УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
Д.А. Зубцов
23 декабря 2013 г.

ПРОГРАММА И ЗАДАНИЯ

по дисциплине:	**Теория вероятностей**
по направлению	010900 «Прикладные математика и физика»
факультет:	**ФФКЭ**
кафедра:	**высшей математики**
курс:	II
Трудоёмкость:	обязательная часть — 2 зач. ед., вариативная часть— 1 зач. ед., дополнительная за сложность — 1 зач. ед.
семестр:	4
лекции:	34 часа — Дифзачет — 4 семестр
практические (семинарские) занятия:	34 часа
лабораторные занятия:	нет — Самостоятельная работа — 2 часа в неделю
ВСЕГО ЧАСОВ	— 68

Программу составил

А.В. Булинский, к.ф.-м.н., доцент

Программа принята на заседании кафедры
высшей математики 3 декабря 2013 г.

Заведующий кафедрой Е.С. Половинкин

1. Математические модели экспериментов со случайными исходами. Частотная интерпретация вероятности. Алгебры и σ-алгебры событий. Вероятностное пространство (аксиоматика Колмогорова).
2. Дискретные (конечные или счётные) вероятностные пространства. Классическое определение вероятности. Геометрическая вероятность. Мера Лебега.
3. Независимость событий. Условная вероятность. Формула полной вероятности. Формулы Байеса.
4. Схемы независимых испытаний (прямое произведение вероятностных пространств). Схема Бернулли.
5. Действительные случайные величины. Функция распределения и её свойства. Основные типы распределений (дискретные, абсолютно непрерывные, смешанные). Плотность распределения.
6. Примеры распределений (биномиальное, геометрическое, пуассоновское, равномерное, нормальное, экспоненциальное, χ-квадрат и др.).
7. Случайные векторы и их распределения. Независимость наборов случайных величин. Многомерное нормальное распределение.
8. Числовые характеристики случайных величин. Свойства математического ожидания и дисперсии. Моменты, ковариация, коэффициент корреляции. Понятие условного математического ожидания.
9. Виды сходимости последовательности случайных величин (по вероятности, почти наверное, в среднем квадратичном, по распределению).
10. Неравенство Чебышева. Закон больших чисел. Многочлены Бернштейна.
11. Усиленный закон больших чисел.
12. Теорема Пуассона. Оценка точности приближения.
13. Характеристические функции и их свойства.
14. Центральная предельная теорема.
15. Основные задачи математической статистики. Эмпирическая функция распределения. Теорема Гливенко–Кантелли. Критерий χ-квадрат.
16. Точечное оценивание параметров. Метод максимального правдоподобия. Доверительное оценивание (случай нормального закона).

17. Линейная регрессионная модель. Метод наименьших квадратов. Проверка статистических гипотез.
18*. Цепи Маркова. Эргодическая теорема.
19*. Понятие случайного процесса.

Знаком (*) отмечен необязательный материал.

Литература

1. *Ширяев А.Н.* Вероятность – 1. – 3-е изд. – М.: МЦНМО, 2004. – 520 с.
2. *Чистяков В.П.* Курс теории вероятностей. – 6-е изд. – СПб.: «Лань», 2003. – 272 с.
3. *Севастьянов Б.А.* Курс теории вероятностей и математической статистики. – 2-е изд. – М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004. – 272 с.
4. *Тутубалин В.Н.* Теория вероятностей и случайных процессов. – М.: Изд-во МГУ, 1992. – 400 с.
5. *Розанов Ю.А.* Теория вероятностей, случайные процессы и математическая статистика. – 2-е изд. – М.: Наука, 1989. – 320 с.
6. *Феллер В.М.* Введение в теорию вероятностей и её приложения. В 2-х томах / пер. с англ. Т. 1. – М.: Мир, 1984. – 528 с.
7. *Ивченко Г.И., Медведев Ю.И.* Математическая статистика. – М.: Высшая школа, 1984. – 248 с.
8. *Боровков А.А.* Теория вероятностей. – 3-е изд. – М.: Эдиториал УРСС, 1999. – 472 с.

З А Д А Н И Я

Литература

1. *Зубков А.М., Севастьянов Б.А., Чистяков В.П.* Сборник задач по теории вероятностей. – 2-е изд. – М.: Наука, 1989. – 320 с. (С.).
2. *Захаров В.К., Севастьянов Б.А., Чистяков В.П.* Теория вероятностей. – М.: Наука, 1983. – 160 с. (Т).

Задачи, отмеченные (*), являются необязательными.

ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 10–15 марта)

I. Алгебры событий

1. Среди студентов, пришедших на лекцию, наудачу выбирают одного. Пусть события A, B и C состоят соответственно в том, что выбранный человек:

а) юноша,

б) не курит,

в) живет в общежитии.

а) Описать событие $A \cap B \cap \overline{C}$.

б) При каком условии $A \cap B \cap C = A$?

в) Когда $\overline{C} \subseteq B$?

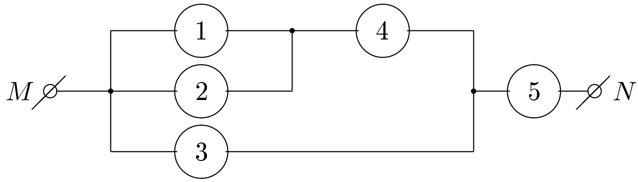
г) Когда $\overline{A} = B$? Справедливо ли это?

2. Для произвольных событий A, B проверить справедливость следующих соотношений:

$$\overline{\overline{A}} = A, \qquad A \subset B \Rightarrow \overline{B} \subset \overline{A}, \qquad A \backslash B = A \backslash AB = A\overline{B},$$

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}, (A \cup B)\overline{B} = A\overline{B} = A(A\overline{B}).$$

3. Электрическая цепь между точками M и N составлена по схеме:



Событие A_k — выход из строя (неисправность) k-го элемента. Записать выражения для следующих событий:

а) C и $\overline{C}$, если C — разрыв цепи;

б) нет неисправных элементов;

в) хотя бы один элемент вышел из строя;

г) только один элемент неисправен;

д) точно два элемента неисправны;

е) не более двух элементов вышли из строя;

ж) по крайней мере два элемента неисправны.

4. Пусть $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ — две алгебры (σ-алгебры) подмножеств Ω. Доказать, что $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$ — также алгебра (σ-алгебра). Верно ли это для $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$?

II. Пространство элементарных исходов. Классическое определение вероятности. Комбинаторика. Геометрическая вероятность

5. (С. 1.4.) Брошено три монеты. Предполагая, что элементарные события равновероятны, найти вероятности событий:

$$A = \{\text{первая монета выпала «гербом» вверх}\}$$

$$B = \{\text{выпало ровно два «герба»}\}$$

$$C = \{\text{выпало не больше двух «гербов»}\}.$$

6. (С. 2.7.) Среди 25 экзаменационных билетов 5 «хороших». Два студента по очереди берут по одному билету. Найти вероятность того, что:

а) первый студент взял «хороший» билет;

б) второй студент взял «хороший» билет;

в) оба студента взяли «хорошие» билеты.

7. (С. 1.3.) На полке в случайном порядке расставлено 40 книг, среди которых находится трехтомник А.С. Пушкина. Найти вероятность того, что эти тома стоят в порядке возрастания слева направо (но не обязательно рядом).

8. Из урны, содержащей m различных шаров, наудачу последовательно вынимают n шаров. Для двух способов выбора, с возвращением и без возвращения, описать структуру пространства элементарных событий Ω и подсчитать число элементов $|\Omega|$ в случае

а) упорядоченной и б) неупорядоченной выборки.

9. (Т. §1. Задача 4.) Найти вероятность того, что при случайном размещении n шаров по n ящикам

а) ни один ящик не будет пуст;

б) ровно один ящик останется пустым.

Рассмотреть случаи: 1) шары неразличимы; 2) шары различимы.

10. Какова вероятность, вынув 6 карт из колоды в 52 карты, иметь в выборке все 4 масти?

11. (Т. §1. Задача 11.) В n конвертов разложено по одному письму n адресатам. На каждом конверте наудачу написан один из n адресов. Найти вероятность p_n того, что хотя бы одно письмо пойдёт по назначению; вычислить $\lim\limits_{n\to\infty} p_n$.

12. (С. 1.62.) Случайная точка A имеет равномерное распределение в квадрате со стороной 1. Найти вероятность того, что

а) расстояние от A до фиксированной стороны квадрата не превосходит x,

б) расстояние от A до ближайшей стороны не превосходит x,

в) расстояние от A до центра не превосходит x,

г) расстояние от A до фиксированной вершины не превосходит x.

13. (См. С.1.73–1.75) (Парадокс Бертрана). В круге наудачу выбирается хорда. Найти вероятность того, что её длина больше длины стороны правильного вписанного треугольника.

Рассмотреть варианты случайного выбора хорды:

а) середина хорды равномерно распределена в круге,

б) направление хорды задано, а её середина равномерно распределена на диаметре, перпендикулярном этому направлению,

в) один конец хорды закреплён, а другой равномерно распределён на окружности.

14. (Т. §1. Задача 10.) Стержень длины l разломан в двух наудачу выбранных точках. Чему равна вероятность того, что из полученных отрезков можно составить треугольник?

III. Условные вероятности. Формула полной вероятности. Независимость событий

15. Брошены три игральные кости. Чему равна вероятность, что на одной из них выпала единица, если на костях выпали разные числа?

16. (С. 2.4.) Из урны, содержащей M белых и $N-M$ чёрных шаров, последовательно без возвращения извлекают n шаров. Пусть $A_0^{(i)}$ ($A_1^{(i)}$) — событие, состоящее в том, что i-й шар был чёрный (белый). Используя классическое определение случайного выбора, найти

$$\mathrm{P}\{A_1^{(s+1)} \mid A_{\varepsilon_1}^{(1)} A_{\varepsilon_2}^{(2)} \ldots A_{\varepsilon_s}^{(s)}\}, \quad \varepsilon_i = 0,\, 1.$$

17. (С. 2.12.) Из урны, содержащей a белых и b черных шаров, два игрока извлекают шары по очереди. Выигрывает тот, кому раньше попадается белый шар. Найти вероятность выигрыша первого игрока в случаях, когда шары извлекаются:

а) по схеме равновероятного выбора с возвращением,

б) по схеме равновероятного выбора без возвращения.

18. (С. 2.28.) По цели производится n независимых выстрелов. Вероятность попадания при i-м выстреле равна p_i, $i = 1, \ldots, n$. Найти вероятность того, что при n выстрелах будет не менее двух попаданий.

19. (С. 2.75.)Движением частицы по целым точкам прямой управляет схема Бернулли с вероятностью p исхода 1: если в данном испытании схемы Бернулли появилась 1, то частица из своего положения переходит в правую соседнюю точку, а в противном случае — в левую. Найти вероятность того, что за n шагов частица из точки 0 перейдёт в точку m.

20. (Т. §2. Задача 12.) Вероятность того, что молекула, испытавшая в момент $t = 0$ столкновение с другой молекулой и не имевшая иных столкновений до момента t, испытает столкновение в промежуток времени $(t,\, t+h)$, равна $\lambda h + o(h)$, $h \to 0$. Найти вероятность того, что время свободного пробега будет больше t.

21. Изделия некоторого производства удовлетворяют стандарту с вероятностью 0,96. Предлагается упрощённая система испытаний, дающая положительный результат с вероятностью 0,98 для стандартных изделий и с вероятностью 0,05 для нестандартных.

Какова вероятность того, что:

а) изделие будет забраковано;

б) изделие, выдержавшее испытание, удовлетворяет стандарту?

IV. Случайные величины и их распределения

22. (С. 3.3.) Распределение дискретной случайной величины ξ определяется формулами: $\mathrm{P}\{\xi = k\} = C/k(k+1)(k+2)$, $k = 1, 2, \ldots$ Найти : а) постоянную C; б) $\mathrm{P}\{\xi \geqslant 3\}$; в) $\mathrm{P}\{n_1 \leqslant \xi \leqslant n_2\}$.

23. (С. 3.5.) Случайная величина ξ имеет показательное распределение с параметром α: $\mathrm{P}\{\xi \leqslant x\} = 1 - e^{-\alpha x}$ $(x \geqslant 0)$. Найти плотности распределения случайных величин:

а) $\eta_1 = \sqrt{\xi}$; б) $\eta_2 = \xi^2$; в) $\eta_3 = \dfrac{1}{\alpha}\ln\xi$.

24. а) (С. 3.12.) Случайная величина ξ имеет непрерывную функцию распределения $F(x) = \mathrm{P}\{\xi \leqslant x\}$ (функция $F(x)$ строго возрастает). Показать, что случайная величина $\eta = F(\xi)$ имеет равномерное распределение на отрезке [0,1].

б)*Для произвольной функции распределения (ф.р.) $F(x)$ пусть $F^{-1}(t) = \inf\{x\colon\ F(x) \geqslant t\}$, $t \in (0,1)$. Если случайная величина (с.в.) ξ равномерно распределена на (0,1), то с.в. $F^{-1}(\xi)$ имеет ф.р. $F(x)$.

25. (С. 3.8.) Случайная точка B имеет равномерное распределение на окружности $x^2 + (y-a)^2 = r^2$ с центром в точке $A = (0,a)$, а случайная точка $C = (\xi,0)$ является пересечением оси абсцисс с прямой, проходящей через A и B. Найти функцию распределения и плотность распределения случайной величины ξ. (Распределение ξ называется *распределением Коши.*)

26. (С. 3.16.) Совместное распределение

$$p_{ij} = \mathrm{P}\{\xi_1 = i,\ \xi_2 = j\}$$

случайных величин ξ_1, ξ_2 задано таблицей:

i \ j	-1	0	1
-1	1/8	1/12	7/24
1	5/24	1/6	1/8

Найти:

а) одномерные распределения $p_{i\cdot} = \mathrm{P}\{\xi_1 = i\}$, $p_{\cdot j} = \mathrm{P}\{\xi_2 = j\}$;

б) совместное распределение $q_{ij} = \mathrm{P}\{\eta_1 = i,\ \eta_2 = j\}$ случайных величин $\eta_1 = \xi_1 + \xi_2$, $\eta_2 = \xi_1\xi_2$;

в) одномерные распределения $q_{i\cdot} = \mathrm{P}\{\eta_1 = i\}$, $q_{\cdot j} = \mathrm{P}\{\eta_2 = j\}$.

27. (С. 3.31.) Точка (ξ_1,ξ_2) имеет равномерное распределение в квадрате $\{(x,y);\ 0 \leqslant x \leqslant a,\ 0 \leqslant y \leqslant a\}$. Показать, что распределения случайных величин $|\xi_1 - \xi_2|$ и $\min\{\xi_1,\xi_2\}$ совпадают, т.е. что для любого t

$$\mathrm{P}\{|\xi_1 - \xi_2| \leqslant t\} = \mathrm{P}\{\min\{\xi_1,\xi_2\} \leqslant t\}.$$

28. (С. 3.32.) Найти распределение суммы двух независимых слагаемых ξ_1 и ξ_2, если слагаемые распределены:

а) показательно с одним и тем же параметром α;

б) по закону Пуассона с параметрами λ_1 и λ_2.

29. а) (С. 3.39.) Величины ξ_1, ξ_2 независимы:

$$\mathrm{P}\{\xi_1 = 0\} = \mathrm{P}\{\xi_1 = 1\} = \frac{1}{2},$$

ξ_2 равномерно распределена на отрезке $[0,1]$. Найти закон распределения случайной величины $\xi_1 + \xi_2$.

б)* Случайные величины ξ_k, $k \in \mathbb{N}$, независимы и имеют распределение Бернулли с параметром $\frac{1}{2}$. Найти распределение $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\xi^k}{2^k}$.

30. (С. 3.60.) Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ $(n \geqslant 2)$ независимы и одинаково распределены с функцией распределения $F(x)$. При каждом $\omega \in \Omega$ расположим числа $\xi_k(\omega)$, $k = 1, \ldots, n$, в порядке возрастания и перенумеруем их заново:

$\xi_{(1)} \leqslant \xi_{(2)} \leqslant \ldots \leqslant \xi_{(n)}$. Полученные случайные величины называются порядковыми статистиками (или вариационным рядом). Таким образом, $\xi_{(1)} = \min\limits_{1\leqslant k\leqslant n} \xi_k$, а $\xi_{(n)} = \max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} \xi_k$. Найти:

а) функцию распределения $\xi_{(1)}$, а также ф.р. $\xi_{(n)}$;

б) функцию распределения $\xi_{(k)}$, $1 \leqslant k \leqslant n$;

в) двумерную функцию распределения $\xi_{(1)}$, $\xi_{(n)}$.

ВТОРОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 5–10 мая)

V. Числовые характеристики случайных величин

1. (Т. §8. Задача 4.) Из урны, содержащей m белых и n чёрных шаров, по схеме случайного выбора с возвращением извлекают шары до первого появления белого шара. Найти математическое ожидание и дисперсию числа вынутых шаров.

2. (Т. §8. Задача 1.) Длина диаметра круга равномерно распределена в отрезке [0,1]. Найти математическое ожидание и дисперсию площади круга.

3. (Т. §8. Задача 3.) Координаты двух случайных точек на прямой независимы и равномерно распределены на отрезке [0,1]. Найти математическое ожидание и дисперсию расстояния между ними.

4. (С. 3.80.) Случайные величины ξ_1, ξ_2 принимают значения -1, 0, 1. Совместное распределение ξ_1, ξ_2 определяется условиями $\mathrm{P}\{\xi_1\xi_2 = 0\} = 1$, $\mathrm{P}\{\xi_i = 1\} = \mathrm{P}\{\xi_i = -1\} = \dfrac{1}{4}$, $i = 1, 2$. Найти $\mathrm{E}\,\xi_1$, $\mathrm{E}\,\xi_2$, $\mathrm{D}\,\xi_1$, $\mathrm{D}\,\xi_2$, $\mathrm{cov}(\xi_1,\xi_2)$.

5. а) (С. 3.81.) Случайная величина ξ равномерно распределена на отрезке $[0,2\pi]$; $\eta_1 = \cos\xi$, $\eta_2 = \sin\xi$. Найти $\mathrm{E}\,\eta_1$, $\mathrm{E}\,\eta_2$, $\mathrm{cov}(\eta_1,\eta_2)$. Являются ли η_1 и η_2 независимыми?

б)* Пусть с.в. ξ принимает m значений, а с.в. η принимает n значений. Если $\mathrm{E}\,\xi^k\eta^l = \mathrm{E}\,\xi^k\,\mathrm{E}\,\eta^l$ при всех $0 \leqslant k \leqslant m-1$, $0 \leqslant l \leqslant n-1$, то ξ и η независимы.

6. (С. 3.189 (а,б,г).) Случайные величины ξ и η независимы:

$$\mathrm{P}\{\xi = k\} = \mathrm{P}\{\eta = k\} = pq^{k-1},$$

$$q = 1 - p, \quad 0 < p < 1, \quad k = 1,\, 2,\, \ldots$$

Найти:

а) $\mathrm{P}\{\xi = \eta\}$; б) $\mathrm{P}\{\xi > \eta\}$; в) $\mathrm{P}\{\xi = k \mid \xi > \eta\}$.

VI. Неравенство Чебышева. Предельные теоремы. Характеристические функции

7. (С. 3.163 (а–д).) По известному «правилу трёх сигм» вероятность отклонения случайной величины от своего математического ожидания более чем на три корня из дисперсии мала. Найти $\mathrm{P}\{|\xi - \mathrm{E}\,\xi| < 3\sqrt{\mathrm{D}\,\xi}\}$, если ξ имеет:

а) нормальное распределение;

б) показательное распределение;

в) равномерное распределение на отрезке $[-1{,}1]$;

г) $\mathrm{P}\{\xi = 1\} = \mathrm{P}\{\xi = -1\} = \dfrac{1}{18}$, $\mathrm{P}\{\xi = 0\} = \dfrac{8}{9}$;

д) распределение Пуассона с $\mathrm{E}\,\xi = 0{,}09$.

Сравнить результат с оценкой, полученной по неравенству Чебышева.

8. (С. 4.2.) Пусть случайная величина η_n равна сумме очков, появившихся при n бросаниях симметричной игральной кости. Используя неравенство Чебышева, оценить сверху

$$\mathrm{P}\left\{\left|\frac{\eta_n}{n} - 3{,}5\right| > \varepsilon\right\}, \quad \varepsilon > 0.$$

9. (С. 4.11 (а).) Пусть функция $f(x)$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, непрерывна, а $\xi_1,\, \xi_2,\, \ldots$ — независимые случайные величины, равномерно распределённые на отрезке $[0{,}1]$.

Доказать, что при любом $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}\left\{\left|\frac{f(\xi_1) + \ldots + f(\xi_n)}{n} - \int\limits_0^1 f(x)\,dx\right| > \varepsilon\right\} = 0.$$

10. (С. 4.4.) Последовательности $\xi_1,\, \xi_2,\, \ldots$ и $\eta_1,\, \eta_2,\, \ldots$ образованы одинаково распределёнными случайными величинами, независимыми внутри каждой последовательности (случайные величины ξ_i и η_i могут не быть независимыми), $\mathrm{E}\,\xi_i = \mathrm{E}\,\eta_i = a$, $\mathrm{D}\,\xi_i = \mathrm{D}\,\eta_i < \infty$. Выполняется ли закон больших чисел для последовательности $\zeta_1, \zeta_2, \ldots$; где

$$\zeta_{2k-1} = \xi_k, \quad \zeta_{2k} = \eta_k, \quad k = 1,\, 2,\, \ldots?$$

Выполняется ли усиленный закон больших чисел (УЗБЧ)?

11. Вычислить характеристические функции для следующих законов распределения:

а) равномерного распределения в интервале $(-a,a)$;

б) распределения Пуассона;

в) нормального с плотностью
$$p(x) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right).$$

12. а)* Являются ли характеристическими функциями

$$(\cos t)^2; \quad \cos(t^2); \quad e^{\lambda(\varphi(t)-1)},$$

где $\lambda = \mathrm{const} > 0$, а $\varphi(t)$ — некоторая характеристическая функция?

б) Найти законы распределения, которым соответствуют следующие характеристические функции:

$$\cos t, \quad e^{it}\cos t, \quad \frac{1}{2-e^{it}}.$$

13. Предположим, что левши составляют 1% от населения. Оценить вероятность того, что не менее четырёх левшей окажется среди

а) 200 человек; б) 10 000 человек.

14. Найти вероятность того, что среди 10 000 новорождённых будет не менее половины мальчиков, если вероятность рождения мальчика равна 0,515.

15. (С. 2.65.) Театр, вмещающий 1000 человек, имеет два разных входа. Около каждого из входов имеется свой гардероб.

Сколько мест должно быть в каждом из гардеробов для того, чтобы с вероятностью, приближённо равной 0,99, все зрители могли раздеться в гардеробе того входа, через который они вошли? Рассмотреть два случая:

а) зрители приходят поодиночке;

б) зрители приходят парами.

Предположить, что входы зрители выбирают с равными вероятностями.

16. (С. 4.132.) Случайная величина ξ_λ распределена по закону Пуассона с параметром λ. Найти

$$\lim_{\lambda\to\infty} \mathrm{P}\left\{\frac{\xi_\lambda-\lambda}{\sqrt{\lambda}} \leqslant x\right\}, \quad x\in\mathbb{R}.$$

17. Пусть $\xi_{m,n}$ $(m = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ — независимые случайные величины с одинаковой функцией распределения

$$F_n(x) = \begin{cases} 1-\exp(-\lambda n x), & x\geqslant 0,\ \lambda=\mathrm{const}>0,\\ 0, & x<0. \end{cases}$$

Найти предельное распределение при $n\to\infty$ для

$$\xi_n = \xi_{1,n}+\xi_{2,n}+\ldots+\xi_{n,n}.$$

18. (С. 4.125.) Случайные величины ξ_1, ξ_2, ... независимы и имеют стандартное нормальное распределение. Распределение случайной величины

$$\chi_n^2 = \xi_1^2+\ldots+\xi_n^2$$

называется *распределением* χ^2 (хи-квадрат) с n *степенями свободы.*

Найти $\mathrm{E}\,\chi_n^2$, $\mathrm{D}\,\chi_n^2$ и плотность распределения χ_n^2.

а) Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{P}\left\{\left|\dfrac{\chi_n^2}{n}-1\right|>\varepsilon\right\}=0$ при любом $\varepsilon>0$.

б) Найти $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{P}\left\{\dfrac{\chi_n^2-\mathrm{E}\,\chi_n^2}{\sqrt{\mathrm{D}\,\chi_n^2}}\leqslant x\right\}$, $-\infty<x<\infty$.

VII. Элементы математической статистики и теории случайных процессов

19. (С. 6.7.) Пусть μ_n — число успехов в n испытаниях схемы Бернулли с вероятностью успеха p в каждом испытании. Найти оценку наибольшего правдоподобия p^* параметра p. Доказать её несмещённость и состоятельность.

20. (С. 6.12.) Используя метод наибольшего правдоподобия, найти по выборке $x_1, \ldots, x_n$, где $\mathrm{P}(x_k = m) = \dfrac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}$, $m = 0, 1, \ldots$ оценку λ^* параметра λ. Будет ли эта оценка несмещённой и состоятельной? Найти $\mathrm{E}\,\lambda^*$, $\mathrm{D}\,\lambda^*$.

21*. (С. 6.29.) Пусть $x_{(1)} \leqslant \ldots \leqslant x_{(n)}$ — вариационный ряд, построенный по выборке $x_1, \ldots, x_n$, где x_k независимы и равномерно распределены на отрезке $[a,b]$. Являются ли оценки $a^* = x_{(1)}$, $b^* = x_{(n)}$ несмещёнными оценками a и b? Найти $\mathrm{E}\,a^*$, $\mathrm{E}\,b^*$, $\mathrm{D}\,a^*$, $\mathrm{D}\,b^*$, $\mathrm{cov}(a^*,b^*)$.

22*. (С. 6.18.) Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_m$ — независимые случайные величины, равномерно распределённые в области $G \subset \mathbb{R}^n$. Для оценивания интеграла $a = \int\limits_G \ldots \int f(x)\,dx_1 \ldots dx_n$ $(x = (x_1, \ldots, x_n))$ по методу Монте-Карло используется величина $\eta_m = \dfrac{1}{m} \sum\limits_{i=1}^{m} f(\xi_i)$.

а) Найти $\mathrm{E}\,\eta_m$, $\mathrm{D}\,\eta_m$.

б) Построить несмещённую оценку b^{*2} дисперсии $\mathrm{D}\,f(\xi_i)$ по реализациям $f(\xi_1), \ldots, f(\xi_m)$.

в) Предполагая, что $\int\limits_G \ldots \int f^4(y)\,dx_1 \ldots dx_n < \infty$, построить при $m \to \infty$ асимптотически доверительный интервал для a с доверительной вероятностью $1 - 2\alpha$.

23. (С. 6.8.) Пусть μ_n — число успехов в n испытаниях схемы Бернулли с вероятностью успеха p в каждом испытании. Построить для p асимптотически доверительный интервал с доверительной вероятностью $1 - 2\alpha$.

24. (С. 6.21.) Функция $y = Ax$ измерена в точках $x_1, \ldots, x_n$. Пусть результаты измерений являются реализацией независимых случайных величин $\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \ldots, \tilde{y}_n$, у которых $\mathrm{E}\,\tilde{y}_i = Ax_i$, $\mathrm{D}\,\tilde{y}_i = \sigma^2 < \infty$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Найти:

а) оценку A_n^* параметра A, используя метод наименьших квадратов, т.е. минимизируя по A выражение $I(A)=\sum\limits_{i=1}^{n}(\tilde{y}_i-Ax_i)^2$;

б) $\mathrm{E}\,A_n^*$, $\mathrm{D}\,A_n^*$.

Доказать, что оценка A_n^* состоятельна, если $X_n^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 \to \infty$ при $n \to \infty$.

25* (С. 6.36.) Используя таблицу нормально распределённых случайных чисел, получить реализацию выборки $x_1, \ldots, x_n$, где x_k имеет нормальное распределение с параметрами $a = \mathrm{E}\,x_k = 0{,}5$, $\sigma^2 = \mathrm{D}\,x_k = 1$, $n = 50$. Используя критерий χ^2, проверить гипотезу о том, что полученная выборка соответствует нормальному распределению. Параметры a и σ считать неизвестными. Уровень значимости положить равным 0,05.

26. (С. 5.50.) Матрица вероятностей перехода цепи Маркова имеет вид

$$\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}5 & 0{,}4 \\ 0{,}6 & 0{,}2 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}3 \end{pmatrix}.$$

Распределение по состояниям в момент времени $t = 0$ определяется вектором $(0{,}7; 0{,}2; 0{,}1)$. Найти:

а) распределение по состояниям в момент $t = 2$;

б) вероятность того, что в моменты $t = 0, 1, 2, 3$ состояниями цепи будут соответственно 1, 3, 3, 2;

в) стационарное распределение.

27. Пусть в цепи Маркова с состояниями 1 и 2 матрица вероятностей перехода имеет вид $\begin{Vmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{Vmatrix}$, где $\alpha\beta > 0$. Найти вероятности перехода за n шагов и финальные вероятности.

28* (С. 5.95 (а).) Цепь Маркова ξ_t с непрерывным временем имеет множество состояний $\{0,\ 1,\ \ldots,\ N\}$, а вероятности $p_{ij}(h) = P\{\xi_{t+n} = j \mid \xi_t = i\}$ перехода из состояния i в состояние j за время h удовлетворяют при $h \downarrow 0$ условиям

$$P_{00}(h) = 1 - \alpha h + o(h), \quad P_{NN}(h) = 1 - \beta h + o(h),$$

$$P_{ii}(h) = 1 - (\alpha + \beta)h + o(h), \quad 1 \leqslant i \leqslant N-1,$$

$$P_{i-1\,i}(h) = \alpha h + o(h),$$

$$P_{i\,i-1}(h) = \beta h + o(h), \quad 1 \leqslant i \leqslant N,$$

$$P_{ij}(h) = o(h), \quad \text{если} \quad |i-j| > 1,$$

где α, β — фиксированные положительные числа. Составить систему дифференциальных уравнений для $P_{ij}(t)$, $0 \leqslant i,\ j \leqslant N$, $t \geqslant 0$.

29* (С. 5.1.) Случайные величины ξ_1 $(t = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots)$ независимы, $\mathrm{E}\,\xi_i = a$, $\mathrm{D}\,\xi_i = \sigma^2$. По действительным числам $c_0, c_1, \ldots, c_k$, удовлетворяющим условию $c_0 + c_1 + \ldots + c_k = 1$, построен случайный процесс

$$\eta_t = c_0\xi_t + c_1\xi_{t-1} + \ldots + c_k\xi_{t-k}, \quad t = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots$$

Найти $\mathrm{E}\,\eta_t$, $\mathrm{D}\,\eta_t$, $\mathrm{cov}(\eta_t,\eta_s)$. Показать, что $\mathrm{cov}(\eta_t,\eta_s) = R(|s-t|)$, т.е. зависит только от $|s-t|$.

30* (С. 5.33.) Найти $\mathrm{cov}(\xi_t,\xi_{t+s})$ при $t,\ s \geqslant 0$, если:

а) ξ_t — пуассоновский процесс на $[0,\infty)$ с интенсивностью λ;

б) ξ_t — пуассоновский процесс на $[0,\infty)$ с интенсивностью $\lambda(t)$.

Задания составил А.В. Булинский, к.ф.-м.н., доцент