УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
Д.А. Зубцов
10 декабря 2013 г.

ПРОГРАММА И ЗАДАНИЯ

по дисциплине:	**Уравнения математической физики**
по направлению	010900 «Прикладные математика и физика»
факультет:	**ФОПФ**
кафедра:	**высшей математики**
курс:	III
Трудоёмкость:	обязательная часть — 2 зач. ед., вариативная часть— 1 зач. ед., дополнительная за сложность — 1 зач. ед.
семестр:	6
лекции:	34 часа
практические (семинарские) занятия:	34 часа
лабораторные занятия:	нет
ВСЕГО ЧАСОВ	— 68

Экзамен — 6 семестр

Самостоятельная работа — 1 час в неделю

Программу составил

В.П. Михайлов, д.ф.-м.н., профессор

Программа принята на заседании кафедры
высшей математики 23 ноября 2013 г.

Заведующий кафедрой Е.С. Половинкин

П Р О Г Р А М М А
(повышенный уровень)

1. Решение первой смешанной задачи для гиперболического уравнения (обоснование метода Фурье).
2. Теорема о единственности решения первой смешанной задачи для гиперболического уравнения и теорема о непрерывной зависимости решения от начальных функций.
3. Решение первой смешанной задачи для параболического уравнения (обоснование метода Фурье).
4. Теорема единственности решения первой смешанной задачи для параболического уравнения и теорема о непрерывной зависимости решения от начальной и граничных функций.
5. Вариационный метод решения внутренней задачи Дирихле для уравнения Лапласа.
6. Внешняя задача Дирихле для уравнения Лапласа.
7. Теоремы Фредгольма для интегрального уравнения с вырожденным ядром.

Литература

Основная

1. *Михайлов В.П.* Лекции по уравнениям математической физики. – М.: Физматлит, 2001.
2. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. – 5-е изд. – М.: Наука, 1988.
3. *Владимиров В.С., Вашарин А.А., Каримова Х.Х., Михайлов В.П., Сидоров Ю.В., Шабунин М.И.* Сборник задач по уравнениям математической физики. – М.: Физматлит, 2004, 4-е изд., стереотип.
4. *Михайлов В.П., Михайлова Т.В., Шабунин М.И.* Сборник типовых задач по курсу уравнения математической физики. – М.: МФТИ, 2007.

Дополнительная

5. *Михайлов В.П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. – 2-е изд. – М.: Наука, 1988.
6. *Уроев В.М.* Уравнения математической физики. – М.: ИФ Яуза, 1998.
7. *Ильин А.М.* Уравнения математической физики. – М.: Физматлит, 2009.
8. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. – М.: Изд-во МГУ, 2004.
9. *Олейник О.А.* Лекции об уравнениях с частными производными. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2007.

З А Д А Н И Я

Все номера задач указаны по книге [3].

ЗАМЕЧАНИЯ

1. Задачи с подчёркнутыми номерами рекомендовано разобрать на семинарских занятиях.
2. Задачи, отмеченные звёздочкой (*), являются необязательными.

ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 17–22 марта)

I. Смешанная задача с начальными условиями на отрезке. Метод Фурье (см. [4], с. 464–470; [6], с. 157–167; [5], с. 140–156, с. 544–553)

20.40 (1), 20.14 (3), 20.3 (3).

Решить смешанные задачи:

1.
$$u_{tt} + 4u = u_{xx} + 4t^2x + 8t, \qquad 0 < x < 1, \quad t > 0;$$
$$u_x|_{x=0} = u_x|_{x=1} = t^2, \quad t > 0;$$
$$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 2, \quad 0 < x < 1.$$

2.
$$u_t = u_{xx}, \quad 0 < x < \pi,\ t > 0, \quad u|_{t=0} = x^2, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi;$$
$$u_x|_{x=0} = 0, \quad u_x|_{x=\pi} = 2\pi e^{-t}, \quad t > 0.$$

3.
$$4u_t = u_{xx} + u + 4x - t + \frac{8t}{\pi^2}\cos\frac{\pi x}{2}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0;$$
$$u|_{t=0} = -\cos\frac{3\pi x}{2}, \quad 0 < x < 1;$$
$$u_x|_{x=0} = t, \quad u|_{x=1} = t, \quad t > 0.$$

II. Метод Фурье с применением функций Бесселя

20.20(2); 20.49(2); 20.33.

Решить следующие задачи, считая, что $f(r)$ и $g(r)$ — гладкие функции на рассматриваемых отрезках, r, φ — полярные координаты:

1.
$$u_t = 9\Delta u + e^{-2t} J_1\left(\frac{\mu_3^{(1)}}{2} r\right)\sin\left(\varphi - \tfrac{\pi}{4}\right),\ r < 2,\ t > 0,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi;$$
$$u|_{t=0} = f(r)\sin\varphi, \quad r \leqslant 2,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi;$$
$$u|_{r=2} = 0, \quad t \geqslant 2,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,$$

где $f(r) \in C^1[0,2]$, $f(2) = 0$, $\mu_3^{(1)}$ — положительный нуль функции Бесселя $J_1(\xi)$.

2. $$2u_{tt} = \Delta u + f(r)\sin 3\varphi\cos\varphi, \quad r<1, \quad t>0;$$
$$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad u|_{r=1} = 0.$$

3. Найти все решения волнового уравнения
$$\frac{1}{a^2}u_{tt} - \Delta u = 0, \quad x \in \mathbb{R}_n, \quad t \in \mathbb{R}_1,$$
имеющие вид $e^{i\omega t}v(r)$, $r = |x|$, где ω — вещественное число, $\omega \neq 0$. Рассмотреть случаи $n = 2$ и $n = 3$.

4. Пусть $0 < \mu_1 < \mu_2 < \ldots$ — последовательные корни уравнения $J_2'(\mu) = 0$. Доказать, что если $m \not\equiv n$, то
$$\int_0^1 rJ_2(\mu_n r)J_2(\mu_m r)\,dr = 0.$$

III. Метод Фурье решения задач в прямоугольной области (см. [5], с. 468–479; [4], с. 250–254)

20.18, 20.19, 20.48.

ВТОРОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 12–17 мая)

I. Компактность (в смысле равномерной сходимости) множеств функций

(Теорема Арчела предполагается известной)

1. Показать, что множество функций $M = \{\varphi_\alpha(x) = f(x,\alpha),\ 0 \leqslant x \leqslant 1,\ \alpha \geqslant 0\}$, где $f(x,y)$ непрерывна и ограничена на $\{0 \leqslant x \leqslant 1,\ y \geqslant 0\}$, вообще говоря, некомпактно. Если же дополнительно и функция $f_x(x,y)$ непрерывна и ограничена на $\{0 \leqslant x \leqslant 1, y \geqslant 0\}$, то множество M — компактно.

2. Показать, что множество функций
$$\mathfrak{M} = \{f(x) \in C^1[0,1] : \int_0^1 [f^2(x) + (f'(x))^2]dx \leqslant 2011\}$$
компактно (частный случай «теоремы вложения» Соболева).

3. Пусть $u(x,t)$, $x \in \mathbb{R}_1$, $t \geqslant 0$, — ограниченное в $\{x \in \mathbb{R}_1,\ t \geqslant 0\}$ решение задачи Коши

а) для уравнения теплопроводности $u_t - u_{xx} = 0$, $x \in \mathbb{R}_1$, $t > 0$, или

б) для волнового уравнения $u_{tt} - u_{xx} = 0$, $x \in \mathbb{R}_1$, $t > 0$.

Показать, что множество $M = \{\varphi_\alpha(x) = u(x,\alpha),\ 0 \leqslant x \leqslant 1,\ \alpha \geqslant 1\}$ в случае а) компактно, а в случае б), вообще говоря, некомпактно.

II. Элементы вариационных методов решения краевых задач

1. Показать, что для функций $u(x) \in C^1[0,1]$, для которых $u(0) = 0$ и $\int_0^1 u^2\,dx = 1$, имеет место неравенство

$$\int_0^1 (u'(x))^2\,dx + u^2(1) \geqslant \frac{\pi^2}{4}.$$

2. Найти

$$\inf_{\substack{u\in \mathring{C}^1[0,1]\\ \|u\|=1}} \int_0^1 x^\sigma u'^2(x)\,dx,$$

где постоянная $\sigma > 2$, и показать, что эта точная нижняя грань недостижима.

3. Пусть функционал

$$J(u) = \int\limits_a^b (u'^2 + 2fu)\,dx + \sigma u^2(a) + \theta u^2(b) - 2\alpha u(a) - 2\beta u(b), \qquad u \in C^1[a,b], \quad (*)$$

где $f(x) \in C[a,b]$, $\sigma,\theta,\alpha,\beta$ — постоянные, $\sigma \geqslant 0$, $\theta \geqslant 0$, $\sigma + \theta > 0$, достигает своего минимального значения на функции $u_0(x)$. Показать, что $u_0(x) \in C^2[a,b]$ и является решением задачи

$$\begin{gathered} u_0'' = f(x), \quad x \in [a,b]; \\ -u_0'(a) + \sigma u(a) = \alpha; \quad u'(b) + \theta u(b) = \beta. \end{gathered} \qquad (**)$$

4. Доказать, что при сделанных в задаче 3 предположениях, задача $(**)$ имеет решение, и это решение доставляет минимум функционалу $(*)$.

5. На множестве функций $M_\varphi = \{u \in C^1(\overline{Q}), u|_{\partial Q} = \varphi\}$ (Q — ограниченная область в $\mathbb{R}_3$ с гладкой границей, а $\varphi \in C(\partial Q)$) задан функционал

$$J(u) = \int_Q (|\nabla u|^2 + 2fu)dx,$$

где $f(x) \in C(\overline{Q})$. Пусть функция $u(x)$ реализует минимум функционала J и принадлежит $C^2(\overline{Q})$. Показать, что $u(x)$ есть решение задачи Дирихле:

$$\Delta u = f, \quad x \in Q; \quad u|_{\partial Q} = \varphi.$$

6. Найти

$$\inf_{u \in H} \int\limits_{|x|<1} (|\nabla u|^2 + 16x_1 u)\, dx,$$

где $H = \{u(x) \in C^1(1 \leqslant |x| \leqslant 2),\, u|_{|x|=1} = x_1\}$, $x = (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$.

7. Пусть функционал

$$J(u) = \int\limits_{1<|x|<2} \Big(|\nabla u|^2 - 2f(x)u\Big)\, dx + \int\limits_{|x|=1} \sigma(x)u^2(x)\, ds -$$

$$-2\int\limits_{|x|=1} \alpha(x)u(x)\, ds - 2\int\limits_{|x|=2} \beta(x)u(x)\, ds, \quad u \in C^1(1 \leqslant |x| \leqslant 2),$$

где $f(x) \in C(1 \leqslant |x| \leqslant 2)$; $\sigma(x),\alpha(x) \in C(|x| = 1)$; $\beta(x) \in C(|x| = 2)$; $\sigma(x) > 0$, $|x| = 1$, достигает своего минимального значения на функции $u_0(x)$, принадлежащей $C^2(1 \leqslant |x| \leqslant 2)$.

Доказать, что $u_0(x)$ — решение задачи

$$\Delta u = f(x), \quad 1 < |x| < 2;$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \nu} + \sigma u\right)\bigg|_{|x|=1} = \alpha(x); \quad \frac{\partial u}{\partial \nu}\bigg|_{|x|=2} = \beta(x).$$

8. Показать, что для всех функций

$$u(x) \in C^1(1 \leqslant |x| \leqslant 2), \quad x = (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3,$$

удовлетворяющих граничному условию $u|_{|x|=1} = 0$, $u|_{|x|=2} = 1$, имеет место неравенство

$$\int\limits_{1<|x|<2} \left(|\nabla u|^2 - \frac{2u}{|x|}\right) dx \geqslant -\frac{\pi}{3}.$$

III. Интегральные уравнения

5.21; 5.24(1).

1. Найти характеристические числа, собственные функции и решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int\limits_{-\pi}^{\pi} (x \sin y + \cos y \cos x)\varphi(y)\, dy + ax + \cos x, \quad -\pi \leqslant x \leqslant \pi.$$

2. Найти решение уравнения

$$\varphi(x) = \lambda \int\limits_{-1}^{1} \left(xe^{-x^2} \cos^3 y + \frac{1 - \cos x}{x} e^{y^2} \right) \varphi(y)\, dy + f(x), \quad -1 \leqslant x \leqslant 1.$$

При каких $f(x) \in C[-1,1]$ и λ решение существует? Каково множество характеристических чисел сопряженного ядра?

3. Проиллюстрировать теоремы Фредгольма на примерах интегральных уравнений из задач 5.22(3); 5.28(2); 5.30; 5.36(1).

4. Показать, что однородное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-y)^2} \varphi(y)\, dy, \quad x \in \mathbb{R}^1,$$

имеет нетривиальные решения для всех $\lambda \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}$. Найти эти решения.

5. Найти условия на $f(x) \in C\left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$, при которых уравнение

$$u(x) = \lambda \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (|y| \sin |x| + y \cdot |x|) u(y)\, dy + f(x), \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],$$

разрешимо при всех λ.

IV. Функция Грина оператора Штурма–Лиувилля

15.1(2); 15.4(3); 15.16.

1. Свести к интегральному уравнению:

а) $(x^2 + 1)y'' + 2xy' - 2y + \lambda y = 0$, $0 < x < 1$;
$y'(0) = 0$, $y(1) - y'(1) = 0$.

б) $-(x + 2)^2 y'' + (x + 2)y' = \lambda y + f(x)$, $-1 < x < 0$,
$y'(-1) = 0$, $y'(0) + \alpha y(0) = 0$, где $\alpha \geqslant 0$, $f(x) \in C[-1; 0]$.

Задания составила Т.В. Михайлова, к.ф.-м.н., доцент