

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
Д.А. Зубцов
10 декабря 2013 г.

ПРОГРАММА И ЗАДАНИЯ

по дисциплине:	<u>Уравнения математической физики</u>
по направлению	<u>010900 «Прикладные математика и физика»</u>
факультет:	<u>ФПФЭ</u>
кафедра:	<u>высшей математики</u>
курс:	<u>III</u>
Трудоёмкость:	<u>обязательная часть — 2 зач. ед., вариативная часть — 2 зач. ед., дополнительная за сложность — 1 зач. ед.</u>
семестр:	<u>6</u>
лекции:	<u>51 час</u>
практические (семинарские) занятия:	<u>34 часа</u> Экзамен — <u>6 семестр</u>
лабораторные занятия:	<u>нет</u> Самостоятельная работа — <u>1 час</u> в неделю
ВСЕГО ЧАСОВ	<u>— 85</u>

Программу составил

В.П. Михайлов, д.ф.-м.н., профессор

Программа принята на заседании кафедры
высшей математики 23 ноября 2013 г.

Заведующий кафедрой Е.С. Половинкин

ПРОГРАММА (повышенный уровень)

1. Решение первой смешанной задачи для гиперболического уравнения (обоснование метода Фурье).
2. Теорема о единственности решения первой смешанной задачи для гиперболического уравнения и теорема о непрерывной зависимости решения от начальных функций.
3. Решение первой смешанной задачи для параболического уравнения (обоснование метода Фурье).
4. Теорема единственности решения первой смешанной задачи для параболического уравнения и теорема о непрерывной зависимости решения от начальной и граничных функций.
5. Вариационный метод решения внутренней задачи Дирихле для уравнения Лапласа.
6. Внешняя задача Дирихле для уравнения Лапласа.
7. Теоремы Фредгольма для интегрального уравнения с вырожденным ядром.

Литература

Основная

1. *Михайлов В.П.* Лекции по уравнениям математической физики. – М.: Физматлит, 2001.
2. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. – 5-е изд. – М.: Наука, 1988.
3. *Владимиров В.С., Ващарин А.А., Каримова Х.Х., Михайлов В.П., Сидоров Ю.В., Шабунин М.И.* Сборник задач по уравнениям математической физики. – М.: Физматлит, 2004, 4-е изд., стереотип.
4. *Михайлов В.П., Михайлова Т.В., Шабунин М.И.* Сборник типовых задач по курсу уравнения математической физики. – М.: МФТИ, 2007.

Дополнительная

5. *Михайлов В.П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. – 2-е изд. – М.: Наука, 1988.
6. *Уровев В.М.* Уравнения математической физики. – М.: ИФ Яуза, 1998.
7. *Ильин А.М.* Уравнения математической физики. – М.: Физматлит, 2009.
8. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. – М.: Изд-во МГУ, 2004.
9. *Олейник О.А.* Лекции об уравнениях с частными производными. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2007.

ЗАДАНИЯ

Все номера задач указаны по книге [3].

ЗАМЕЧАНИЯ

1. Задачи с подчёркнутыми номерами рекомендовано разобрать на семинарских занятиях.
2. Задачи, отмеченные звёздочкой (*), являются необязательными для базового уровня.

ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 17–22 марта)

- I. Смешанная задача с начальными условиями на отрезке.**
Метод Фурье (см. [4], с. 464–470; [6], с. 157–167; [5], с. 140–156, с. 544–553)

20.40 (1), 20.14 (3), 20.3 (3).

Решить смешанные задачи:

1.
$$u_{tt} + 4u = u_{xx} + 4t^2x + 8t, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0;$$
$$u_x|_{x=0} = u_x|_{x=1} = t^2, \quad t > 0;$$
$$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 2, \quad 0 < x < 1.$$
2.
$$u_t = u_{xx}, \quad 0 < x < \pi, t > 0, \quad u|_{t=0} = x^2, \quad 0 \leq x \leq \pi;$$
$$u_x|_{x=0} = 0, \quad u_x|_{x=\pi} = 2\pi e^{-t}, \quad t > 0.$$
3.
$$4u_t = u_{xx} + u + 4x - t + \frac{8t}{\pi^2} \cos \frac{\pi x}{2}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0;$$
$$u|_{t=0} = -\cos \frac{3\pi x}{2}, \quad 0 < x < 1;$$
$$u_x|_{x=0} = t, \quad u_x|_{x=1} = t, \quad t > 0.$$

II. Метод Фурье с применением функций Бесселя

20.20(2); 20.49(2); 20.33.

Решить следующие задачи, считая, что $f(r)$ и $g(r)$ — гладкие функции на рассматриваемых отрезках, r, φ — полярные координаты:

1.
$$u_t = 9\Delta u + e^{-2t} J_1 \left(\frac{\mu_3^{(1)}}{2} r \right) \sin \left(\varphi - \frac{\pi}{4} \right), \quad r < 2, t > 0, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi;$$
$$u|_{t=0} = f(r) \sin \varphi, \quad r \leq 2, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi;$$
$$u|_{r=2} = 0, \quad t \geq 2, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi,$$

где $f(r) \in C^1[0,2]$, $f(2) = 0$, $\mu_3^{(1)}$ — положительный нуль функции Бесселя $J_1(\xi)$.

2. $2u_{tt} = \Delta u + f(r) \sin 3\varphi \cos \varphi$, $r < 1$, $t > 0$;
 $u|_{t=0} = 0$, $u_t|_{t=0} = 0$, $u|_{r=1} = 0$.

3. Найти все решения волнового уравнения

$$\frac{1}{a^2} u_{tt} - \Delta u = 0, \quad x \in \mathbb{R}_n, \quad t \in \mathbb{R}_1,$$

имеющие вид $e^{i\omega t} v(r)$, $r = |x|$, где ω — вещественное число, $\omega \neq 0$. Рассмотреть случаи $n = 2$ и $n = 3$.

4. Пусть $0 < \mu_1 < \mu_2 < \dots$ — последовательные корни уравнения $J_2'(\mu) = 0$. Доказать, что если $m \neq n$, то

$$\int_0^1 r J_2(\mu_n r) J_2(\mu_m r) dr = 0.$$

III. Метод Фурье решения задач в прямоугольной области (см. [5], с. 468–479; [4], с. 250–254)

20.18, 20.19, 20.48.

ВТОРОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 12–17 мая)

I. Компактность (в смысле равномерной сходимости) множеств функций

(Теорема Арчела предполагается известной)

1. Показать, что множество функций $M = \{\varphi_\alpha(x) = f(x, \alpha), 0 \leq x \leq 1, \alpha \geq 0\}$, где $f(x, y)$ непрерывна и ограничена на $\{0 \leq x \leq 1, y \geq 0\}$, вообще говоря, некомпактно. Если же дополнительно и функция $f_x(x, y)$ непрерывна и ограничена на $\{0 \leq x \leq 1, y \geq 0\}$, то множество M — компактно.
2. Показать, что множество функций

$$\mathfrak{M} = \{f(x) \in C^1[0,1] : \int_0^1 [f^2(x) + (f'(x))^2] dx \leq 2011\}$$

компактно (частный случай «теоремы вложения» Соболева).

3. Пусть $u(x, t)$, $x \in \mathbb{R}_1$, $t \geq 0$, — ограниченное в $\{x \in \mathbb{R}_1, t \geq 0\}$ решение задачи Коши
 а) для уравнения теплопроводности $u_t - u_{xx} = 0$, $x \in \mathbb{R}_1$, $t > 0$,
 или

б) для волнового уравнения $u_{tt} - u_{xx} = 0$, $x \in \mathbb{R}_1$, $t > 0$.

Показать, что множество $M = \{\varphi_\alpha(x) = u(x, \alpha), 0 \leq x \leq 1, \alpha \geq 1\}$ в случае а) компактно, а в случае б), вообще говоря, некомпактно.

II. Элементы вариационных методов решения краевых задач

1. Показать, что для функций $u(x) \in C^1[0,1]$, для которых $u(0) = 0$ и $\int_0^1 u^2 dx = 1$, имеет место неравенство

$$\int_0^1 (u'(x))^2 dx + u^2(1) \geq \frac{\pi^2}{4}.$$

2. Найти

$$\inf_{\substack{u \in \dot{C}^1[0,1] \\ \|u\|=1}} \int_0^1 x^\sigma u'^2(x) dx,$$

где постоянная $\sigma > 2$, и показать, что эта точная нижняя грань недостижима.

3. Пусть функционал

$$J(u) = \int_a^b (u'^2 + 2fu) dx + \sigma u^2(a) + \theta u^2(b) - 2\alpha u(a) - 2\beta u(b), \quad u \in C^1[a,b], \quad (*)$$

где $f(x) \in C[a,b]$, $\sigma, \theta, \alpha, \beta$ — постоянные, $\sigma \geq 0$, $\theta \geq 0$, $\sigma + \theta > 0$, достигает своего минимального значения на функции $u_0(x)$. Показать, что $u_0(x) \in C^2[a,b]$ и является решением задачи

$$\begin{aligned} u_0'' &= f(x), \quad x \in [a,b]; \\ -u_0'(a) + \sigma u_0(a) &= \alpha; \quad u_0'(b) + \theta u_0(b) = \beta. \end{aligned} \quad (**)$$

4. Доказать, что при сделанных в задаче 3 предположениях, задача (**) имеет решение, и это решение доставляет минимум функционалу (*).
5. На множестве функций $M_\varphi = \{u \in C^1(\bar{Q}), u|_{\partial Q} = \varphi\}$ (Q — ограниченная область в \mathbb{R}_3 с гладкой границей, а $\varphi \in C(\partial Q)$) задан функционал

$$J(u) = \int_Q (|\nabla u|^2 + 2fu) dx,$$

где $f(x) \in C(\overline{Q})$. Пусть функция $u(x)$ реализует минимум функционала J и принадлежит $C^2(\overline{Q})$. Показать, что $u(x)$ есть решение задачи Дирихле:

$$\Delta u = f, \quad x \in Q; \quad u|_{\partial Q} = \varphi.$$

6. Найти

$$\inf_{u \in H} \int_{|x| < 1} (|\nabla u|^2 + 16x_1 u) dx,$$

где $H = \{u(x) \in C^1(1 \leq |x| \leq 2), u|_{|x|=1} = x_1\}$, $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

7. Пусть функционал

$$J(u) = \int_{1 < |x| < 2} (|\nabla u|^2 - 2f(x)u) dx + \int_{|x|=1} \sigma(x)u^2(x) ds - \\ - 2 \int_{|x|=1} \alpha(x)u(x) ds - 2 \int_{|x|=2} \beta(x)u(x) ds, \quad u \in C^1(1 \leq |x| \leq 2),$$

где $f(x) \in C(1 \leq |x| \leq 2)$; $\sigma(x), \alpha(x) \in C(|x| = 1)$; $\beta(x) \in C(|x| = 2)$; $\sigma(x) > 0$, $|x| = 1$, достигает своего минимального значения на функции $u_0(x)$, принадлежащей $C^2(1 \leq |x| \leq 2)$.

Доказать, что $u_0(x)$ — решение задачи

$$\Delta u = f(x), \quad 1 < |x| < 2;$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \nu} + \sigma u \right) \Big|_{|x|=1} = \alpha(x); \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{|x|=2} = \beta(x).$$

8. Показать, что для всех функций

$$u(x) \in C^1(1 \leq |x| \leq 2), \quad x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3,$$

удовлетворяющих граничному условию $u|_{|x|=1} = 0$, $u|_{|x|=2} = 1$, имеет место неравенство

$$\int_{1 < |x| < 2} \left(|\nabla u|^2 - \frac{2u}{|x|} \right) dx \geq -\frac{\pi}{3}.$$

III. Интегральные уравнения

5.21; 5.24(1).

1. Найти характеристические числа, собственные функции и решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-\pi}^{\pi} (x \sin y + \cos y \cos x) \varphi(y) dy + ax + \cos x, \quad -\pi \leq x \leq \pi.$$

2. Найти решение уравнения

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-1}^1 \left(x e^{-x^2} \cos^3 y + \frac{1 - \cos x}{x} e^{y^2} \right) \varphi(y) dy + f(x), \quad -1 \leq x \leq 1.$$

При каких $f(x) \in C[-1,1]$ и λ решение существует? Каково множество характеристических чисел сопряженного ядра?

3. Проиллюстрировать теоремы Фредгольма на примерах интегральных уравнений из задач 5.22(3); 5.28(2); 5.30; 5.36(1).
4. Показать, что однородное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-y)^2} \varphi(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}^1,$$

имеет нетривиальные решения для всех $\lambda \geq \frac{1}{\sqrt{\pi}}$. Найти эти решения.

5. Найти условия на $f(x) \in C\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, при которых уравнение

$$u(x) = \lambda \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (|y| \sin |x| + y \cdot |x|) u(y) dy + f(x), \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],$$

разрешимо при всех λ .

IV. Функция Грина оператора Штурма–Лиувилля

15.1(2); 15.4(3); 15.16.

1. Свести к интегральному уравнению:

а) $(x^2 + 1)y'' + 2xy' - 2y + \lambda y = 0, \quad 0 < x < 1;$

$y'(0) = 0, \quad y(1) - y'(1) = 0.$

б) $-(x+2)^2 y'' + (x+2)y' = \lambda y + f(x), \quad -1 < x < 0,$

$y'(-1) = 0, \quad y'(0) + \alpha y(0) = 0,$ где $\alpha \geq 0, \quad f(x) \in C[-1; 0].$

Задания составила

Т.В. Михайлова, к.ф.-м.н., доцент