УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
Д.А. Зубцов
23 декабря 2013 г.

ПРОГРАММА И ЗАДАНИЯ

по дисциплине:	**Дискретные случайные процессы**
по направлению	010900 «Прикладные математика и физика»
факультеты:	**ФРТК**
кафедра:	**высшей математики**
курс:	III
Трудоёмкость:	вариативная часть— 3 зач. ед., дополнительная за сложность — 0 зач. ед.
семестр:	6
лекции:	68 часов
практические (семинарские) занятия:	0 часов
лабораторные занятия:	нет
ВСЕГО ЧАСОВ	— 68

Экзамен — 6 семестр

Самостоятельная работа — 1 час в неделю

Программу составил

Г.Г. Амосов, д.ф.-м.н., доцент

Программа принята на заседании кафедры
высшей математики 23 ноября 2013 г.

Заведующий кафедрой Е.С. Половинкин

1. Системы множеств, сигма-кольца, сигма-алгебры, продолжение меры с полукольца на сигма-кольцо, борелевские множества, простые функции, измеримые функции, интегрируемость по Лебегу, интегрируемость ограниченных измеримых функций.
2. Аксиоматический подход в теории вероятностей. Пространство элементарных событий, сигма-алгебра событий, вероятностная мера. Случайная величина как измеримая функция. Основные характеристики случайных величин: математическое ожидание (как интеграл Лебега), дисперсия, функция распределения, характеристическая функция. Многомерный случайный вектор, ковариационная матрица, коэффициент корреляции.
3. Многомерное гауссовское распределение, его ковариационная функция, характеристическая функция многомерного гауссовского распределения.
4. Дискретный случайный процесс как последовательность случайных величин, характеристическая функция и ковариация случайного процесса, закон больших чисел в форме Чебышева и в форме Хинчина, центральная предельная теорема.
5. Стационарные, регулярные и сингулярные процессы, разложение Вольда–Колмогорова на регулярную и сингулярную части.
6. Гауссовские случайные процессы, дискретный белый шум, случайные процессы с независимыми приращениями.
7. Цепи Маркова, матрица переходных вероятностей, эргодичность, предельные и финальные распределения, стационарный режим.

Литература

Основная

1. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. – 4-е изд. и все последующие-е изд. – М.: Наука, 1976. – 542 с.
2. *Ширяев А.Н.* Вероятность. Т. 1, 2. – М.: МЦНМО, 2007.
3. *Миллер Б.М., Панков А.Р.* Теория случайных процессов в примерах и задачах. – М.: Физматлит, 2002.
4. *Розанов Ю.А.* Лекции по теории вероятностей. – 3-е изд. – Долгопрудный: Интеллект, 2008.
5. *Боровков А.А.* Теория вероятностей. – 3-е изд. – М.: Эдиториал УРСС, 1999. – 472 с.

Дополнительная

6. *Ширяев А.Н.* Задачи по теории вероятностей. – М.: МЦНМО, 2011.

7. *Феллер В.М.* Введение в теорию вероятностей и её приложения. Т. 1, 2. – М.: Либроком, 2010.

8. *Розанов Ю.А.* Стационарные случайные процессы. – М.: Наука, 1990.

З А Д А Н И Я

ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 31 марта–5 апреля)

I. Мера Лебега. Интегрируемость по Лебегу

1. Доказать существование и единственность минимального σ-кольца, содержащего данную систему множеств.

2. Доказать, что из сходимости почти всюду следует сходимость по мере, а обратное, вообще говоря, неверно. Доказать, что если последовательность сходится по мере, у нее существует подпоследовательность, сходящаяся почти везде.

3. Доказать, что всякая ограниченная измеримая функция интегрируема по Лебегу.

4. Доказать, что если функция интегрируема по Риману, тогда она интегрируема по Лебегу и интегралы совпадают. Привести пример, показывающий, что обратное, вообще говоря, неверно.

II. Случайные величины и их характеристики

5. Случайная величина ξ равномерно распределена на отрезке $[0,2\pi]$, $\eta_1 = \cos\xi$, $\eta_2 = \sin\xi$. Найти $M\eta_1$, $M\eta_2$, $\operatorname{cov}(\eta_1;\eta_2)$. Будут ли случайные величины η_1 и η_2 независимыми?

6. Случайная величина ξ равномерно распределена на отрезке $[0,1]$. Найти коэффициент корреляции случайных величин η_1 и η_2, если

а) $\eta_1 = a\xi$, $\eta_2 = b\xi$, $(a,b > 0)$; б) $\eta_1 = a\xi$, $\eta_2 = b\xi$, $(a < 0 < b)$;

в) $\eta_1 = \xi$, $\eta_2 = \xi^2$; г) $\eta_1 = \xi - \frac{1}{2}$, $\eta_2 = \left(\xi - \frac{1}{2}\right)^2$;

д) $\eta_1 = \sin\left(\frac{\pi}{2}\xi\right)$, $\eta_2 = \cos\left(\frac{\pi}{2}\xi\right)$;

7. Случайные величины ξ_1 и ξ_2 независимы, $P(\xi_1 = 1) = P(\xi_1 = 0) = \frac{1}{2}$, а случайная величина ξ_2 имеет равномерное распределение на отрезке $[0,1]$. Найти распределение величины $\xi_1 + \xi_2$.

8. Вычислить характеристические функции для следующих законов распределения:

а) равномерное распределение в интервале $(-a,a)$;

б) распределение Пуассона с параметром λ;

в) гауссовское распределение с плотностью

$$p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right);$$

г) показательное распределение с параметром α.

9. а) Каким законам распределения отвечают следующие характеристические функции:

$$\cos(t),\quad e^{it}\cos(t),\quad \frac{1}{2-e^{it}}.$$

б) Доказать, что функция $\sin(t)$ не является характеристической функцией распределения.

III. Гауссовское распределение

10. Случайная величина ξ имеет гауссовское распределение $N(0,\sigma^2)$. Найти моменты $M\xi^n$ для всех натуральных n.

11. Случайная величина ξ имеет гауссовское распределение $N(0,1)$. Найти $M\cos\xi$ и $M\sin\xi$.

12. Случайная величина ξ имеет гауссовское распределение $N(0,1)$. Найти $M\cos\xi$ и $D\cos\xi$.

13. Случайная величина ξ имеет гауссовское распределение $N(0,1)$. Что больше: $D\cos\xi$ или $D\sin\xi$?

14. Пусть ξ_1 и ξ_2 — независимые случайные величины, имеющие гауссовские распределения $N(a_1,\sigma_1^2)$ и $N(a_2,\sigma_2^2)$ соответственно. Найти распределение случайных величин $\eta=\xi_1+\xi_2$ и $\zeta=\xi_1-\xi_2$.

15. Пусть случайные векторы η_1 и η_2 таковы, что их компоненты некоррелированы (то есть имеют нулевую ковариацию), а совместное распределение η_1 и η_2 является нормальным. Доказать, что векторы η_1 и η_2 независимы.

16. Независимые случайные величины ξ, η и ζ имеют гауссовское распределение $N(0,1)$. Найти совместное распределение и характеристическую функцию случайного вектора $(\xi,5\xi+6\eta,\xi-\eta+\zeta)$.

17. Случайные величины ξ_0, ξ_1, …, ξ_n независимы и имеют гауссовское распределение $N(0,1)$. Найти распределение следующих случайных величин:

а) $\chi_n^2=\xi_1^2+\ldots+\xi_n^2$ (распределение χ^2 с n степенями свободы).

б) $\rho_n=\frac{\xi_0}{\sqrt{(\xi_1^1+\ldots+\xi_n^2)/n}}$ (распределение Стьюдента с n степенями свободы).

ВТОРОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 19–24 мая)

IV. Закон больших чисел. Центральная предельная теорема

18. Случайная величина η_n равна числу очков, выпавших при n бросаниях симметричной игральной кости. Используя Центральную предельную теорему, выбрать n так, чтобы выполнялось неравенство

$$P\left(\left|\frac{\eta_n}{n}-\frac{7}{2}\right| \geqslant 0.1\right) \leqslant 0.1.$$

Решить ту же задачу с помощью неравенства Чебышева. Сравнить результаты.

19. Складывается 10^4 чисел округленных с точностью до 10^{-m}. Предполагая, что ошибки округления независимы и равномерно распределены на интервале $(-0.5\cdot 10^{-m}, 0.5\cdot 10^{-m})$, найти пределы, в которых с вероятностью, не меньшей 0.99, будет лежать суммарная ошибка.

20. Пусть случайная величина τ_n имеет распределение Стьюдента с n степенями свободы (см. задачу 17). Найти предельное распределение

$$\lim_{n\to\infty} P(\rho_n < x).$$

21. Случайная величина ξ_λ распределена по закону Пуассона с параметром λ. Найти

$$\lim_{\lambda\to\infty} P\left(\frac{\xi_\lambda-\lambda}{\sqrt{\lambda}} \leqslant x\right).$$

22. Пусть $\xi_{m,n}$ $(m = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ — независимые случайные величины с функцией распределения

$$P(\xi < x) = \begin{cases} 1-e^{-\alpha_n x}, & x \geqslant 0 \\ 0, & x < 0, \end{cases} \quad \text{где} \quad \alpha_n = \lambda n, \quad \lambda > 0.$$

Найти предельное распределение при $n \to \infty$ случайной величины $\xi_n = \xi_{1,n} + \xi_{2,n} + \ldots + \xi_{n,n}$.

V. Дискретные случайные процессы

23. Пусть дискретный случайный процесс (ξ_n) состоит из последовательности независимых случайных величин с математическими ожиданиями $M\xi_n = a$ и дисперсиями $D\xi_n = \sigma^2$ и пусть

$\eta_n = c_0\xi_n + c_1\xi_{n-1} + c_2\xi_{n-1}$, где $c_0 + c_1 + c_2 = 1$. Найти $M\eta_n$, $D\eta_n$. Доказать, что случайный процесс (η_n) является стационарным.

24. Рассмотрим дискретный случайный процесс

$$\xi_n = c_n X, \quad n = 1,2,\ldots,$$

где $c_n \in C$ и X — фиксированная случайная величина со средним a и дисперсией σ^2. Найти математические ожидания, дисперсии и ковариацию для (ξ_n). При каком условии случайный процесс (ξ_n) будет стационарным? Пусть известно, что X — гауссовская случайная величина. Найти характеристическую функцию для процесса (ξ_n).

25. Пусть $X_1, \ldots, X_m$ — совокупность случайных величин, совместное распределение которых — гауссовское. Показать, что случайный процесс

$$\xi_n = \sum_{k=1}^{m} c_k^n X_k, \quad n = 1,2,3,\ldots,$$

где $c_k^n \in C$, $1 \leqslant k \leqslant m$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, гауссовский.

26. Показать, что существует гауссовский случайный процесс (ξ_n) с нулевыми математическими ожиданиями и ковариационной функцией $\mathrm{Cov}(\xi_n,\xi_m) = k|n-m|$.

27. Пусть дискретный случайный процесс (ξ_n) состоит из некоррелированных случайных величин с нулевыми математическими ожиданиями и равными дисперсиями. Доказать, что процесс является стационарным. Будет ли такой процесс регулярным?

28. Пусть стационарный дискретный случайный процесс (ξ_n) обладает свойством

$$\xi_{n+N} = \xi_n$$

для всех n и некоторого фиксированного N. Показать, что найдутся такие некоррелированные случайные величины $\eta_1, \ldots, \eta_N$ и действительные числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$, что (ξ_n) можно представить в виде суммы

$$\xi_n = \sum_{k=1}^{N} e^{i\lambda_k n}\eta_k,$$

называемой спектральным представлением процесса.

VI. Цепи Маркова

29. Доказать, что для эргодической цепи Маркова с матрицей переходных вероятностей P предельное распределение π существует, единственно и удовлетворяет уравнению $\pi = P\pi$.

30. Пусть ξ_n — координата точки, блуждающей по целым точкам действительной прямой так, что на каждом шагу она смещается вправо с вероятностью p и влево с вероятностью $q = 1 - p$. Найти финальные вероятности состояний частицы. Предположим, что такое же блуждание происходит по целым точкам положительной полупрямой и прекращается, если частица сдвигается влево, находясь в точке ноль. Найти вероятность того, что процесс остановится за бесконечное время, если он начался в точке с координатой $n \geqslant 0$.

Задания составил Г.Г. Амосов, д.ф.-м.н., доцент