

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
Д.А. Зубцов
10 декабря 2013 г.

ПРОГРАММА И ЗАДАНИЯ

по дисциплине:	<u>ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ</u>	
по направлению:	<u>010900 «Прикладные математика и физика»</u>	
факультеты:	<u>все факультеты</u>	
кафедра:	<u>высшей математики</u>	
курс:	<u>II</u>	
Трудоёмкость:	<u>обязательная часть — 3 зач. ед., вариативная часть — 1 зач. ед., дополнительная за сложность — 1 зач. ед.</u>	
семестр:	<u>4</u>	
лекции:	<u>34 часа</u>	
практические (семинарские) занятия:	<u>34 часа</u>	Экзамен — <u>4 семестр</u>
лабораторные занятия:	<u>нет</u>	Самостоятельная работа — <u>1 час</u> в неделю
ВСЕГО ЧАСОВ	<u>— 68</u>	

Программу составили:

М.В. Балашов, д.ф.-м.н., профессор,
Л.Н. Знаменская, д.ф.-м.н., профессор,
Г.Е. Иванов, д.ф.-м.н., профессор,
А.Ю. Петрович, к.ф.-м.н., доцент

Программа принята на заседании кафедры
высшей математики 3 декабря 2013 г.

Заведующий кафедрой Е.С. Половинкин

П Р О Г Р А М М А (базовый уровень)

1. Лемма Римана. Тригонометрические ряды Фурье для абсолютно интегрируемых функций, стремление их коэффициентов к нулю. Представление частичной суммы ряда Фурье интегралом через ядро Дирихле. Принцип локализации. Признаки Дини и Липшица сходимости рядов Фурье, следствия из признака Липшица. Равномерная сходимость рядов Фурье. Почленное дифференцирование и интегрирование рядов Фурье. Порядок убывания коэффициентов Фурье. Ряды Фурье в комплексной форме.
2. Суммирование рядов Фурье методом средних арифметических. Теоремы Вейерштрасса о приближении непрерывных функций тригонометрическими и алгебраическими многочленами.
3. Метрические и линейные нормированные пространства. Сходимость в метрических пространствах. Полные метрические пространства, полные линейные нормированные (банаховы) пространства. Полнота пространства $C[a,b]$. Полные системы в линейных нормированных пространствах.
4. Бесконечномерные евклидовы пространства. Ряд Фурье по ортонормированной системе. Минимальное свойство коэффициентов Фурье, неравенство Бесселя. Равенство Парсеваля. Ортонормированный базис в бесконечномерном евклидовом пространстве.
5. Тригонометрические ряды Фурье для функций, абсолютно интегрируемых с квадратом. Полнота тригонометрической системы, равенство Парсеваля.
6. Собственные интегралы, зависящие от параметра, их свойства. Несобственные интегралы, зависящие от параметра; равномерная сходимость. Критерий Коши равномерной сходимости, признак Вейерштрасса. Непрерывность, дифференцирование и интегрирование по параметру несобственных интегралов. Применение теории интегралов, зависящих от параметра, к вычислению определенных интегралов. Интеграл Дирихле.
7. Интеграл Фурье. Преобразование Фурье абсолютно интегрируемой функции и его свойства: непрерывность, стремление к нулю на бесконечности. Формулы обращения. Преобразование Фурье производной и производная преобразования Фурье.

8. Пространство основных функций D и пространство обобщенных функций D' . Регулярные и сингулярные обобщенные функции. Дельта-функция. Умножение обобщенной функции на бесконечно дифференцируемую. Сходимость в пространстве обобщенных функций. Дифференцирование обобщенных функций.

П Р О Г Р А М М А (повышенный уровень)

1. Лемма Римана. Тригонометрические ряды Фурье для абсолютно интегрируемых функций, стремление их коэффициентов к нулю. Представление частичной суммы ряда Фурье интегралом через ядро Дирихле. Принцип локализации. Признаки Дини и Липшица сходимости рядов Фурье, следствия из признака Липшица. Равномерная сходимость рядов Фурье. Поэлементное дифференцирование и интегрирование рядов Фурье. Порядок убывания коэффициентов Фурье. Ряды Фурье в комплексной форме.
2. Суммирование рядов Фурье методом средних арифметических. Теоремы Вейерштрасса о приближении непрерывных функций тригонометрическими и алгебраическими многочленами.
3. Метрические и линейные нормированные пространства. Сходимость в метрических пространствах. Полные метрические пространства, полные линейные нормированные (банаховы) пространства. Полнота пространства $C[a, b]$. Неполнота пространств непрерывных на отрезке функций с интегральными нормами. Сравнение норм: сравнение равномерной сходимости, сходимостей в среднем и в среднем квадратичном. Полные системы в линейных нормированных пространствах.
4. Бесконечномерные евклидовы пространства. Ряд Фурье по ортонормированной системе. Минимальное свойство коэффициентов Фурье, неравенство Бесселя. Равенство Парсеваля. Ортонормированный базис в бесконечномерном евклидовом пространстве. Гильбертовы пространства. Необходимое и достаточное условие для того, чтобы последовательность чисел являлась последовательностью коэффициентов Фурье элемента гильбертова пространства с фиксированным ортонормированным базисом. Связь понятий полноты и замкнутости ортонормированной системы.

5. Тригонометрические ряды Фурье для функций, абсолютно интегрируемых с квадратом. Полнота тригонометрической системы, равенство Парсевала. Полнота системы полиномов Лежандра.
6. Собственные интегралы, зависящие от параметра, их свойства. Несобственные интегралы, зависящие от параметра; равномерная сходимость. Критерий Коши равномерной сходимости, признак Вейерштрасса. Признак Дирихле. Непрерывность, дифференцирование и интегрирование по параметру несобственных интегралов. Применение теории интегралов, зависящих от параметра, к вычислению определенных интегралов. Интегралы Дирихле и Лапласа. Интегралы Эйлера — гамма и бета-функции. Выражение бета-функции через гамма-функцию.
7. Интеграл Фурье. Представление функции интегралом Фурье. Преобразование Фурье абсолютно интегрируемой функции и его свойства: непрерывность, стремление к нулю на бесконечности. Формулы обращения. Преобразование Фурье производной и производная преобразования Фурье.
8. Пространство основных функций D и пространство обобщенных функций D' . Регулярные и сингулярные обобщенные функции. Дельта-функция. Умножение обобщенной функции на бесконечно дифференцируемую. Сходимость в пространстве обобщенных функций. Дифференцирование обобщенных функций.
9. Пространство основных функций S и пространство обобщенных функций S' . Преобразование Фурье обобщенных функций. Преобразование Фурье производной и производная преобразования Фурье.

Литература

Основная

1. *Иванов Г.Е.* Лекции по математическому анализу. Ч. 2. – М.: МФТИ, 2004, 2011.
2. *Петрович А.Ю.* Лекции по математическому анализу. Ч. 3. Кратные интегралы. Гармонический анализ. – М.: МФТИ, 2013.
3. *Тер-Крикоров А.М., Шабунин М.И.* Курс математического анализа. – М.: МФТИ, 1997; М.: Физматлит, 2003–2007.

Дополнительная

4. *Бесов О.В.* Лекции по математическому анализу. Ч. 2. – М.: МФТИ, 2005.

5. *Яковлев Г.Н.* Лекции по математическому анализу. Ч. 2, 3. – М.: Физматлит, 2004.
6. *Кудрявцев Л.Д.* Краткий курс математического анализа. – М.: Наука, 1989; М.: Физматлит, 2002.
7. *Никольский С.М.* Курс математического анализа. Т. 1, 2. – М.: Наука, 1983.
8. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. – 6-е изд. – М.: Наука, 1966.
9. *Ильин В.А., Позняк Э.Г.* Основы математического анализа. – 4-е изд. – М.: Наука, 1982.
10. *Архипов Г.И., Садовничий В.А., Чубариков В.Н.* Лекции по математическому анализу. – 2-е изд. – М.: Высш. шк., 2000.

З А Д А Н И Я

Литература

1. Сборник задач по математическому анализу. Интегралы. Ряды: учебное пособие/ под ред. Л. Д. Кудрявцева. – М.: Наука. 1986. (Цитируется С.2).
2. Сборник задач по математическому анализу. Функции нескольких переменных: учебное пособие/ под ред. Л. Д. Кудрявцева. – М.: Наука. 1995. (Цитируется С.3)

ЗАМЕЧАНИЯ

1. Задачи с подчёркнутыми номерами рекомендовано разобрать на семинарских занятиях.
2. Задачи и разделы, отмеченные звёздочкой (*), являются необязательными для базового уровня.
3. Задачи, отмеченные двумя звёздочками (**), являются необязательными для повышенного уровня.

ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 17–22 марта)

I. Тригонометрические ряды Фурье

- С.2. §22: 1(3); 4; 10; 12; 27; 30; 34*; 43 (в каждом примере построить график суммы ряда и исследовать ряд на равномерную сходимость на \mathbb{R}).
- С.2. §22: 58*; 60(2)*; 65*; 66; 72; 110; 111(4).

1. Сходятся ли равномерно на \mathbb{R} ряды Фурье функции $f(x) = 1 + \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$) по системам

а) $\{\sin(2k-1)x\}_{k=1}^{\infty}$; б) $\{\cos(2k-1)x\}_{k=1}^{\infty}$;

в) $\{\cos 2kx\}_{k=0}^{\infty}$; г) $\{\sin 2kx\}_{k=1}^{\infty}$.

Построить графики сумм этих рядов.

2. Не вычисляя коэффициентов Фурье, оценить порядок их убывания для следующих функций, заданных на отрезке $[-\pi, \pi]$:

а) x^7 ; б) x^{2014} ;

в) $(\pi - |x|) \sin x$; г) $(\pi^2 - x^2) \sin^2 x$.

С.2. §22: 115; 121; 138*.

3. Построить график суммы ряда Фурье на $[-\pi, \pi]$ функции $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ и найти для этого ряда $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$.

С.2. §22: 118.

С.2. §16: 47(2)*; 48(1,3).

II. Функциональные пространства

4. Докажите, что если $f(x)$ — функция, непрерывная на отрезке $[a, b]$, а $\{f_n(x)\}$ — последовательность функций, непрерывных на отрезке $[a, b]$, то между разными видами сходимости имеются связи, указанные на схеме (при перечеркнутой стрелке привести соответствующий пример):

$$\begin{array}{ccccc} \{f_n(x)\} & & \{f_n(x)\} & & \{f_n(x)\} \\ \text{сходится к } f(x) & \xrightarrow{\quad} & \text{сходится к } f(x) & \xrightarrow{\quad} & \text{сходится к } f(x) \\ \text{равномерно} & \not\leftarrow & \text{по норме } L^2 & \not\leftarrow & \text{по норме } L^1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \not\leftarrow \searrow & \uparrow \downarrow & \not\leftarrow \not\leftarrow \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \{f_n(x)\} \text{ сходится} \\ \text{к } f(x) \text{ поточечно} \end{array}$$

С.3. §18: 22; 92*; 98*.

С.3. §19: 116; 121(2).

5. а)* Докажите, что система функций $\{1, x, x^2, \dots, x^k, \dots\}$ полна в пространстве $CL_2([a, b])$.
 б) Докажите, что система функций $\{x, x^3, \dots, x^{2k+1}, \dots\}$ полна в пространстве $C([1, 2])$. Будет ли она полна в пространстве $C([0, 1])$? Рассмотреть те же вопросы для системы функций

$\{1, x, x^3, \dots, x^{2k+1}, \dots\}$.

6. Полна ли система $\{\cos 2kx\}_{k=0}^{\infty}$ в пространстве

а) $C\left(\left[0; \frac{\pi}{2}\right]\right)$; б) $C([0; 2])$?

7** Полна ли система функций $\{1, \frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}, \dots, \frac{1}{x^k}, \dots\}$ в пространстве $C([1, 10])$?

8** Полна ли система $\{e^{kx}\}_{k=0}^{\infty}$ в пространстве $C([-3, 3])$?

$23+9^*+2^{**}$

ВТОРОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 12–17 мая)

I. Собственные интегралы, зависящие от параметра

С.3. §13: $2(3)$; $5(1)^*$; $8(2)$; $14(3)$; $18(4)^*$.

С.3. §15: $1(4)$ (применить перестановку двух собственных интегралов).

II. Несобственные интегралы, зависящие от параметра

С.3. §14: $1(1)$ — исследовать также при $\alpha \in (1; +\infty)$;

$1(2)$ — исследовать также при $\alpha \in (0; 1)$.

С.3. §14: $6(3)$; $7(3,6)$; $8(5)$.

1* Вычислить интегралы Лапласа:

а) $\int_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{1+x^2} dx$; б) $\int_0^{+\infty} \frac{x \sin \alpha x}{1+x^2} dx$.

С.3. §15: $2(1,6)$; $6(2)$; $13(3)$; $15(4)$.

С.3. §16: $7(2)$; $8(3)^*$; $9(2)$; $10(2)^*$; $12(8)$.

III. Интеграл Фурье. Преобразование Фурье

С.2. §12: 248 ; 250 ; 254 .

С.3. §17: $1(3)$; $2(2)$; $6(1)$.

2. Найти преобразование Фурье функции

а) $f(x) = e^{-\alpha|x|}$, $\alpha > 0$; б) $f(x) = \frac{\alpha}{\alpha^2 + x^2}$, $\alpha > 0$;

в)* $f(x) = \frac{\sin x}{x}$; г)** $f(x) = \frac{x \cos x}{1+x^2}$.

С.3. §17: $8(2,6)$; $14(1,3)$; $17(1)^*$.

IV. Обобщённые функции

С.3. §21: 58^* ; 60 .

3. Доказать, что в D' :

а) $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2} = \pi \delta(x)$;

б) $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{1}{x} \sin \frac{x}{\varepsilon} = \pi \delta(x)$.

С.3. §21: 71; 84*.

4. Найти в D' $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{x\varepsilon}{(x^2 + \varepsilon^2)^2}$.

5. Найти первые и вторые производные в D' :

а) $\theta(x) \cdot \sin x$;

б) $|x|$;

в) $|x| \cdot \cos x$.

6. Упростить в D' выражения:

а) $(\operatorname{ch} x + e^x \sin x) \delta(x)$;

б) $\left(\frac{1 + \sin 2x}{x^2 + 2} - 3x \right) \delta'(x)$;

в) $e^{x^2} \delta''(x)$.

С.3. §21: 92*; 100*; 105*; 116*.

7. Найти преобразование Фурье в S' :

а)* $\theta(1 - |x|)$;

б)* 1;

в)* x^2 ;

г)** $\sin x$.

35+15*+2**

Задания составила

С.С. Самарова, к.ф.-м.н., доцент