УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
Д.А. Зубцов
10 декабря 2013 г.

ПРОГРАММА И ЗАДАНИЯ

по дисциплине:	**Уравнения математической физики**
по направлению	010900 «Прикладные математика и физика»
факультет:	**ФФКЭ**
кафедра:	**высшей математики**
курс:	III
Трудоёмкость:	обязательная часть — 2 зач. ед., вариативная часть— 2 зач. ед., дополнительная за сложность — 1 зач. ед.
семестр:	6
лекции:	51 час
практические (семинарские) занятия:	34 часа
лабораторные занятия:	нет
ВСЕГО ЧАСОВ	— 85

Экзамен — 6 семестр

Самостоятельная работа — 1 час в неделю

Программу составил

В.В. Шаньков, к.ф.-м.н., доцент

Программа принята на заседании кафедры
высшей математики 23 ноября 2013 г.

Заведующий кафедрой Е.С. Половинкин

1. Интегральные уравнения с вырожденным ядром. Теоремы Фредгольма.
2. Теорема о разрешимости интегрального уравнения с малым непрерывным ядром.
3. Лемма об эквивалентности интегрального уравнения с непрерывным ядром интегральному уравнению с вырожденным ядром. Теоремы Фредгольма.
4. Свойства собственных значений и собственных функций интегрального уравнения с вещественным симметричным ядром. Теорема Гильберта–Шмидта.
5. Задача Штурма–Лиувилля. Функция Грина задачи Штурма–Лиувилля. Ее свойства. Сведение задачи Штурма–Лиувилля к интегральному уравнению.
6. Свойства собственных значений и собственных функций задачи Штурма–Лиувилля. Теорема Стеклова. Полнота системы собственных функций задачи Штурма–Лиувилля.
7. Уравнение Бесселя. Представление функций Бесселя в виде степенного ряда. Интегральные представления функций Бесселя. Рекуррентные соотношения.
8. Свойство ортогональности и свойства нулей функций Бесселя. Асимптотическое поведение функций Бесселя.
9. Построение формального решения смешанной задачи о колебаниях круглой мембраны, закрепленной по краю.
10. Гармонические функции в $\mathbb{R}^3$. Основная интегральная формула. Теорема о среднем. Принцип максимума (строгий).
11. Основные краевые задачи для уравнения Лапласа. Единственность решения задачи Дирихле.
12. Правильная нормальная производная. Условие разрешимости внутренней задачи Неймана. Неединственность решения. Внешняя задача Неймана.
13. Функция Грина задачи Дирихле. Решение задачи Дирихле с помощью функции Грина. Решение задачи Дирихле для шара, формула Пуассона.
14. Сферические функции. Полиномы Лежандра. Производящая функция. Присоединенные функции Лежандра. Формула сложения для полиномов Лежандра. Формула Лапласа. Решение задачи Дирихле для шара.
15. Объемный потенциал, его свойства. Поверхности Ляпунова. Потенциал простого слоя, его свойства. Разрыв нормальной

производной потенциала простого слоя.

16. Потенциал двойного слоя, непрерывность на поверхности. Разрыв потенциала двойного слоя.
17. Сведение краевых задач Дирихле и Неймана к интегральным уравнениям. Разрешимость краевых задач.

Литература

1. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. – 5-е изд. – М.: Наука, 1988.
2. *Владимиров В.С., Жаринов В.В.* Уравнения математической физики. – М.: Физматлит, 2000.
3. *Михайлов В.П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. – 2-е изд. – М.: Наука, 1988.
4. *Михайлов В.П.* Лекции по уравнениям математической физики. – М.: Физматлит, 2001.
5. *Соболев С.Л.* Уравнения математической физики. – 5-е изд. – М.: Наука, 1992.
6. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. – 5-е изд. – М.: Наука, 1977. – 735 с.
7. *Уроев В.М.* Уравнения математической физики. – М.: ИФ Яуза, 1998.
8. *Масленникова В.Н.* Дифференциальные уравнения в частных производных. – М.: Изд-во РУДН, 1997.
9. *Шубин М.А.* Лекции об уравнениях математической физики. – М.: МЦНМО, 2001.
10. *Олейник О.А.* Лекции об уравнениях с частными производными. – 2-е изд. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2005.

З А Д А Н И Я

Литература

Все номера задач указаны по книге:
Владимиров В.С., Вашарин А.А., Каримова Х.Х., Михайлов В.П., Сидоров Ю.В., Шабунин М.И. Сборник задач по уравнениям математической физики. – 3-е изд., исправл. – М.: Физматлит, 2001.

ЗАМЕЧАНИЯ

1. Задачи с подчёркнутыми номерами рекомендовано разобрать на семинарских занятиях.
2. Задачи, отмеченные звёздочкой (*), являются необязательными.

ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 17–22 марта)

I. Функции Бесселя и их применение при решении задач для круглой мембраны. Метод Фурье

1. 20.20(2); <u>20.33</u>; 20.49(2).

2. Решить следующие задачи, считая, что $f(r)$ и $g(r)$ — гладкие функции на рассматриваемых отрезках, r, φ — полярные координаты:

<u>а)</u> $4u_t = \Delta u - 8u + 4tf(r)\cos\varphi$, $r < 6$, $t > 0$,
$u|_{t=0} = g(r)\cos 3\varphi, u|_{r=6} = 0$, $\Big|u|_{r=0}\Big| < \infty$;

<u>б)</u> $4u_{tt} = \Delta u + f(r)\sin^2 2\varphi$, $r < 1$, $t > 0$,
$u|_{t=0} = g(r)\cos 2\varphi$, $u_t|_{t=0} = J_0\left(\mu_{03}r\right)$, $u|_{r=1} = 0$, $|u|_{r=0}| < \infty$,
где μ_{kj} — j-й по порядку положительный нуль функции Бесселя J_k, $k = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots,\, j = 1,\, 2,\, 3,\, \ldots$

3. Пусть G — ограниченная область на плоскости с гладкой границей Г. Доказать, что если

$$(\Delta + \lambda)u = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma} = 0,$$

$$(\Delta + \nu)v = 0, \quad \left.\frac{\partial v}{\partial n}\right|_{\Gamma} = 0, \quad \lambda \neq \nu,$$

то

$$\iint\limits_G u(x,y)v(x,y)\,dx\,dy = 0.$$

4. Пусть $0 < \mu_1 < \mu_2 < \ldots$ — последовательные корни уравнения $J_2'(\mu) = 0$. Доказать, что если $m \neq n$, то

$$\int\limits_0^1 r J_2(\mu_n r) J_2(\mu_m r)\, dr = 0.$$

<u>*Указание.*</u> Воспользуйтесь результатом задачи 5.

II. Интегральные уравнения

5. <u>5.21</u>; <u>5.22(5)</u>; 5.23(2); <u>5.24(2)</u>.

6. Найти характеристические числа и собственные функции ядра и решить при всех допустимых значениях λ, a, b уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (|y| \sin |x| + |x| y) \varphi(y)\, dy + a|x| + bx.$$

7. Найти решение уравнения

$$\varphi(x) = \lambda \int\limits_{-1}^{1} \left(x e^{-x^2} \cos^3 t + \frac{1 - \cos x}{x} e^{t^2} \right) \varphi(t)\, dt + f(x).$$

При каких $f(x) \in C[-1;1]$ и λ решение существует? Каково множество характеристических чисел сопряженного ядра?

<u>**8.**</u> Найти характеристические числа, собственные функции, а также то значение параметра α, при котором интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int\limits_{|y|<1} \left(6|x|^2 - 2|y|^2\right) \varphi(y) dy + |x|^2 + \alpha,$$

$$|x| < 1, \quad x = (x_1,x_2), \quad y = (y_1,y_2)$$

разрешимо для любых λ. Найти решения при этом значении α.

9. 5.30; <u>5.36(2)</u>; 5.39*.

ВТОРОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 12–17 мая)

I. Задача Штурма–Лиувилля

1. 15.4(8); <u>15.6(3)</u>; <u>15.14(6,7)</u>; 15.16.

2. Свести к интегральному уравнению задачи:

а) $e^{2x}(y'' - 4y' + 3y) = \lambda y$, $0 < x < \ln 2$, $y'(0) - y(0) = 0$,$y'(\ln 2) = 0$;

б) $-(x+1)^2 y'' - 3(x+1)y' = \lambda y + f(x)$, $0 < x < 1$, $y'(0) = \alpha y(0)$, $y'(1) = 0$, где $\alpha \geqslant 0$, f — непрерывная на отрезке [0;1] функция.

II. Уравнения Лапласа и Пуассона в круговых областях. Метод Фурье

3. Решить краевые задачи:

а) 16.1 (3); 16.2 (3).

б) $\Delta u = 12x$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $1 < r < 2$;
$u|_{r=1} = 2\cos^3\varphi + 1 - \sin\varphi\cos\varphi$;
$u|_{r=2} = 16\cos^3\varphi - 4\sin\varphi\cos\varphi$.

в) $\Delta u = 12r^2 \sin 2\varphi$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $1 < r < 2$;
$u_r|_{r=1} = 4\sin 4\varphi + 24\cos 3\varphi + 4\sin 2\varphi$;
$u|_{r=2} = 16\sin 4\varphi - \cos 3\varphi + 16\sin 2\varphi - 2$.

4. а) В круге $r < 2$ исследовать, при каких α задача Неймана

$$\Delta u = y, \quad u_r|_{r=2} = \sin^3\varphi + \alpha\cos^2\varphi.$$

имеет решение, и найти это решение.

б) $\Delta u = \dfrac{3y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $1 < r = \sqrt{x^2 + y^2} < 2$;
$u|_{r=1} = -3\sin\varphi - 8\cos\left(2\varphi + \dfrac{\pi}{6}\right)$;
$u_r|_{r=2} = 2\cos\left(2\varphi + \dfrac{\pi}{6}\right)$.

III. Сферические функции

5. 16.20(2); 16.21(5); 16.22(2); 16.24(7); 16.25(1); 16.26(1); 16.18*.

IV. Функция Грина задачи Дирихле

6. 17.1(1,2); 17.2(2); 17.4(1); 17.11*(1,3); 17.12(2); 17.14(4).

V. Потенциалы

7. 18.6(1); 18.16; 18.18(4); 18.19(1); 18.20; 18.22(2); 18.43**.

Указание к 18.43. Решение лучше искать в виде суммы потенциалов простого и двойного слоя.

Задания составила С.И. Колесникова, ст. преподаватель