УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
Д.А. Зубцов
10 декабря 2013 г.

ПРОГРАММА И ЗАДАНИЯ

по дисциплине:	**Уравнения математической физики**
по направлению	010900 «Прикладные математика и физика»
факультет:	**ФРТК**
кафедра:	**высшей математики**
курс:	III
Трудоёмкость:	обязательная часть — 4 зач. ед., вариативная часть— 1 зач. ед., дополнительная за сложность — 1 зач. ед.
семестр:	6
лекции:	51 час
практические (семинарские) занятия:	51 час
лабораторные занятия:	нет
ВСЕГО ЧАСОВ	— 102

Экзамен — 6 семестр

Самостоятельная работа — 2 часа в неделю

Программу составил

М.Е. Боговский, к.ф.-м.н., доцент

Программа принята на заседании кафедры
высшей математики 23 ноября 2013 г.

Заведующий кафедрой Е.С. Половинкин

1. Постановка задачи математической физики. Вывод уравнения теплопроводности и формулировки основных начально-краевых задач для уравнения теплопроводности. Классификация и приведение к каноническому виду уравнений второго порядка с вещественными переменными коэффициентами в случае двух независимых переменных. Классификация и приведение к каноническому виду уравнений второго порядка с вещественными постоянными коэффициентами в случае $n \geqslant 3$ независимых переменных.
2. Задача Коши для волнового уравнения в случае одной пространственной переменной. Принцип Дюамеля. Формула Даламбера. Область зависимости. Область единственности. Непрерывная зависимость решения от данных задачи. Понятие корректности постановки задачи математической физики (по Адамару). Примеры корректно поставленных задач. Пример Адамара некорректно поставленной задачи Коши (для уравнения Лапласа).
3. Начально-краевая задача для однородного волнового уравнения на полуоси. Представление решения. Условия согласования начальных и граничных данных. Непрерывная зависимость решения от данных задачи. Задача Коши для волнового уравнения в случае трёх пространственных переменных. Принцип Дюамеля. Формула Кирхгофа (без доказательства). Область зависимости. Область единственности. Принцип Гюйгенса. Задача Коши для волнового уравнения в случае двух пространственных переменных. Принцип Дюамеля. Формула Пуассона (без доказательства). Область зависимости. Область единственности. Диффузия волн. Понятие обобщённого (слабого) решения задачи Коши для волнового уравнения. Разрывные ре-

шения. Распространение особенностей.

4. Задача Коши для уравнения теплопроводности. Вывод формулы Пуассона с помощью преобразования Фурье. Принцип Дюамеля. Условие на бесконечности по пространственным переменным и класс единственности растущих решений. Принцип максимума для уравнения теплопроводности в ограниченной области. Единственность классического решения первой начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности в ограниченной области. Непрерывная зависимость решения от начальных и граничных данных.
5. Свойства собственных чисел и собственных функций вещественного симметричного обыкновенного дифференциального оператора второго порядка с однородными краевыми условиями Дирихле или Неймана. Знакоопределённость оператора. Формулы Грина для оператора Лапласа. Симметричность и знакоопределённость оператора Лапласа с однородными краевыми условиями Дирихле или Неймана. Свойства собственных чисел и собственных функций оператора Лапласа.
6. Метод Фурье решения начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности на конечном отрезке. Условия согласования начальных и граничных данных. Сходимость рядов Фурье. Теорема существования и единственности классического решения первой начально-краевой задачи для однородного уравнения теплопроводности на конечном отрезке. Метод Фурье решения начально-краевой задачи для волнового уравнения на конечном отрезке. Условия согласования начальных и граничных данных. Сходимость рядов Фурье.
7. Гармонические функции. Слабый принцип максимума для гармонических функций в ограниченной области. Следствия.

Строгий принцип максимума для гармонических функций (без доказательства). Следствия. Задача Дирихле для уравнения Пуассона. Единственность классического решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона в ограниченной области. Непрерывная зависимость решения от граничных данных.

8. Метод Фурье решения краевых задач для уравнений Лапласа в полосе и полуполосе. Условия на бесконечности и классы единственности решений. Метод Фурье решения задачи Неймана для уравнения Лапласа в круге. Необходимое условие разрешимости. Неединственность классического решения задачи Неймана с точностью до аддитивной постоянной. Метод Фурье решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа в круге и во внешности круга. Условия на бесконечности и класс единственности решений. Преобразование Кельвина. Теорема об устранимой особенности для гармонических функций.
9. Представление решений уравнения Пуассона через потенциалы простого и двойного слоя. Теорема о среднем по сфере для гармонических функций. Теорема о среднем по шару для гармонических функций. Понятие обобщённого (слабого) решения краевой задачи для уравнения Пуассона. Проверка корректности определения обобщённого (слабого) решения. Примеры.

Литература

1. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. – 5-е изд. – М.: Наука, 1988.
2. *Михайлов В.П.* Лекции по уравнениям математической физики. – М.: Физматлит, 2001.
3. *Михайлов В.П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. – 2-е изд. – М.: Наука, 1988.
4. *Олейник О.А.* Лекции об уравнениях с частными производными. – 2-е изд. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2005.
5. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1997.

6. *Уроев В.М.* Уравнения математической физики. – М.: ИФ Яуза, 1998.

З А Д А Н И Я

Литература

Все номера задач указаны по книге: *Владимиров В.С., Вашарин А.А., Каримова Х.Х., Михайлов В.П., Сидоров Ю.В., Шабунин М.И.* Сборник задач по уравнениям математической физики. – 4-е изд., стереотип. – М.: Физматлит, 2003.

ЗАМЕЧАНИЯ

1. Задачи с подчёркнутыми номерами рекомендовано разобрать на семинарских занятиях.
2. Задачи, отмеченные звёздочкой (*), являются необязательными.

ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 17–22 марта)

I. Классификация уравнений 2-го порядка, приведение к каноническому виду

1. Определите тип уравнения $u_{xx} + 2\alpha u_{xy} + u_{yy} + 4\beta u_{yz} + 4u_{zz} = 0$ при различных вещественных значениях α и β ($\alpha,\beta = \mathrm{const}$),

2. 2.1(2).

3. Определите тип уравнения и укажите те множества плоскости (x,y), на которых он сохраняется:

а) $yu_{xx} + 2u_{xy} + xu_{yy} - u_y^2 = 5x$;

б) $(x^2 + y^2 - 1)u_{xx} + xyu_{yy} - u_x = 0$.

II. Уравнения гиперболического типа в случае двух независимых переменных. Метод характеристик

4. Найдите общие решения уравнений

а) $u_{xy} + \alpha u_x + \beta u_y + \alpha\beta u = 0, \quad \alpha,\beta = \mathrm{const}$;

б) 2.3(7); 2.11(4).

5. Решите задачи Коши и укажите наибольшую область, в которой решение определено однозначно:

а) 12.3; 12.15 (рассмотрите при $0 < y < 2$);

б) $yu_{xx} + (x - y)u_{xy} - xu_{yy} - u_x + u_y = 0$,
$u|_{y=0} = 2x^2, \quad u_y|_{y=0} = 2x, \quad 1 < x < 4$;

в) $x^2u_{xx} - xyu_{xy} - 2y^2u_{yy} + xu_x - 2yu_y = 9xy^2$,
$u|_{x=1} = 3e^y, \quad u_x|_{x=1} = -y^2, \quad 1 < y < 3$;

г) $x^2u_{xx} - 4y^2u_{yy} + xu_x - 4yu_y = 16x^4$,
$u|_{y=1} = 3x^4, \quad u_y|_{y=1} = 0, \quad 1 < x < 2$;

д)* $yu_{xx} + (1 + y)u_{xy} + u_{yy} + \dfrac{(u_x + u_y)}{(1 - y)} = 0, \quad y < 1$,
$u|_{y=0} = x^2 + 2x, \quad u_y|_{y=0} = -2x, \quad 0 < x < \dfrac{3}{2}$.
Принадлежит ли точка с координатами $\left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{3}{4}\right)$ области, в которой решение задачи определено однозначно?

6. Решите задачи Гурса:

а) 14.38;

б) $x^2u_{xx} - 4y^2u_{yy} + xu_x - 4yu_y = 0, \quad \dfrac{1}{x^2} < y < x^2, \quad x > 0$,
$u\Big|_{y=\frac{1}{x^2}} = 1 + 2x^4, \quad u|_{y=x^2} = 2 + x^4$,
определите максимальную область, в которой решение единственно.

7. Решите задачу

$$u_{yy} - 4u_{xx} = 0,$$
$$u|_{y=0} = x^2, \quad u_y|_{y=0} = 0, \quad -2 < x \leqslant 0,$$
$$u|_{y=x} = 5x^2 + 3x^3, \quad 0 \leqslant x < 1.$$

и определите максимальную область на плоскости, в которой решение единственно.

III. Волновое уравнение в $\mathbb{R}^1$

8. Решите задачу Коши:

$$4u_{tt} = u_{xx} + 4t^2 \cos 2x, \quad (t,x) \in \mathbb{R}^2,$$
$$u|_{t=0} = e^x, \quad u_t|_{t=0} = x^2, \quad x \in \mathbb{R}^1.$$

9. Решите задачи Коши а) и б) и постройте графики решений в моменты времени $t = \dfrac{l}{2a}$, $t = \dfrac{l}{a}$, $t = \dfrac{2l}{a}$ $(l = \mathrm{const},\ l > 0)$.

а) $u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^1,$

$u|_{t=0} = \left(1 - \dfrac{|x|}{l}\right)\theta(l - |x|), \quad u_t|_{t=0} = 0;$

б) $u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^1,$

$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = \theta(l - |x|), \quad l > 0.$

10. Решить смешанные задачи на полуоси:

а) 21.4; 21.15; 21.18; 21.21;

б) $u_{tt} = 4u_{xx} - x\cos t, \quad t > 0, \quad x > 0,$

$u|_{t=0} = x^2 + x, \quad u_t|_{t=0} = -4x, \quad x \geqslant 0,$

$(u - u_x)|_{x=0} = 4t - \cos t, \quad t \geqslant 0;$

в) $4u_{tt} = u_{xx} - 4te^{2x}, \quad t > 0, \quad x > 0,$

$u|_{t=0} = 2 + e^{2x}, \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad x \geqslant 0,$

$(u_x + 2u)|_{x=0} = 8, \quad t \geqslant 0;$

г) $u_{tt} = u_{xx}, \quad t > 0, \quad x > 0,$

$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = 0, \quad x \geqslant 0,$

$u|_{x=0} = 0, \quad t \geqslant 0,$

$$\varphi(x) = \begin{cases} 2(x-1) & \text{при } x \in [1,2], \\ (4 - x) & \text{при } x \in [2,4], \\ 0 & \text{при } x \geqslant 0,\ x \notin [1,4]. \end{cases}$$

Постройте графики решений $u = u(t,x)$ в моменты времени $t = 1, \quad t = 2, \quad t = 3.$

IV. Задачи Коши для волнового уравнения в $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$

11. 12.37(4,6); 12.38(2,8);

12. Решите задачи Коши

а) $u_{tt} = \dfrac{1}{5}\Delta u + 2t^2\cos(x + 2y), \quad t > 0,$

$(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad \Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz},$

$u|_{t=0} = yz^3, \quad u_t|_{t=0} = \dfrac{1}{1+(x-2z)^2}, \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3;$

б) $u_{tt} = 3\Delta u + 18e^{3t}\cos(x-y+z), \quad t>0, \quad (x,y,z)\in\mathbb{R}^3,$

$u|_{t=0} = xy^2z, \quad u_t|_{t=0} = 3\cos(x-y+z);$

в) $u_{tt} = \Delta u - 81(t+1)^2\operatorname{sh}(2x-2y+z), \quad t>0, \quad (x,y,z)\in\mathbb{R}^3,$

$u|_{t=0} = (2x+y-z)\cos y, \quad u_t|_{t=0} = x^2-y^2+z^2;$

г) $u_{tt} = \Delta u + \left(\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{y^2}{4} - \dfrac{z^2}{4}\right)\cos t, \quad (x,y,z)\in\mathbb{R}^3, \quad t>0,$

$u|_{t=0} = (x^2+y^2+z^2)\left(\sin\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3, \quad u_t|_{t=0} = ze^y.$

Указание. Решение задачи $u_{tt} = \Delta u$, $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, $t>0$; $u|_{t=0} = (x^2+y^2+z^2)\left(\sin\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3, \quad u_t|_{t=0} = 0$

искать в виде $u(t,r) = \dfrac{v(t,r)}{r}$.

д) $u_{tt} = \Delta u, \quad (x,y,z)\in\mathbb{R}^3, \quad \Delta u = u_{xx}+u_{yy}+u_{zz},$

$u|_{t=0} = e^{-x^2}(y^2-z^2), \quad u_t|_{t=0} = 0;$

13. Найдите $u(t,0,0,0)$, $t>0$, где $u(t,x,y,z)$ — решение задачи Коши

$$4u_{tt} = \Delta u, \quad t>0, \quad (x,y,z)\in\mathbb{R}^3,$$

$$u|_{t=0} = 0, \quad u_t|_{t=0} = \begin{cases} \ln(1+x^2+y^2+z^2), & (x,y,z)\in G, \\ 0, & (x,y,z)\in\mathbb{R}^3\setminus G, \end{cases}$$

$$G = \{x=(x,y,z): \quad y>0, \quad 0<x<z\}.$$

ВТОРОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 12–17 мая)

I. Задача Коши для уравнения теплопроводности в $\mathbb{R}^n$

1. Решите задачи Коши

а) $u_t = u_{xx} + \sin t, \quad t>0, \quad x\in\mathbb{R}^1,$

$u|_{t=0} = e^{-a^2x^2};$

б) 13.5(7); 13.2; 13.7(4);

в) $10u_t = \Delta u + 2x\cos(x+y), \ \ t>0, \ (x,y)\in\mathbb{R}^2,$

$u|_{t=0} = (3x+y)^3;$

г) $u_t = \Delta u + 27(t^2-1)\cos(x+y+z), \quad t>0, \quad (x,y,z)\in\mathbb{R}^3,$

$u|_{t=0} = (x-y+z)\sin z - (z-1)^3 e^{-(x-y)^2};$

д) $u_t = \Delta u + \dfrac{5x^2-12y^2+7z^2}{t^2+1}, \quad t>0, \quad (x,y,z)\in\mathbb{R}^3,$

$u|_{t=0} = 2x\, e^{-(x+y)^2}.$

е) $u_t = \Delta u + (x^2+y^2-2z^2)\cos t, \quad t>0, \quad (x,y,z)\in\mathbb{R}^3,$

$u|_{t=0} = x\cos(x+y).$

II. Метод Фурье. Смешанная задача с начальными условиями на отрезке

2. 20.40(1,6); 20.16(4,8); 20.46(4).

3. Решите смешанные задачи:

а) $u_{tt} = u_{xx} - u + t^2 + 2, \quad t>0, \quad 0<x<1,$

$u|_{t=0} = \sin 3\pi x, \quad u_t|_{t=0} = x, \quad t\geqslant 0,$

$u|_{x=0} = t^2, \quad u|_{x=1} = t+t^2, \quad x\in[0;1];$

б) $4u_{tt} = u_{xx} + u - x - \dfrac{3}{4}\cos\dfrac{x}{2}, \quad t>0, \quad 0<x<\pi;$

$u|_{t=0} = x + \cos\dfrac{x}{2}, \quad u_x|_{x=0} = 1, \quad u_t|_{t=0} = \pi - x, \quad t\geqslant 0,$

$u_x|_{x=0} = 1, \quad u|_{x=\pi} = \pi, \quad x\in[0;\pi];$

в) $u_t = u_{xx} - u + \dfrac{t(x^2-2)}{2\pi}, \quad t>0, \quad 0<x<\pi,$

$u|_{t=0} = \cos x, \quad t\geqslant 0,$

$u_x|_{x=0} = 0, \quad u_x|_{x=\pi} = t, \quad x\in[0;\pi];$

г) $u_t = u_{xx} + xe^t + e^{t-x}, \quad t>0, \quad 0<x<\pi,$

$u|_{t=0} = x + \cos x - \sin x, \quad x\in[0;\pi],$

$(u+u_x)|_{x=0} = e^t, \quad (u+u_x)|_{x=\pi} = (1+\pi)e^t, \quad t\geqslant 0;$

д) 20.40(2).

III. Метод Фурье. Смешанная задача с начальными условиями в прямоугольнике

20.18; 20.19.

IV. Метод Фурье. Краевые задачи для эллиптических уравнений в полосе и полуполосе

4. Найти класс единственности и решить в этом классе краевую задачу:

а) $\Delta u = 3u - 3x - 3y - 6e^{|x|}\sin y, \quad -\infty < x < \infty, \quad 0 < y < \dfrac{\pi}{2},$
$u|_{y=0} = x, \quad u_y|_{y=\frac{\pi}{2}} = 1, \quad -\infty < x < \infty;$

б) $\Delta u = e^{-\frac{x}{2}}\cos\dfrac{y}{2}, \quad x > 0, \quad 0 < y < \pi,$
$u_y|_{y=0} = x, \quad u|_{y=\pi} = \pi x, \quad 0 \leqslant y \leqslant \pi,$
$u_x|_{x=0} = 3\cos\dfrac{3y}{2} - 5\cos\dfrac{5y}{2};$

в) $\Delta u = 2u + 2y - 2x^2y - 2e^{y-x}, \quad x > 0, \quad 0 < y < \pi,$
$(u_y - u)|_{y=0} = x^2, \quad (u_y - u)|_{y=\pi} = (1-\pi)x^2, \quad x \geqslant 0,$
$u|_{x=0} = \cos y + \sin y + 2\cos 2y + \sin 2y.$

V. Метод Фурье. Краевые задачи в круге и кольце

5. Решите краевые задачи в $\mathbb{R}^2$:

а) 16.1 (решите также и внешнюю задачу с тем же граничным условием);

б) $\Delta u = 16y, \quad 1 < r < 3,$
$u_r|_{r=1} = 84\cos 3\varphi + 4\sin\varphi, \quad u|_{r=3} 26\cos 3\varphi + 58\sin\varphi;$

в) $\Delta u = 12(x^2 - y^2), \quad 1 < r < 2,$
$u_r|_{r=1} = -6\cos 2\varphi + 16\sin 4\varphi, \quad u_r|_{r=2} = 28\dfrac{1}{2}\cos 2\varphi + \dfrac{1}{2}\sin 4\varphi;$

г) $\Delta u = \dfrac{64}{r^5}\sin\varphi, \quad 1 < r < 2,$
$u_r|_{r=1} = 2\cos^2\dfrac{\varphi}{2}, \quad u_r|_{r=2} = 2\sin^2\dfrac{\varphi}{2};$

д) $\Delta u = 12y^2 - 2, \quad r < 1,$
$(u_r + u)|_{r=1} = 5y^4;$

е) $\Delta u = -\dfrac{9}{r^2}\cos 3\varphi, \quad r > 1,$
$(u - u_r)|_{r=1} = \cos^3\varphi.$

6. Исследовать, при каких значениях α задача Неймана

$$\Delta u = y, \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2} < 2, \quad u_r|_{r=2} = \sin^3\varphi + \alpha\cos^3\varphi$$

разрешима. Найти это решение.

VI. Метод Фурье. Краевые задачи на шаре и шаровом слое. Сферические функции

7. 16.20(3); 16.21(1); 16.23(3); 16.25(1); 16.18*.

8. Решите краевые задачи для уравнения Пуассона:

а) $\Delta u = 6z,\ \ r<1,\ \ x = r\sin\theta\cos\varphi,\ \ y = r\sin\theta\sin\varphi,\ \ z = r\cos\theta,$

$u|_{r=1} = 2\sin^2\varphi\sin^2\theta + \cos^3\theta,$

<u>б)</u> $\Delta u = \dfrac{1}{r^4},\quad r > 2,$

$(u - u_r)|_{r=2} = \sin\theta\cos^2\dfrac{\theta}{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{6} - \varphi\right),\quad u(\infty) = 0.$

Задания составили: М.Е. Боговский, к.ф.-м.н., доцент,
С.И. Колесникова, ст. преподаватель