УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
Д.А. Зубцов
10 декабря 2013 г.

ПРОГРАММА И ЗАДАНИЯ

по дисциплине:	**УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ**
по направлению	010900 «Прикладные математика и физика»
факультеты:	**ФМХФ, ФИВТ, ФБМФ**
кафедра:	**высшей математики**
курс:	III
Трудоёмкость:	обязательная часть — 4 зач. ед., вариативная часть— 1 зач. ед., дополнительная за сложность — 1 зач. ед.
семестр:	6
лекции:	51 час
практические (семинарские) занятия:	51 час
лабораторные занятия:	нет
ВСЕГО ЧАСОВ	— 102

Экзамен — 6 семестр

Самостоятельная работа — 2 часа в неделю

Программу составила

Т.В. Михайлова, к.ф.-м.н., доцент

Программа принята на заседании кафедры
высшей математики 23 ноября 2013 г.

Заведующий кафедрой Е.С. Половинкин

1. Классификация дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка. Понятие характеристики.
2. Волновое уравнение в случае одной пространственной переменной. Постановка задачи Коши (в частности, локализованной задачи Коши), формула Даламбера. Область зависимости решения задачи Коши. Непрерывная зависимость решения от начальных функций. Пример отсутствия непрерывной зависимости в случае уравнения Лапласа (пример Адамара).

   Волновое уравнение в случае двух и трёх пространственных переменных. Плоские характеристики волнового уравнения, световой конус. Постановка задачи Коши; единственность решения. Существование решения задачи Коши для волнового уравнения в случае трёх пространственных переменных (формула Кирхгофа). Существование решения задачи Коши для волнового уравнения в случае двух пространственных переменных (формула Пуассона, метод спуска).

   Распространение волн в случае двух и трёх пространственных переменных. О диффузии волн. Непрерывная зависимость решения от начальных функций.
3. Задача Коши для уравнения теплопроводности. Фундаментальное решение уравнения теплопроводности. Классы единственности решений. Существование решения, формула Пуассона. Бесконечная дифференцируемость решения. Непрерывная зависимость решения от начальной функции. Отсутствие непрерывной зависимости решения для случая «обратной» теплопроводности. Принцип максимума для решения задачи Коши.
4. Смешанная задача для волнового уравнения и для уравнения теплопроводности в случае одной пространственной переменной. Единственность решения (метод интеграла энергии в случае волнового уравнения; принцип максимума в случае уравнения теплопроводности). Необходимые условия разрешимости задачи (в частности, условия согласования начальных и граничных функций).

   Метод Фурье решения смешанной задачи. Обоснование метода Фурье.
5. Гармонические функции. Фундаментальное решение уравнения Лапласа. Потенциалы. Формулы Грина. Бесконечная дифференцируемость гармонических функций. Теоремы о среднем. Принцип максимума. Теорема Лиувилля. Теорема об устране-

нии особенности.

6. Задача Дирихле для уравнения Пуассона в ограниченной области. Необходимые условия разрешимости. Единственность решения; непрерывная зависимость решения от граничной функции.

   Существование решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона в шаре.

7. Задача Неймана для уравнения Пуассона в ограниченной области. Необходимое условие разрешимости задачи Неймана.

   Теорема об общем виде решения. Существование решения задачи Неймана для уравнения Пуассона в шаре.

8. Область внешнего типа. Краевые задачи для уравнения Лапласа в областях внешнего типа.

Литература

1. *Михайлов В.П.* Лекции по уравнениям математической физики. – М.: Физматлит, 2001.
2. *Михайлов В.П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. – 2-е изд. – М.: Наука, 1988.
3. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. – 4-е изд. – М.: Наука, 1981. – 512 с.
4. *Уроев В.М.* Уравнения математической физики. – М.: ИФ Яуза, 1998.
5. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1997.
6. *Олейник О.А.* Лекции об уравнениях с частными производными. – 2-е изд. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2005.
7. *Владимиров В.С., Вашарин А.А., Каримова Х.Х., Михайлов В.П., Сидоров Ю.В., Шабунин М.И.* Сборник задач по уравнениям математической физики. – 2-е изд. – М.: Наука, 1982.
8. *Михайлов В.П., Михайлова Т.В., Шабунин М.И.* Сборник типовых задач по курсу уравнения математической физики. – М.: МФТИ, 2007.

З А Д А Н И Я

Все номера задач указаны по книге [7].

ЗАМЕЧАНИЯ

1. Задачи с подчёркнутыми номерами рекомендовано разобрать на семинарских занятиях.
2. Задачи, отмеченные звёздочкой (*), являются необязательными.

ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 17–22 марта)

I. Классификация уравнений 2-го порядка, характеристики (см. [1, с. 31–35], [2, с. 17])

1. Определить тип уравнения и указать те множества плоскости (x,y), на которых он сохраняется:

а) $yu_{xx} + 2u_{xy} + xu_{yy} - u_y = 5x$;

б) $(x^2 + y^2 - 1)u_{xx} + xyu_{yy} - u_x = 0$.

2. Определить при различных вещественных значениях α и β тип уравнения

$$u_{xx} + 2\alpha u_{xz} + u_{yy} + 4\beta u_{yz} + 4u_{zz} = 0.$$

3. 2.1(3).

II. Приведение к каноническому виду уравнений 2-го порядка в случае двух независимых переменных в области (см. [3, с. 61–65])

2.11 (6).

1. Решить задачу Коши:

а) $y^3u_{xy} - yu_{yy} - 3y^5u_x + (2 + 3y^3)u_y = 0$, $y > 0$, $x \in \mathbb{R}^1$;
$u|_{y=1} = 1 + 3x$, $\quad u_y|_{y=1} = 3(4 + 3x)$, $x \in \mathbb{R}^1$.

б) $x^2u_{xx} - 9y^2u_{yy} + 3xu_x - 3yu_y = 0$, $x > 1$, $y > 1$;
$u|_{x=y} = y^{2/3}$, $u_x|_{x=y} = y^{-3} + y^{-1/3}$, $y > 1$.

в) $x^2u_{xx} - xyu_{xy} - 2y^2u_{yy} + xu_x - 2yu_y = 9xy^2$, $x > 0$, $y > 0$;
$u|_{x=1} = 3e^y$, $u_x|_{x=1} = -y^2$.

2. Решить задачу Гурса:

$$x^2u_{xx} - 4y^2u_{yy} + xu_x - 4yu_y = 0, \quad \frac{1}{x^2} < y < x^2, \quad x > 0;$$

$$u|_{y=\frac{1}{x^2}} = 1 + 2x^4, \quad u|_{y=x^2} = 2 + x^4.$$

3. Найти максимальную область плоскости (x,y), в которой решение задачи Коши: $u_{yy} - u_{xx} = 0$;
$u|_{y=0} = u_0(x)$, $u_y|_{y=0} = u_1(x)$, $0 < x < 1$ при $u_0(x) \in C^2(0;1)$, $u_1(x) \in C_1(0;1)$, существует и единственно.

III. Волновое уравнение (см. [1, с. 300–309], [2, с. 43–63])

1. Решить задачу Коши:

$$\begin{cases} 4u_{tt} = u_{xx} + 4t^2\cos 2x, & (t,x) \in \mathbb{R}^2, \\ u|_{t=0} = e^x,\ u_t|_{t=0} = x^2 & x \in \mathbb{R}^1. \end{cases}$$

2. Решить задачи Коши для уравнения
$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \qquad x \in \mathbb{R}^1, \quad t > 0$$
со следующими начальными условиями:
а) $u|_{t=0} = \varphi(x)$, $u_t|_{t=0} = 0$;
б) $u|_{t=0} = 0$, $u_t|_{t=0} = \psi(x)$,
где $\varphi(x) = \left(1 - \frac{|x|}{l}\right)\theta(l - |x|)$, $\psi(x) = \theta(l - |x|)$,
$l = \text{const} > 0$, $\theta(x) = \begin{cases} 1, & x \geqslant 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$

Построить в каждом из случаев графики решений в моменты времени
$$t = \frac{l}{2a}, \qquad t = \frac{l}{a}, \qquad t = \frac{2l}{a}.$$

3. Решить смешанную задачу на полуоси:
а) 21.2, 21.19;
б) $u_{tt} = u_{xx} + xe^t, \quad x > 0, \quad t > 0;$
$u|_{t=0} = 1 + x, \quad u_t|_{t=0} = 4 - 5x, \quad x \geqslant 0;$
$(2u + u_x)|_{x=0} = (1 + t)e^t + 2 + t - 3t^2$, $t \geqslant 0$;
в) $u_{tt} = 4u_{xx} - x\cos t$, $x > 0$, $t > 0$;
$u|_{t=0} = x^2 + x$, $u_t|_{t=0} = -4x$, $x \geqslant 0$;
$(u - u_x)|_{x=0} = 4t - \cos t$, $t \geqslant 0$.

4. Решить задачу Коши:
а) 12.37(5), 12.38(7);
б) $u_{tt} = \Delta u + (x^2 + y^2)\sin t$, $t > 0$, $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$;
$u|_{t=0} = 0$, $u_t|_{t=0} = (x^2 + y^2 + z^2)^{5/2} - y^2$, $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$;
в) $u_{tt} = 8\Delta u + x$, $t > 0$, $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$;
$u|_{t=0} = e^{y-z}$, $u_t|_{t=0} = x^2 + y^2 + z^2$, $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.
г) $u_{tt} = \Delta u - 81(t + 1)^2 \operatorname{sh}(2x - 2y + z)$, $t > 0$, $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$;
$u|_{t=0} = (2x + y - z)\cos y$, $u_t|_{t=0} = x^2 - y^2 + z^2$, $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

5. Найти решение задачи Коши:
$u_{tt} = a^2 \Delta u$, $t > 0$, $x = (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3$;
$u|_{t=0} = u_0(x) = \alpha(r)$, $u_t|_{t=0} = u_1(x) = \beta(r)$, $x \in \mathbb{R}^3$;
$u_0(x) \in C^3(\mathbb{R}^3)$, $u_1(x) \in C^2(\mathbb{R}^3)$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Указание. Искать решение в виде $u(x,t) = \frac{v(r,t)}{r}$.

ВТОРОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 12–17 мая)

I. Задача Коши для уравнения теплопроводности (см. [1, с. 376–380]; [2, с. 28–42])

1. Решить задачи Коши

а) $u_t = \Delta u + e^{-9t}\cos(2x - y + 2z), \quad t > 0, \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3;$
$u|_{t=0} = xy^2z^3 + \cos y \cdot \sin(x + y + z),\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$

б) $u_t = \frac{1}{4}\Delta u + t^4(x + 1), \quad t > 0, \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3;$
$u|_{t=0} = e^{2z-z^2} \cdot \sin(x + y), \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3;$

в) 13.5(5,7), 13.6(3).

2* Пусть $u(x,t)$, $x \in \mathbb{R}^1$, $t \geqslant 0$ — ограниченное решение задачи Коши

$$u_t - u_{xx} = 0, \quad x \in \mathbb{R}^1, \quad t > 0.$$
$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^1,$$

где $u_0(x) \in C(\mathbb{R}^1)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} u_0(x) = A$, $\lim\limits_{x\to+\infty} u_0(x) = B$. Найти $\lim\limits_{t\to+\infty} u(x,t)$ при каждом $x \in \mathbb{R}^1$.

II. Смешанная задача с начальными условиями на отрезке. Метод Фурье (см. [4, с. 464–470], [6, с. 157–167], [5, с. 140–156])

1. 20.40(1); 20.14(3); 20.3(3).

2. Решить смешанные задачи:

а) $u_{tt} = u_{xx} - 2\cos 3t,\ t > 0,\ 0 < x < \pi;$
$u_x|_{x=0} = 0,\ u_x|_{x=\pi} = 2\pi\cos 3t,\ t \geqslant 0;$
$u|_{t=0} = x^2,\ u_t|_{t=0} = 0,\ 0 \leqslant x \leqslant \pi;$

б) $u_t = u_{xx} + e^{-9t}(2\pi x + 1 - 9t),\ 0 < x < \frac{\pi}{2},\ t > 0;$
$u|_{x=0} = te^{-9t},\ u_x|_{x=\frac{\pi}{2}} = \pi,\ t > 0;$
$u|_{t=0} = \pi x - \sin x,\ 0 < x < \frac{\pi}{2};$

в) $u_{tt} - 4u_{xx} = 2x + 4\cos 2t \cdot \sin x,\ t > 0,\ 0 < x < \pi;$
$u|_{x=0} = \pi,\ u|_{x=\pi} = \pi t^2,\ t \geqslant 0;$
$u|_{t=0} = (\pi - x)(\frac{\pi}{2}x + 1),\ u_t|_{t=0} = 4\sin 2x,\ 0 \leqslant x \leqslant \pi.$

III. Метод Фурье решения задач в прямоугольной области (см. [5, с. 468–479]; [4, с. 250–254])

20.18; 20.19; 20.48.

IV. Краевые задачи для уравнения Пуассона в круге и кольце, шаре и шаровом слое (см. [1, с. 38, с. 266])

Решить краевые задачи в $\mathbb{R}^2$ ($x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$): 16.1 (3) (Решить и внешнюю задачу Дирихле с тем же граничным условием.).

<u>**1.**</u> $\Delta u = 1,\ \ r < 2;\quad u_r|_{r=2} = 2\sin\left(\varphi + \frac{\pi}{3}\right) + 1.$

<u>**2.**</u> $\Delta u = \frac{18}{r^3}\sin 2\varphi,\quad \frac{1}{2} < r < 1,$

$u_r|_{r=1/2} = 28\sin^2\varphi,\quad u_r|_{r=1} = 4\cos^2\varphi + 5.$

3. $\Delta u = -\frac{9}{r^2}\cos 3\varphi,\quad r > 1;\quad (u - u_r)|_{r=1} = \cos^3\varphi.$

4. Исследовать, при каком α задача Неймана

$$\Delta u = y,\quad r < 2,\quad r = \sqrt{x^2 + y^2},$$
$$u_r|_{r=2} = \sin^3\varphi + \alpha\cos^2\varphi.$$

имеет решение и найти это решение.

5. Решить краевую задачу в $\mathbb{R}^3$ ($x = r\cos\varphi\sin\theta$, $y = r\sin\varphi\sin\theta$, $z = r\cos\theta$):

$$\Delta u = \frac{1}{r^4},\quad r > 2,\quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$
$$(u - u_r)|_{r=2} = \sin\theta \cdot \cos^2\frac{\theta}{2} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6} - \varphi\right)$$

16.20(3); 16.21(4); 16.22(2); 16.25(1).

Задания составила Т.В. Михайлова, к.ф.-м.н., доцент