УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
Д.А. Зубцов
10 декабря 2013 г.

ПРОГРАММА И ЗАДАНИЯ

по дисциплине:	**Уравнения математической физики**
по направлению	010900 «Прикладные математика и физика»
факультет:	**ФУПМ**
кафедра:	**высшей математики**
курс:	III
Трудоёмкость:	обязательная часть — 2 зач. ед., вариативная часть— 2 зач. ед., дополнительная за сложность — 1 зач. ед.
семестр:	6
лекции:	51 час
практические (семинарские) занятия:	34 часа
лабораторные занятия:	нет
ВСЕГО ЧАСОВ	— 85

Экзамен — 6 семестр

Самостоятельная работа — 1 час в неделю

Программу составил

В.И. Зубов, д.ф.-м.н., профессор

Программа принята на заседании кафедры
высшей математики 23 ноября 2013 г.

Заведующий кафедрой Е.С. Половинкин

П Р О Г Р А М М А
(повышенный уровень)

1. Начальные сведения об операторе Лапласа и о задаче на собственные значения при однородных краевых условиях

Формулы Грина для оператора Лапласа. Постановка краевых задач Дирихле и Неймана для уравнения Пуассона в ограниченной области. Необходимое условие разрешимости задачи Неймана. Симметричность и положительность оператора $-\Delta$ с однородными условиями Дирихле. Задача на собственные значения. Вещественность и положительность собственных значений. Ортогональность собственных функций.

2. Задача Дирихле для уравнения Лапласа–Пуассона в круге

Построение формального решения задачи Дирихле методом Фурье. Бесконечная дифференцируемость решения в области, разложение его по гармоническим многочленам в случае уравнения Лапласа. Интеграл Пуассона. Существование классического решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа в круге при непрерывной граничной функции.

3. Функции Бесселя и их применение к решению задач на собственные значения для круглой мембраны

Задача на собственные значения и собственные функции для оператора Лапласа в круге при однородном краевом условии Дирихле. Разделение переменных. Дифференциальное уравнение Бесселя. Функции Бесселя первого рода и их свойства. Функции Бесселя, неограниченные в нуле. Выражения для собственных функций и собственных значений круглой мембраны с закреплёнными краями через функции Бесселя. Ортогональность собственных функций и функций Бесселя. Полнота системы собственных функций (без доказательства).

4. Уравнения Лапласа и Пуассона в $\mathbb{R}^3$

Интегральное представление решений уравнений Пуассона и Лапласа в ограниченной области.

Пространство основных функций $D(\mathbb{R}^n)$. Понятие сходимости последовательности функций в $D(\mathbb{R}^n)$. Пространство обобщённых функций $D'(\mathbb{R}^n)$, сходимость последовательности элементов из $D'(\mathbb{R}^n)$. Локально интегрируемые функции и регулярные обобщённые функции. Дифференцирование обобщённых функций. Фундаментальное решение уравнения Лапласа в $\mathbb{R}^3$.

Гармонические функции в $\mathbb{R}^3$ и их свойства. Бесконечная дифференцируемость гармонических функций. Теорема о среднем. Принцип максимума и минимума.

Задача Дирихле для уравнения Пуассона, единственность классического решения. Функция Грина задачи Дирихле; решение задачи Дирихле с помощью функции Грина. Симметричность функции Грина (без доказательства). Функция Грина для шара. Формула Пуассона решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа в шаре. Теорема Лиувилля, теорема об устранимой особенности для гармонических функций. Преобразование Кельвина. Регулярность поведения гармонической функции на бесконечности.

Постановка внешних краевых задач Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа в $\mathbb{R}^3$. Единственность решения внешних задач Дирихле и Неймана в $\mathbb{R}^3$.

5. Метод разделения переменных в сферических координатах для уравнения Лапласа в $\mathbb{R}^3$. Сферические функции

Уравнение Лапласа в сферических координатах. Сферические функции как собственные функции оператора Лапласа–Бельтрами на единичной сфере S_1. Шаровые функции (гармонические многочлены). Собственные значения оператора Лапласа–Бельтрами. Дифференциальное уравнение Лежандра. Полиномы Лежандра и присоединённые функции Лежандра. Выражение сферических функций в сферической системе координат.

Ортогональность и полнота (без доказательства) сферических функций в $L_2(S_1)$. Решение задач Дирихле и Неймана в шаре и шаровом слое в форме рядов по шаровым функциям.

6. Интегральные уравнения

Интегральное уравнение Фредгольма второго рода. Непрерывность интегральных операторов с непрерывными и полярными ядрами в пространстве $C(\overline{G})$. Союзное уравнение. Характеристические числа и собственные функции ядра интегрального оператора.

Уравнения с вырожденными ядрами. Сведение их к системе линейных алгебраических уравнений. Теоремы Фредгольма в этом случае.

Уравнения с непрерывными и полярными ядрами. Уравнение с малым по норме оператором. Ряд Неймана.

Сведение уравнений с полярными ядрами к уравнениям с вырожденными ядрами. Теоремы Фредгольма в общем случае.

Уравнения с эрмитовыми ядрами. Симметричность интегрального оператора с эрмитовым ядром. Теорема о существовании характеристических чисел. Теорема Гильберта–Шмидта для уравнений с непрерывными эрмитовыми ядрами.

7. Задача Штурма–Лиувилля

Функция Грина задачи Штурма–Лиувилля; её существование, симметричность, непрерывность. Сведение задачи Штурма–Лиувилля к интегральному уравнению с эрмитовым ядром. Свойства спектра и собственных функций. Теорема Стеклова.

8. Потенциалы

Объёмный потенциал и его свойства. Потенциал простого слоя, его непрерывность в $\mathbb{R}^3$. Потенциал двойного слоя. Формула Гаусса, скачок потенциала двойного слоя при переходе через поверхность. Правильная нормальная производная потенциала простого слоя, формула скачка.

Сведение задач Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа посредством потенциалов к интегральным уравнениям Фредгольма второго рода на границе. Однозначная разрешимость внутренней задачи Дирихле и внешней задачи Неймана.

Литература

1. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. – 5-е изд. – М.: Наука, 1988.
2. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. – 5-е изд. – М.: Наука, 1977. – 735 с.
3. *Петровский И.Г.* Лекции об уравнениях с частными производными. – 3-е изд. – М.: Физматгиз, 1961.
4. *Уроев В.М.* Уравнения математической физики. – М.: МЦНМО, 2001.
5. *Пальцев Б.В.* Сферические функции: учеб.-метод. пособие. – М.: МФТИ, 2000.
6. *Зубов В.И.* Функции Бесселя: учеб.-метод. пособие. – М.: МФТИ, 2007.

З А Д А Н И Я

Все номера задач указаны по книге:
Владимиров В.С., Вашарин А.А., Каримова Х.Х., Михайлов В.П., Сидоров Ю.В., Шабунин М.И. Сборник задач по уравнениям математической физики. – 4-е изд., стереотип. – М.: Физматлит, 2003.

ЗАМЕЧАНИЯ

1. Задачи с подчёркнутыми номерами рекомендовано разобрать на семинарских занятиях.
2. Задачи, отмеченные звёздочкой (*), являются необязательными.

ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 17–22 марта)

I. Краевые задачи для эллиптических уравнений в круге и кольце. Метод Фурье

<u>1.</u> 16.1(3) (решить и внешнюю задачу с тем же граничным условием).

<u>2.</u> Выяснить, при каких $\alpha \in \mathbb{R}$ имеет решение задача Неймана:

$$\Delta u = y, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} < 2,$$
$$u_r|_{r=2} = \sin^3 \varphi + \alpha \cos^2 \varphi, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,$$

и решить задачу при таких α.

3. Решить задачи ($r = \sqrt{x^2 + y^2}$)

а) $\Delta u = 12y^2 - 2, \quad r < 1, \quad (u_r + u)|_{r=1} = 5y^4$;

б) $\Delta u = 3\frac{x}{r}, \quad 1 < r < 2, \quad u_r|_{r=1} = 2xy, \quad u|_{r=2} = x\left(\frac{5}{2} + y\right)$;

в) $\Delta u = 15r^2 \sin\varphi, \quad \frac{1}{2} < r < 1,$
$u_r|_{r=1/2} = 2\sin^2\varphi, \quad u_r|_{r=1} = \cos^2\varphi$;

г) $\Delta u = 0, \quad (x,y) \in D = \{0 < r < R, \quad 0 < \varphi < \alpha\}, \quad \pi < \alpha < 2\pi,$
$(x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi),$
$u|_{\varphi=0} = u|_{\varphi=\alpha} = 0, \quad 0 \leqslant r \leqslant R, \quad u|_{r=R} = f(\varphi)$. Найти необходимое и достаточное условие на функцию $f(\varphi) \in C^1([0,\alpha])$, $f(0) = f(\alpha) = 0$, обеспечивающее ограниченность первых производных решения в окрестности точки (0,0).

II. Функции Бесселя и их применение при решении задач для круглой мембраны

1. 20.29(2); 20.32(2); 20.50(1); 20.49(2); 20.33.

2. Пусть D — ограниченная область в $\mathbb{R}^2$ с гладкой границей, и пусть

$$-\Delta u_k = \lambda_k u_k,\ (x,y) \in D, \quad \left.\frac{\partial u_k}{\partial n}\right|_{\partial D} = 0,$$
$$u_k \in C^2(D) \cap C^1(\overline{D}), \quad u_k \not\equiv 0, \quad k = 1,2,\ \lambda_1 \neq \lambda_2.$$

Доказать, что

$$\iint\limits_D u_1(x,y)u_2(x,y)\,dx\,dy = 0.$$

3. Пусть $0 < \mu_1 < \mu_2 < \ldots$ — корни уравнения $J_2'(\mu) = 0$. С помощью результата предыдущей задачи доказать, что

$$\int_0^1 rJ_2(\mu_m r)J_2(\mu_n r)\,dr = 0, \quad \text{если} \quad m \neq n.$$

4. Найти собственные функции $u(x,y)$ и собственные значения λ задачи $-\Delta u = \lambda u$, $(x,y) \in D = \{(x,y)\colon y > 0,\ x^2 + y^2 < R^2\}$, $u|_{\partial D} = 0$.

5. Решить смешанные задачи ($f(r)$ и $g(r)$ — достаточно гладкие функции):

а) $u_{tt} = 4\Delta u + f(r)\cos^2\varphi$, $(t > 0,\ r < 3,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi)$,
$u|_{r=3} = 0$, $(t \geqslant 0,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi)$,
$u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0$, $(r \leqslant 3,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi)$, $f(3) = 0$;

б) $u_t = \frac{1}{9}\Delta u - 2u + e^{-t}f(r)\sin 3\varphi$, $(t > 0,\ r < 4,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi)$,
$u|_{r=4} = 0$, $(t \geqslant 0,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi)$,
$u|_{t=0} = g(r)\cdot\sin 2\varphi$, $(r \leqslant 4,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi)$,
$f(4) = 0$, $g(4) = 0$;

в) $u_t = 9\Delta u - 2u + J_2\left(\frac{\mu_3^{(2)}}{2}r\right)\cos 2\varphi$, $(t > 0,\ r < 2,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi)$,
$u|_{r=2} = 0$, $(t \geqslant 0,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi)$,
$u|_{t=0} = g(r)\cdot\cos(2\varphi + \pi/4)$, $(r \leqslant 2,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi)$,

$g(2) = 0$, $\mu_3^{(2)}$ — положительный нуль функции Бесселя первого рода $J_2(x)$.

III. Уравнения Лапласа и Пуассона в $\mathbb{R}^3$. Функция Грина задачи Дирихле

1. Доказать, что функция $E(x) = -\frac{1}{4\pi|x|}$ является фундаментальным решением уравнения Лапласа в $\mathbb{R}^3$.

2. 17.1($\underline{1}$,2); 17.2(1,2); 17.7; 17.4(1,$\underline{2}$,7); $\underline{17}$.8(2).

3. Найти ограниченные в $D = \{x = (x_1,x_2,x_3)\colon\ x_1 \in \mathbb{R}^1,\ x_2 > 0,\ x_3 > 0\}$ решения задач:

$\underline{\text{а)}}$ $\Delta u = 0$, $x \in D$, $u|_{x_2=0} = 0$, $u|_{x_3=0} = \cos 4x_1 \cdot \sin 3x_2$;

б) $\Delta u = 0$, $x \in D$, $u_{x_2}|_{x_2=0} = 0$, $u|_{x_3=0} = (x_1^2 + x_2^2 + 1)^{-1/2}$.

IV. Сферические функции

1. 16.20(2,3); 16.21($\underline{4}$,5); 16.22(2); $\underline{16.23(3)}$; 16.24(7); 16.25(1); 16.18.

ВТОРОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 12–17 мая)

I. Интегральные уравнения

1. $\underline{5.19}$; 5.21; 5.22($\underline{4}$,9); 5.24(1).

2. Найти характеристические числа, собственные функции ядра интегрального оператора и решить при всех λ уравнение

$$u(x) = \lambda \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\sin x + y\cos x) u(y)\, dy + f(x),$$

$$-\pi/2 \leqslant x \leqslant \pi/2, \quad f(x) \in C\left(\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right).$$

Найти условия его разрешимости при характеристических значениях λ, а также его резольвенту $R(x,y;\lambda)$. Проиллюстрировать справедливость теорем Фредгольма на примере этой задачи.

3. Сколько решений имеет интегральное уравнение

$$u(x) = \frac{30}{115} \int_0^1 \left(e^{\frac{x^2+y^2}{2}} - \cos(x+2y)\right) u(y)\, dy + \frac{95}{1+x^2},$$

$$0 \leqslant x \leqslant 1\ ?$$

4. 5.30; 5.36(1,4); 5.38(1); 5.39.

II. Задача Штурма–Лиувилля

1. 15.1(4,5); 15.4(1,2); 15.18(2,4); 15.14(1,7); 15.16.

2. С помощью функции Грина для соответствующего дифференциального оператора свести к интегральному уравнению задачу

$$x^2y'' - xy' + y = \lambda x^3 y + f(x), \quad 1/2 < x < 1,$$
$$2y\,(1/2) - y'\,(1/2) = 0, \quad y(1) = 0.$$

III. Потенциалы

1. 18.6(5); 18.7(1); 18.16; 18.19(1); 18.22(1); 18.33(1).

2. С помощью потенциалов решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа внутри и вне шара $|x| < R$ в $\mathbb{R}^3$.

Указание. Решение рекомендуется искать в виде суммы потенциалов простого и двойного слоя.

Задания составил Н.Х. Агаханов, к.ф.-м.н., доцент