УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
Д.А. Зубцов
23 декабря 2013 г.

# ПРОГРАММА И ЗАДАНИЯ

| | |
|---|---|
| по дисциплине: | **Стохастические процессы** |
| по направлению | 010900 «Прикладные математика и физика» |
| факультет: | **ФПФЭ** |
| кафедра: | **высшей математики** |
| курс: | II |
| Трудоёмкость: | обязательная часть — 0 зач. ед.,<br>вариативная часть— 3 зач. ед.,<br>дополнительная за сложность — 0 зач. ед. |
| семестр: | 4 |
| лекции: | 34 часа |
| практические (семинарские) занятия: | 17 часов |
| лабораторные занятия: | нет |
| ВСЕГО ЧАСОВ | — 51 |

Экзамен — 4 семестр

Самостоятельная работа — 2 часа в неделю

Программу составил

С.В. Резниченко, к.ф.-м.н., доцент

Программа принята на заседании кафедры
высшей математики 3 декабря 2013 г.

Заведующий кафедрой Е.С. Половинкин

1. Суммы независимых случайных величин. Характеристические и производящие функции, их свойства.
2. Метод характеристических функций. Закон больших чисел при отсутствии дисперсий (теорема Хинчина). Центральная предельная теорема.
3. Основные понятия математической статистики: выборка, эмпирическая функция распределения, вариационный ряд, оценка, статистический критерий. Метод максимума правдоподобия для нахождения точечных оценок параметров распределения. Интервальные оценки (доверительные интервалы). Метод наименьших квадратов. Проверка статистических гипотез (критерии $\chi^2$, Неймана–Пирсона, Колмогорова, Смирнова).
4. Общая теория условных математических ожиданий. Корреляционная теория случайных величин.
5. Стохастический (случайный) процесс, его задание с помощью конечномерных распределений. Теорема Колмогорова о конечномерных распределениях. Стохастическая эквивалентность случайных процессов.
6. Цепи Маркова, их статистический и физический смысл. Марковские процессы (общая концепция). Конечные однородные цепи Маркова: уравнения для вероятностей перехода, спектр матрицы переходных вероятностей, классификация состояний, предельное и стационарное распределения, эргодичность. Счётные однородные цепи Маркова.*
7. Суммы случайных величин, связанных с конечной цепью Маркова. Закон больших чисел и центральная предельная теорема для конечных цепей Маркова. Цепь с двумя состояниями.

*Знаком (*) отмечен необязательный материал.*

## Литература


1. *Тутубалин В.Н.* Теория вероятностей и случайных процессов. – М.: Изд-во МГУ, 1992. – 400 с.
2. *Боровков А.А.* Теория вероятностей. – М.: Наука, 1986, 2-е изд. и все последующие. – 432 с.
3. *Ширяев А.Н.* Вероятность. – М.: Наука, 1989, 2-е изд. и все последующие. – 640 с.
4. *Севастьянов Б.А.* Курс теории вероятностей и математической статистики. – М.: Наука, 1982. – 256 с.
5. *Крамер Г.М.* Математические методы статистики / пер. с англ. – М.: Мир, 1975. – 648 с.

6. *Чистяков В.П.* Курс теории вероятностей. – М.: Наука, 1982, 2-е изд. и все последующие. – 256 с.

# З А Д А Н И Я

## Литература

*Зубков А.М., Севастьянов Б.А., Чистяков В.П.* Сборник задач по теории вероятностей. – 2-е изд. – М.: Наука, 1989. – 320 с. (С.).

## ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 10–15 марта)

### I. Характеристические функции. Центральная предельная теорема

**1.** С. 4.86. **2.** С. 4.95. **3.** С. 4.96.

**4.** С. 4.98(а,в,е,з). **5.** С. 4.99(а-д).

**6.** С. 4.120. Решить ту же задачу, используя неравенство Чебышева. Сравнить результаты.

**7.** С. 4.121. **8.** С. 4.129. **9.** С. 4.132.

**10.** Пусть $\xi_{m,n}$ $(m = 1,2,\ldots,n)$ — независимые случайные величины с функцией распределения

$$P\{\xi_{m,n} < x\} = \begin{cases} 1 - e^{-\alpha_n x}, & x \geqslant 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases} \text{где } \alpha_n = \lambda n,\ \lambda > 0.$$

Найти предельное распределение при $n \to \infty$ случайной величины $\xi_n = \xi_{1,n} + \xi_{2,n} + \ldots + \xi_{n,n}$.

### II. Элементы математической статистики

2.1. Выборка, эмпирическая функция распределения, вариационный ряд, выборочные моменты

**11.** С. 6.10. **12.** С. 6.2.

**13*.** Пусть $x_1$, …, $x_n$ — выборка, теоретическая функция распределения $F(x)$ которой непрерывна, а $F_n^*(x)$ — отвечающая этой выборке эмпирическая функция распределения. Доказать, что распределение статистики

$$D_n = \sup_{-\infty < x < +\infty} |F_n^*(x) - F(x)|$$

не зависит от $F(x)$.

**14.** Пусть $x_1$, …, $x_n$ — выборка из нормального закона $N(a,\sigma^2)$. Доказать, что выборочное среднее $\overline{x}$ =

$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ и выборочная дисперсия $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$ независимы. Случайная величина $\overline{x}$ имеет нормальное распределение $N\left(a,\frac{\sigma^2}{n}\right)$, случайная величина $\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}$ имеет $\chi^2$-распределение с $n-1$ степенями свободы.

**15.** Пусть $x_1, \ldots, x_n$ — выборка из нормального закона $N(a,\sigma^2)$. Доказать, что статистика $\tau = \frac{(\bar{x}-a)\sqrt{n}}{s}$ имеет распределение Стьюдента с $n-1$ степенями свободы.

**16.** Пусть $x_1, \ldots, x_{n_1}$ и $x'_1, \ldots, x'_{n_2}$ — две независимые выборки, и любая из этих $n_1+n_2$ независимых случайных величин имеет нормальное распределение с параметрами $(a,\sigma^2)$. Доказать, что случайная величина

$$\frac{S^2}{S'^2}\cdot\frac{n_1}{n_2}\cdot\frac{n_2-1}{n_1-1},$$

где $S^2$ — выборочная дисперсия выборки $x_1, \ldots, x_{n_1}$, а $S'^2$ — выборочная дисперсия выборки $x'_1, \ldots, x'_{n_2}$, имеет $F$-распределение с $n_1-1$ и $n_2-1$ степенями свободы.

**17.** С. 6.30. **18.** С. 6.31.

## 2.2. Точечные оценки

**19.** С. 6.29. **20.** С. 6.32.

**21.** По неоднородной выборке $x_1, \ldots, x_n$, где $x_k$, $k = 1, \ldots, n$ — независимые случайные величины, $\mathrm{M}\, x_k = a$, $\mathrm{D}\, x_k = \sigma_k^2$ ($\sigma_k$ известны), найти несмещённую линейную относительно $x_1, \ldots, x_n$ оценку $a^*$ параметра $a$, которая имеет наименьшую возможную дисперсию.

**22.** С. 6.4. **23.** С. 6.6. **24.** С. 6.7.

**25.** С. 6.12. **26.** С. 6.13. **27.** С. 6.14.

**28.** Пусть элементы выборки $x_1, \ldots, x_n$ имеют нормальное распределение $N(a,\sigma^2)$. Найти оценки наибольшего правдоподобия параметров $a$ и $\sigma^2$.

## 2.3. Доверительные интервалы (интервальные оценки)

**29.** С. 6.11. **30.** С. 6.8.

**31.** Пусть элементы выборки $x_1, \ldots, x_n$ имеют распределение Пуассона с параметром $\lambda$. Построить для $\lambda$ асимптотически доверительный интервал с доверительной вероятностью $1-2\alpha$.

**32.** По независимым выборкам $x_1, \ldots, x_{n_1}$ и $y_1, \ldots, y_{n_2}$ из двух нормальных распределений с параметрами $(a_1,\sigma_1^2)$ и $(a_2,\sigma_2^2)$ соответственно построить доверительный интервал с доверительной вероятностью $1-\alpha$ для разности $a_1 - a_2$, если:

а) $\sigma_1$ и $\sigma_2$ известны;

б) $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$, где $\sigma$ неизвестно.

### 2.4. Метод наименьших квадратов

**33.** С. 6.23. **34.** С. 6.22.

### 2.5. Проверка статистических гипотез

**35.** С. 6.35. **36.** С. 6.36. **37.** С. 6.37. **38.** С. 6.38.

**39.** Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — независимые нормально распределённые случайные величины с параметрами $(a, \sigma^2)$. Построить критерий для проверки гипотезы $H_0 : a = a_0$, где $a_0$ — некоторое заданное число, величина $\sigma$ неизвестна.

**40.** Пусть имеются две независимые выборки: выборка $x_1$, $x_2$, ..., $x_{n_1}$ из нормального распределения с параметрами $(0,\sigma_1^2)$ и выборка $y_1$, $y_2$, ..., $y_{n_2}$ из нормального распределения с параметрами $(0, \sigma_2^2)$. Построить критерий для проверки основной гипотезы $H_0 : \sigma_1 = \sigma_2$ против альтернативы $H_1 : \sigma_1 \neq \sigma_2$.

**41.** Построить критерий для проверки гипотезы о соответствии заданной функции распределения $F(x)$ имеющейся выборке $x_1$, $x_2$, ..., $x_n$.

**42.** Построить критерий для проверки гипотезы о том, что независимые выборки $x_1$, ..., $x_{n_1}$ и $y_1$, ..., $y_{n_2}$ отвечают одной и той же непрерывной функции распределения $F(x)$.

# ВТОРОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 5–10 мая)

## III. Гильбертово пространство

**43.** Пусть $L^2_\Omega = L^2(\Omega,\mathcal{F},P)$ — пространство случайных величин с конечным вторым моментом (точнее, классов эквивалентности по отношению "$=(P$-п.н.)"). Для произвольных $\xi,\eta \in L^2_\Omega$ положим $(\xi,\eta) = \mathrm{M}\,\xi\eta$. Доказать, что:

а) $L^2_\Omega$ — линейное пространство;

б) $(\xi,\eta)$ является скалярным произведением в $L^2_\Omega$;

в) пространство $L^2_\Omega$ является полным относительно нормы $\|\xi\| = \sqrt{(\xi,\xi)}$, индуцированной этим скалярным произведением, иными словами, $L^2_\Omega$ — *гильбертово пространство.*

**44.** а) Показать, что если $\xi = \underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\,\xi_n$, то $\|\xi_n\| \to \|\xi\|$, $n\to\infty$.

б) Показать, что если $\xi = \underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\,\xi_n$ и $\eta = \underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\,\eta_n$, то $(\xi_n,\eta_n) \to$ $\to (\xi,\eta)$.

**45.** Показать, что норма $\|\cdot\|$ удовлетворяет "свойству параллелограмма":

$$\|\xi+\eta\|^2+\|\xi-\eta\|^2=2(\|\xi\|^2+\|\eta\|^2).$$

**46.** Пусть $\{\xi_1,\,\ldots,\,\xi_n\}$ — семейство ортогональных случайных величин. Показать, что для них справедлива "теорема Пифагора":

$$\left\|\sum_{i=1}^{n}\xi_i\right\|^2=\sum_{i=1}^{n}\|\xi_i\|^2.$$

**47.** Пусть $\eta_1,\ \eta_2,\ \ldots$ — ортонормированная система в $L^2_\Omega$ (т.е. $(\eta_i,\eta_j)=\delta_{ij}$ — символ Кронекера) и $\overline{\mathcal{L}}=\overline{\mathcal{L}}(\eta_1,\ \eta_2,\ \ldots)$ — замкнутое линейное многообразие, порождённое $\eta_1,\,\eta_2,\,\ldots$ (т.е. совокупность случайных величин вида $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\eta_i$, $n\geqslant 1$, $a_i\in\mathbb{R}$ и их пределов в среднеквадратическом смысле). Доказать, что $\overline{\mathcal{L}}$ — гильбертово пространство и что система $\eta_1,\,\eta_2,\,\ldots$ является его базисом.

**48.** Пусть $\xi_1,\,\xi_2,\,\ldots$— последовательность ортогональных случайных величин, $S_n=\xi_1+\ldots+\xi_n$. Показать, что если $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mathrm{M}\,\xi_n^2<$ $<\infty$, то найдется такая случайная величина $S$, что $\mathrm{M}\,S^2<\infty$ и $\underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\,S_n=S$.

**49.** а) Пусть $\eta_1,\,\ldots,\,\eta_n$ — конечная ортонормированная система в $L^2_\Omega$ и $\xi$ — произвольная случайная величина из $L^2_\Omega$. Показать, что оптимальной (наилучшей в среднеквадратическом смысле) линейной оценкой $\xi$ по $\eta_1,\,\ldots,\,\eta_n$ является оценка

$$\hat{\xi}=\sum_{i=1}^{n}(\xi,\eta_i)\eta_i:\qquad \inf_{\zeta\in\mathcal{L}(\eta_1,\ldots,\eta_n)}\|\xi-\zeta\|=\|\xi-\hat{\xi}\|.$$

Дать геометрическую интерпретацию оценки $\hat{\xi}$. Показать, что если $\eta_1,\,\eta_2,\,\ldots$ — счётная ортонормированная система и $\xi\in L^2_\Omega$, то справедливо *неравенство Бесселя*:

$$\sum_{i=1}^{\infty}|(\xi,\eta_i)|^2\leqslant\|\xi\|^2. \tag{1}$$

При этом равенство в (1) достигается тогда и только тогда, когда $\xi=\underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\sum\limits_{i=1}^{n}(\xi,\eta_i)\eta_i$.

б) Говорят, что система случайных величин $\eta_1,\,\eta_2,\,\ldots$ образует *счётный ортонормированный базис* (иначе: *полную ортонормированную систему*) в $L^2_\Omega$, если:

1) $\eta_1,\ \eta_2,\ \ldots$ — ортонормированная система;
2) $\overline{\mathcal{L}}(\eta_1,\eta_2,\ldots) = L^2_\Omega$.

Гильбертово пространство со счётным ортонормированным базисом называется *сепарабельным.* Доказать, что:

1) Для сепарабельных гильбертовых пространств любой элемент $\xi$ представим в виде
$$\xi = \sum_{i=1}^{\infty}(\xi,\eta_i)\eta_i, \tag{2}$$
где сходимость ряда понимается в среднеквадратическом смысле, а именно:
$$\sum_{i=1}^{\infty}(\xi,\eta_i)\eta_i = \underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\sum_{i=1}^{n}(\xi,\eta_i)\eta_i.$$
2) Для любого элемента $\xi$ справедливо *равенство Парсеваля*:
$$\|\xi\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty}|(\xi,\eta_i)|^2. \tag{3}$$
3) Верно и обратное: если $\eta_1,\ \eta_2,\ \ldots$ — некоторая ортонормированная система и выполнено любое из условий (2) или (3), то эта система является базисом.

в) Пусть $\eta_1,\ \eta_2,\ \ldots$ — счётная ортонормированная система случайных величин из $L^2_\Omega$ (не обязательно являющаяся базисом), $\overline{\mathcal{L}} = \overline{\mathcal{L}}(\eta_1,\ \eta_2,\ \ldots)$ — замкнутое линейное многообразие, порождённое ими. Показать, что тогда существует и притом единственный элемент $\hat{\xi} \in \overline{\mathcal{L}}$, такой, что
$$\|\xi - \hat{\xi}\| = \inf_{\zeta\in\overline{\mathcal{L}}}\|\xi - \zeta\|.$$
При этом $\hat{\xi} = \underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\sum\limits_{i=1}^{n}(\xi,\eta_i)\eta_i$ и $\xi - \hat{\xi} \perp \zeta$ для любого элемента $\zeta \in \overline{\mathcal{L}}$.

Замечание. С точки зрения оценивания $\xi$ по $\eta_1$, $\eta_2,\ \ldots$ величина $\hat{\xi}$ является оптимальной (в среднеквадратическом смысле) линейной оценкой, ошибка которой равна $\Delta = \|\xi - \hat{\xi}\|^2 = \|\xi\|^2 - \sum\limits_{i=1}^{\infty}|(\xi,\eta_i)|^2$.

## IV. Условные математические ожидания. Задача регрессии

**50.** Вычислить $\mathrm{M}_{\xi}\sin\xi$.

**51.** Пусть $\xi,\ \eta$ — пара случайных величин, имеющих совместную плотность распределения $p_{\xi\eta}(x,y)$, а $f(x)$ — такая борелевская функция, что $\mathrm{M}\,|f(\eta)| < \infty$. Показать, что $\mathrm{M}_{\,\xi} f(\eta) = g(\xi)$, где

$$g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) p_{\eta|\xi=x}(y)\,dy,$$

$$p_{\eta|\xi=x}(y) = \begin{cases} \frac{p_{\xi\eta}(x,y)}{p_\xi(x)}, & \text{если } p_\xi(x) \neq 0, \\ 0, & \text{если } p_\xi(x) = 0 \end{cases}$$

— условная плотность распределения случайной величины $\eta$ при условии, что случайная величина $\xi$ приняла значение $x$.

**52.** Пусть $\eta$, $\xi_1$, $\ldots$, $\xi_n$ — случайные величины из $L^2_\Omega$. Найти такую функцию $f(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, которая минимизирует $\mathrm{M}\,(\eta - f(\xi_1, \ldots, \xi_n))^2$, т.е. даёт наилучший в смысле $L^2_\Omega$ прогноз значений $\eta$ по наблюдаемым значениям случайных величин $\xi_1, \ldots, \xi_n$.

**53.** Доказать, что функция, дающая наилучшую в смысле $L^2_\Omega$ оценку значения $\eta$ при известных $\xi_1$, $\ldots$, $\xi_n$, в случае многомерного нормального распределения вектора $(\eta, \xi_1, \ldots, \xi_n)$ является линейной функцией от $\xi_1, \ldots, \xi_n$.

## V. Цепи Маркова

**54.** С. 5.49. **55.** С. 5.50. **56.** С. 5.52. **57.** С. 5.53.

**58.** С. 5.82. **59.** С. 5.89.

**60.** Пусть на пространстве состояний $X = \{1, \ldots, N\}$ марковской цепи $\{x(n),\, n = 0, 1, \ldots\}$ задана функция $f(x)$. Положим

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(x(k)).$$

Введём матрицу $P(t)$ с элементами

$$p_{jk}(t) = p_{jk} \exp(itf(k)), \quad j,k = 1, \ldots, N$$

($p_{jk}$ — вероятности перехода за один шаг в цепи $x(n)$).

Пусть $\pi = \pi(0)$ — начальное распределение цепи Маркова $x(n)$, $e$ — вектор-столбец, все компоненты которого равны 1. Доказать, что $M\, \exp(itS_n) = \pi P^n(t) e$.

---

Задания составил С.В. Резниченко, к.ф.-м.н., доцент