. Марчука и В.Б. Залесного (1993), В.П. Шутяева (2001), Агошкова В.И., Пармузина Е.И., Шутяева В.П. (2008) и др.

Для построения численного алгоритма решения задачи об усвоении можно использовать известные методы минимизации для задачи (28), либо решать систему оптимальности (29)-(31). При численном решении задачи часто необходимо вычислять градиент исходного функционала J. Это можно делать с помощью выбранной подходящим образом сопряжённой задачи. В нашем примере градиент функционала вычисляется следующим образом: при заданном v находим последовательно решения задач:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = M(x,t), \quad t \in (0,T) \\ x\big|_{t=0} = v, \end{cases} \tag{32}$$

$$\begin{cases} -\dfrac{dx^*}{dt} = \left(M'(x,t)\right)^* x^* - H^* C_2\left(Hx - y^0\right), \\ x^*\big|_{t=T} = 0 \end{cases} \tag{33}$$

и полагаем

$$J'(x_0)v = C_1(x_0 - x_0^b) - x^*\Big|_{t=0}. \qquad (34)$$

В работах многих авторов большое внимание уделяется численному построению сопряжённой модели (33), которая может быть получена как путём дискретизации непрерывной задачи (33) (Венцель, Залесный, 1996; Sirkes and Tziperman, 1997; Parmuzin E.I., Shutyaev V.P., Diansky N.A., 2007), так и непосредственным транспонированием кода дискретной линеаризованной задачи (Le Dimet, Charpentier E., 1998; Lawless et al., 2003; Агошков В.И., Пармузин Е.И., Шутяев В.П., 2008). В последнем случае зачастую используют методы автоматического дифференцирования (Chao and Chany, 1992; Giering and Kaminski, 1998; Evtushenko Yu. G., 1998). Сравнение этих двух подходов к построению дискретной сопряжённой задачи проводится, например, в работах (Sirkes and Tziperman, 1997; Giles and Pierce, 2000).

Наряду с исследованием разрешимости, разработкой и обоснованием алгоритмов численного решения задач вариационного усвоения данных, важную роль играют свойства самого оптимального решения. Чрезвычайно важным является вопрос о чувствительности оптимальных решений задач вариационного усвоения к погрешностям данных наблюдений и погрешностям моделей. До недавнего времени этот вопрос оставался малоисследованным, но в последние годы получен ряд результатов с использованием операторов управления (Le Dimet, Shutyaev, 2005; Gejadze, Le Dimet, Shutyaev, 2007, 2008). Получены и исследованы уравнения для ошибки оптимального решения через погрешности данных наблюдений в задаче о восстановлении начального условия, исследована чувствительность оптимального решения с использованием сингулярных векторов операторов управления. Оказалось, что важную роль при исследовании ошибок играют фундаментальные функции управления, которые являются сингулярными векторами операторов отклика (Le Dimet, Shutyaev, 2005; Gejadze, Le Dimet, Shutyaev, 2007, 2008; Shutyaev, Parmuzin, 2009).

Алгоритмы четырёхмерного усвоения данных (Bennett, 1991; Kalney E., 2003; Daley, 1991) представляются в настоящее время наиболее эффективными. В последние годы появилось много работ по сравнению ансамблевого метода Калмана и вариационного усвоения данных (Kalnay et al., 2007; Caya et al., 2005; Fertig et al., 2007; Zhang et al ., 2009), кроме того появился так называемый гибридный подход, сочетающий в себе ансамблевый метод и вариационное усвоение данных (Kalnay et al., 2007; Caya et al., 2005; Fertig et al., 2007; Tian et al., 2008; Zhang et al ., 2009).

Итак, нами дан обзор методов решения задач об усвоении данных, разработанных в последние десятилетия. Как следует из изложенного, развитие систем усвоения данных началось с метеорологии и диктовалось необходимостью улучшения прогнозов погоды. Вместе с развитием современных сложных метеорологических систем усвоения данных, эти методы находят всё большее применение в океанографии и других областях.

Наряду с прогрессом в решении задач об усвоении данных происходят существенные качественные изменения систем измерений. В ближайшие годы мировое научное сообщество будет иметь большое количество измерений различных характеристик нашей геосистемы. Поэтому создание технологии решения задач ассимиляции данных, основанных на современных подходах и учитывающих последние достижения в этом направлении, является актуальной проблемой.

Литература

1. Агошков В.И., Ипатова В.М. Разрешимость задачи усвоения данных наблюдений в трехмерной модели динамики океана // Дифференциальные уравнения, 2007, Т. 43, № 8, с. 1064-1075.
2. Агошков В.И., Ипатова В.М. Теоремы существования для трехмерной модели динамики океана и задачи ассимиляции данных // ДАН, 2007, Т. 412, №2, с. 151-153.

3. Агошков В.И., Лебедев С.А., Пармузин Е.И. Численное решение проблемы вариационного усвоения оперативных данных наблюдений о температуре поверхности океана // Известия РАН. Физика атмосферы и океана, 2009, т. 45, №1, с. 76-107.
4. Агошков В.И., Пармузин Е.И., Шутяев В.П. Численный алгоритм вариационной ассимиляции данных наблюдений о температуре поверхности океана // ЖВМ и МФ, 2008, т.48, №8, с.1371-1391.
5. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. – М.: Наука, 1988.
6. Венцель М., Залесный В.Б. Усвоение данных в одномерной модели конвекции-диффузии тепла в океане // Изв. АН. Физика атмосферы и океана, 1996, т.32, №5, с.613-629.
7. Евтушенко Ю.Г. Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации. – М.: Наука, 1982.
8. Евтушенко Ю.Г. Засухина Е.С., Зубов В.И. О численном подходе к оптимизации решения задачи Бюргера с помощью граничных условий // ЖВМиМФ, 1997, т.2, №12, с.1449-1458.
9. Егоров А.И. Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами. – М.: Наука, 1978.
10. Ипатова В.М. Задача усвоения данных для модели общей циркуляции океана в квазигеострофическом приближении // Деп. в ВИНИТИ №2333-В92. М., 1992.
11. Ипатова В.М. Задача ассимиляции данных для основных уравнений динамики океана с квадратичной плотностью // Современные проблемы фундаментальной и прикладной математики. Сборник научных трудов. М.: МФТИ, 2007, с. 80-95.
12. Каменкович В.М., Кошляков М.Н., Монин А.С. Синоптические вихри в океане. Л.: Гидрометеоиздат, 1982.
13. Красовский Н.Н. Теория управления движением. М.: Наука, 1969.

14. Марчук Г.И. О постановке некоторых обратных задач. // ДАН СССР, 1964, т.156, №3, с.503-506.
15. Марчук Г.И. Численное решение задач динамики атмосферы и океана. – Л.: Гидрометеоиздат, 1974.
16. Моисеев Н.И. Численные методы в теории оптимальных систем. – М.: Наука, 1971.
17. Самарский А.А., Вибищевич П.Н. Разностные методы решения обратных задач математической физики // Фундаментальные основы математического моделирования. – М.: Наука, 1997.
18. Саркисян А.С., Демышев С.Г., Коротаев Г.К., Моисеенко В.А. Пример четырёхмерного анализа данных наблюдений программы «Разрезы» для Ньюфаундлендской ЭАЗО. // Итоги науки и техники. Атмосфера, океан, космос – программа «Разрезы», т.6. М.: ВИНИТИ, 1986, с.88-89.
19. Черноусько Ф.Л., Баничук В.П. Вариационные задачи механики и управление. – М.: Наука, 1973.
20. Федоренко Р.П. Приближённое решение задач оптимального управления. – М.: Наука, 1978.
21. Фурсиков А.В. Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения. – Новосибирск: Научная книга, 1999.
22. Шутяев В.П. Операторы управления и итерационные алгоритмы в задачах вариационного усвоения данных. – М.: Наука, 2001.
23. Agoshkov V.I., Gusev A.V., Dianski N.A., Oleinikov R.V. An algorithm for the solution of the ocean hydrothermodynamics problem with variational assimilation of the sea level function data // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling, 2007, v.22, no.2, 133-161.
24. Agoshkov V.I., Marchuk G.I. On solvability and numerical solution of data assimilation problems // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling, 1993, 8, 1-16.

25. Agoshkov V.I., Minyuk F.P., Rusakov A.S., Zalesny V.B. Study and solution of identification problems for nonstationary 2D- and 3D-convection-diffusion equation // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling, 2005, v.20 (1), 19-43.
26. Agoshkov V.I., Parmuzin E.I., Shutyaev V.P. A numerical algorithm of variational data assimilation for reconstruction of salinity fluxes on the ocean surface // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling, 2008, V. 23, No. 2, 135-161.
27. Bardos C., Lebeau G., Rauch J. Sharp sufficient conditions for the observation, control and stabilization of waves from the boundary // SIAM J. Contr. and Optim., 1992, v.30, p.1024-1065.
28. Bennett A.F. Inverse Methods in Physical Oceanography. Cambridge University Press, Cambridge/New York, 1992, 346 p.
29. Bennett A.F. Inverse modeling of the ocean and atmosphere. Cambridge: Cambridge University Press, 2002.
30. Bergthorsson P., Doos B. Numerical weather map analysis. Tellus, 1955, 329-340.
31. Blayo E., Blum J., Verron J. Assimilation variationnelle de donnees en oceanographie et reduction de la dimension de l'espace de controle. Equations aux Derivees Partielles et Applications (Articles dediees a Jacques-Louis Lions). – Paris: Elsevier, 1998, pp.205-219.
32. Bucy R.S., Joseph P.D. Filtering for Stochastic Processes with Applications to Guidance (2nd ed.). Chelsea, New York, 1987, 217 pp.
33. Budgell N.P. Stochastic filtering of linear shallow water wave processes // SIAM, J. Sci. Stat. Comput., 1986a, 34-42.
34. Carton J.A., Hackert E.C. Applications of multi-variate statistical objective analysis to the circulation in the tropical Atlantic // Ocean. Dyn. Atm. Oceans, 1989, 13, 491-515.
35. Castruccio F., Verron J., Gourdeau L., Brancart J.-M., and Brasseur P. Joint altimetric and in-situ data assimilation using GRACE mean dynamic topography: 1993-1998 hind cast experiment in the Tropical Pacific Ocean // Ocean Dynamics, 2008, v.58, 43-63.

36. Caya A., Sun J., Snyder C. A Comparison between the 4DVAR and the ensemble Kalman filter techniques for radar data assimilation // Monthly Weather Review, 2005, v.133(11), 3081-3094.
37. Chao W.C., Chang L.-P. Development of a four-dimensional variational analysis system using the adjoint method at GLA. Part I: Dynamics. Mon. Weather Rev., 1992, v.120, pp.1661-1672.
38. Charney J.G. The use of the primitive equations of motion in numerical prediction. Tellus, 1955, v.7, 22-26.
39. Charney J., Fjortoft R., von Neumann J. Numerical integration of the barotropic vorticity equation. Tellus, 1950, 2, 237-254.
40. Charpentier I., Ghemires M. Generation automatique de codes adjoints: Strategies d'utilisation pour le logiciel Odyssee, Application au code meteorologique Meso-NH, Rapport de Recherche INRIA RR-3251, 1997.
41. Courtier P., Andersson E., Heckley W., Pailleux J., Vasiljevic D., Hamrud M., Hollingsworth A., Rabier F., Fisher M. The ECMWF implementation of three-dimensional variational assimilation (3D-Var). I: Formulation. Quart. J. R. Meteorol. Soc., 1998, 124, 1783-1807.
42. Courtier P., Talagrand O. Variational assimilation of meteorological observations with the adjoint vorticity equation. II. Numerical results. Q. J. R. Meteorol. Soc., 1987, 111, 1329-1347.
43. Courtier P., Thepaut J.N., Hollingsworth A. A strategy for operational implementation of 4D-Var, using an incremental approach // Quart. J. R. Meteorol. Soc., 1994, 120, 1389-1408.
44. Cressman G. An operational objective analysis system // Mon. Wea. Rev., 1959, 87, 367-374.
45. Daley R. Atmospheric Data Analysis. Cambridge University Press, Cambridge, 1991, 457pp.
46. Derber J.C., Rosati A. A global ocean data assimilation system // J. Phys. Oceanogr., 1989, 19, 1333-1347.

47. Evensen, G. The ensemble Kalman filter: Theoretical formulation and practical implementation // Ocean Dynamics, 2003, v.53, 343–367.
48. Evensen G. Data assimilation: The ensemble Kalman filter. Berlin: Springer, 2007.
49. Evtushenko Yu.G. Computation of exact gradients in distributed dynamical systems // J. Optim. Methods Softw., 1998, v.9. No.1-3, p.45-75.
50. Fertig E.J., Harlim J., and Hunt B.R. A Comparative Study of 4D-VAR and a 4D Ensemble Kalman Filter: Perfect Model Simulations with Lorenz-96. Tellus, 2007, v.59A, 96-100.
51. Fisher M., Leutbecher M., and Kelly G. A. On the equivalence between Kalman smoothing and weak-constrained four-dimensional variational data assimilation // Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society, 2005, v.131(572), 3235–3246.
52. Gandin L. Objective analysis of meteorological fields. Gidromet, Leningrad. (English translation Israel Program for Scientific Translation, Jerosalem, 1965).
53. Gejadze I., Le Dimet F.-X., Shutyaev V.P. On error covariances in variational data assimilation // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling, 2007, v. 22 (2), 163-175.
54. Gejadze I., Le Dimet F.-X., Shutyaev V. On analysis error covariances in variational data assimilation // SIAM Journal on Scientific Computing, 2008, v.30, no.4, pp. 1847-1874.
55. Ghil M., Cohn S.E., Dalcher A. Sequential estimation, data assimilation, and initialization. In “The Interaction Between Objective Analysis and Initialization” (D.Williamson, ed.), Publ. Meteorol. 127 (Proc. 14th Stanstead Seminar), Montreal: McGill University, 1982, pp.83-97.
56. Ghil M., Malanotte-Rizzoli P. Data assimilation in meteorology and oceanography // Adv. Geophys., 1991, 33, 141-266.
57. Giering R., Kaminski T. Recipes for adjoint code constructions // ACM Trans. Math. Software, 1998, v.24, pp.437-474.

58. Gilbert J.-C., Lemarechal C. Some numerical experiment with variable storage quasi-Newton algorithms. Math. Program., 1989, B25, pp.408-435.
59. Gilchrist B., Cressman G. An experiment in objective analysis. Tellus, 1954, 6, 309-318.
60. Giles M.B., Pierce N.A. An introduction to the adjoint approach to design // Flow, Turbulence and Combustrion, 2000, v.65, pp.393-415.
61. Gill P.E., Murray W., Wright M.H. Practical Optimization. Academic Press, London, 1987.
62. Ide K., Courtier P., Ghil M., Lorenc A.C. Unified notation for data assimilation: Operational, sequential and variational // J. Met. Soc. Japan, 1997, 75, 181-189.
63. Ipatova V.M. Solvability of a tide dynamics model in adjacent seas // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling, 2005, v. 20, no. 1, 67-81.
64. Ipatova V.M. Solvability of the ocean hydrothermodynamics problem under a nonlinear state equation // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling, 2008, v. 23, no. 2, 185-196.
65. Jazwinski A.H. Stochastic Processes and Filtering Theory. Academic Press, London, 1970, 376 pp.
66. Kalman R.E. A new approach to linear filtering and prediction problems. Trans. ASME, 82D, 35-45.
67. Kalman R.E., Bucy R.S. New results in linear filtering and prediction theory. ASME J. Basic. Eng., 1961, 83D, 95-108.
68. Kalnay E. Atmospheric Modeling. Data Assimilation and Predictibility. Cambridge University Press, 2003.
69. Kalnay E., Li H., Miyoshi T., Yang S.-C. and Ballabrera-Poy J. 4D-Var or Ensemble Kalman Filter. Tellus, 2007, v.A 59, 758–773.
70. Kurzhanskii A.B., Khapalov A.Yu. An observation theory for distributed-parameter systems. // J. Math. Syst. Estimat. Control, 1991, 1, 389-440.

71. Le Dimet F.-X., Charpentier I. Methodes de second order en assimilation de donnees. Equations aux Derivees Partielles et Applications (Articles dediees a Jacques-Louis Lions). – Paris: Elsevier, 1998, pp.623-639.
72. Le Dimet F.-X., Shutyaev V.P., Wang J., Mu M. The problem of data assimilation for soil water movement // ESAIM: Control, Optimization and Calculus of Variations (COCV), 2004, v.10, no.3, 331-345.
73. Dimet F.-X., Shutyaev V.P. On deterministic error analysis in variational data assimilation. Nonlinear Processes in Geophysics, 2005, v.12, 481-490.
74. Le Dimet F.-X., Shutyaev V. Quality of the model and error analysis in variational data assimilation. In: Proceedings of the 4th WMO International Symposium on Assimilation of Observations in Meteorology and Oceanography, WMO/TD No-1316, Geneva: WMO, 2006, 4pp.
75. Le Dimet F.-X., Shutyaev V.P., and Gejadze I. On optimal solution error in variational data assimilation: theoretical aspects // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling, 2006, v.21, no. 2, 139-152.
76. Le Dimet F.-X., Talagrand O. Variational algorithms for analysis and assimilation of meteorological observations: Theoretical Aspects. Tellus, 1986, 38A, 97-110.
77. Lawless A.S., Nichols N.K., Balloid S.P. A comparison of two methods for developing the linearization of a shallow-water model // Q.J.R.M.S., 2003, v.129, pp.1237-1254.
78. Lewis J.M., Derber J.C. The use of adjoint equations to solve a variational adjustment problem with advective constraints. Tellus, 1985, 37A, 309-322.
79. Lions J.-L. Control Optimal des Systemes Gouvernes par des Equations aux Derivees Partielles. Dunod, Paris, 1968.
80. Lions J.-L., Temam R., Wang S. On the equations of a large-scale ocean // Nonlinearity. – 1992. – V. 21, N 2. – P. 111-138
81. Liu C., Xiao Q., and Wang B. An ensemble-based 4D-Var data assimilation scheme. Part I: Technical formulation and preliminary test // American Weather Review, 2008, v.136, 3363–3373.

82. Lorenc A.C. A global three-dimensional multivariate statistical analysis scheme // Mon. Wea. Rev., 1981, 109, 701-721.
83. Lorenc A.C. Analysis methods for numerical weather prediction // Quart. J. R. Meteorol. Soc., 1986, 112, 1177-1194.
84. Lorenc A. Optimal nonlinear objective analysis // Quart. J. Roy. Meteorol. Soc., 1988, v.114, p.205-240.
85. Lorenc A.C., Bell R.S., Macpherson B. The Meteorological Office Analysis Correction Data Assimilation scheme // Quart. J. R. Meteorol. Soc., 1991, 117, 59-89.
86. Luong B., Blum J., Verron J. A variational method for the resolution of a data assimilation problem in oceanography // Inverse problems, 1998, v.14, p.979-997.
87. Lyne W.H., Swinbank R., Birch N.T. A data assimilation experiment, with results showing the atmospheric circulation during the FGGE special observing periods // Quart. J. R. Met. Soc., 1982, 108, 575-594.
88. Marchuk G.I. Formulation of theory of perturbations for complicated models. // Appl. Math. Optimization, 1975, 2, 1-33.
89. Marchuk G.I. Adjoint Equations and Analysis of Complex. Kluwer, Dordrecht, 1995.
90. Marchuk G.I., Agoshkov V.I., Shutyaev V.P. Adjoint Equations and Perturbation Algorithms in Nonlinear Problems, CRC Press Inc., New York, 1996.
91. Marchuk G.I., Penenko V.V. Application of optimization methods to the problem of mathematical simulation of atmospheric processes and environment, in G.I.Marchuk (ed.), Modelling and Optimization of Complex Systems: Proc. Of the IFIP-TC7 Working conf., Springer, New York, 1978, pp.240-252.
92. Marchuk G.I., Shutyaev V.P. Iteration methods for solving a data assimilation problem // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling, 1994, 9, 265-279.
93. Marchuk G., Shutyaev V. Solvability and numerical algorithms for a class of variational data assimilation problems // ESAIM: Control, Optimization and Calculus of Variations, 2002, v.8, p.873-883.
94. Marchuk G., Shutyaev V. Iterative algorithms for data assimilation problems.

In: Frontiers in Mathematical Analysis and Numerical Methods, In Memory of Jacques-Louis Lions, World Scientific Publishing Co., 2004, 197-206.

95. Marchuk G., Shutyaev V., Zalesny V. Approaches to the solution of data assimilation problems, in Menaldi J.L., Rofman E., Sulem A. (eds.) Optimal Control and Partial Differential Equations, IOS Press, Amsterdam, 2001, pp.489-497.

96. Marchuk G.I., Zalesny V.B. A numerical technique for geophysical data assimilation problem using Pontryagin's principle and splitting-up method // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling, 1993, 8, 311-326.

97. McPherson R.D., Bergman K.H., Kistler R.E., Rasch G.E., Gordon D.S. The NMC operatopnal global data assimilation system. // Mon. Wea. Rev., 1979, 107, 1445-1461.

98. Navon I.M. A review of variational and optimization methods in meteorology, in Sasaki Y.K. (ed.) Variational Methods in Geosciences, Elsevier, New York, 1986, pp.29-34.

99. Panel on Model-Assimilated Data Sets for Atmospheric and Oceanic Research: Four-Dimensional Model Assimilation of Data: A Strategy for the Earth System Sciences. National Academy Press, Washington, D.C., 1991, 78 pp.

100. Panofsky H. Objective weather-map analysis // J. Appl. Meteor, 1949, 6, 386-392.

101. Parmuzin E.I., Le Dimet F.-X., Shutyaev V.P. On error analysis in variational data assimilation problem for a nonlinear convection-diffusion model // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling, 2006, v. 21, no.2, 1-12.

102. Parmuzin E., Shutyaev V. Variational data assimilation for a nonstationary heat conduction problem with nonlinear diffusion // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling, 2005, v.20, no.1, 81-96.

103. Parmuzin E.I., Shutyaev V.P., and Diansky N.A. Numerical solution of a variational data assimilation problem for a 3D ocean thermohydrodynamics model with a nonlinear vertical heat exchange // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling, 2007, v. 22 (2), 177-198.

104. Parrish D.F., Derber J.C. The National Meteorological Center's spectral statistical interpolation analysis scheme // Mon. Wea. Rev., 1992, 120, 1747-1763.

105. Phillips N.A. On the problem of initial data for the primitive equations // Tellus, 1960, v.12, 121-126.

106. Pontryagin L.S., Boltyanskii V.G., Gamkrelidze R.V., Mischenko E.F. The Mathematical Theory of Optimal Processes, John Wiley, New York, 1962.

107. Provost C., Salmon R. A variational method for inverting hydrographic data // J. Mar. Res., 1986, 44, 1-34.

108. Richardson L. Weather prediction by numerical process. Cambridge University Press, Cambridge, 1922.

109. Russel D.L. A unified boundary controllability theory for hyperbolic and parabolic differential equations // Stud. Appl. Math., 1973, v.52, p.182-212.

110. Sasaki Y. Some basic formalisms in numerical variational analysis // Mon. Wea Rev., 1970, 98, 875-883.

111. Schroter J., Wunsch C. Solution of nonlinear finite difference ocean models by optimization methods with sensitivity and observational strategy analysis // J. Phys. Oceanogr., 1986, 16, 1855-1874.

112. Shutyaev V.P. Solvability and numerical solution of variational data assimilation problems. In: System Modeling and Optimization. Eds. J.Cagnol, J.-P. Zolesio. - Dordrecht: Kluwer, 2005. P.191-201.

113. Shutyaev V.P. Fundamental control functions and error analysis. In: Data Assimilation for the Earth System. NATO Science Series IV: Earth and Environmental Sciences. Eds. R.Swinbank, V.Shutyaev, W.Lahoz. Dordrecht: Kluwer, 2003, 75-84.

114. Shutyaev V., Le Dimet F.-X., Gejadze I. On optimal solution error covariances in variational data assimilation // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling, 2008, v.23, no.2, 197-206.

115. Shutyaev V.P., Le Dimet F.-X., Gejadze I.Yu. A posteriori error covariances in variational data assimilation // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling, 2009, v. 24 (2), 161-169.

116. Shutyaev V., Parmuzin E. Variational data assimilation for nonstationary 1D vertical heat exchange model. In: Proceedings of the 4th WMO International Symposium on Assimilation of Observations in Meteorology and Oceanography, WMO/TD No-1316, Geneva: WMO, 2006, 4pp.

117. Shutyaev V.P., Parmuzin E.I. Some algorithms for studying solution sensitivity in the problem of variational assimilation of observation data for a model of ocean thermodynamics // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling, 2009, v. 24, no. 2, 145-160.

118. Sirkes Z., Tziperman E. Finite difference of adjoint or adjoint of finite difference? // Mon. Weather Rev., 1997, v.125, pp.3373-3378.

119. Smedstad O.M., O'Brien J.J. Variational data assimilation and parameter estimation in an equatorial Pacific Ocean model // Progr. in Oceanol., 1991, v.26, p.179-185.

120. Swinbank R., Shutyaev V., Lahoz W. (Eds.) Data Assimilation for the Earth System. NATO Science Series IV: Earth and Environmental Sciences. Dordrecht: Kluwer, 2003.

121. Taillandier V., Echevin V., Mortier L., Devenon J.-L. Controlling boundary conditions with a four-dimensional variational data-assimilation method in a non-stratified open coastal model // Ocean Dynamics, 2004, v.54 (2), 284-298.

122. Thiebaux H.J., Pedder M.A. Spatial Objective Analysis. Academic Press, London, 1987, 299 pp.

123. Tian X., Xie J., and Dai A. An ensemble-based explicit 4D-Var assimilation method // Journal of Geophysical Research, 2008, v.113 (D21124).

124. Tziperman E., Thacker W.C. An optimal control/adjoint approach to studying the general circulation // J. Phys. Oceanogr., 1989, 19, 1471-1485.

125. Wenzel M., Schroeter J., and Olbers D. The annual cycle of the global ocean circulation as determined by 4D VAR data assimilation // Progress in Oceanography, 2001, v.48, 73-119.

126. Zhang F.Q., Zhang M. and Hansen J.A. Coupling ensemble Kalman filter with four dimensional variational data assimilation // Adv. Atmos. Sci., 2009, v.26 (1), 1–8.

127. Zalesny V.B., Rusakov A.S. Numerical algorithm of data assimilation based on splitting and adjoint equation methods // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling, 2007, v.22, no.2, 199-219.

128. Zalesny V.B., Gusev A.V. Mathematical model of the World ocean dynamics with algorithms of variational assimilation of temperature and salinity fields // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling, 2009, v. 24, no. 2, 171-190.

129. Zuazua E. An Introduction to the Exact Controllability for Distributed Systems. Lisboa: Centro de Math. App. Fundamenties de la Univ. De Lisboa, 1990.