УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
Д.А. Зубцов
10 декабря 2013 г.

ПРОГРАММА И ЗАДАНИЯ

по дисциплине:	**ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ**
по направлению	010900 «Прикладные математика и физика»
факультеты:	**все факультеты**
кафедра:	**высшей математики**
курс:	II
Трудоёмкость:	обязательная часть — 3 зач. ед., вариативная часть— 1 зач. ед., дополнительная за сложность — 1 зач. ед.
семестр:	4
лекции:	34 часа
практические (семинарские) занятия:	34 часа
лабораторные занятия:	нет
ВСЕГО ЧАСОВ	— 68

Экзамен — 4 семестр

Самостоятельная работа — 1 час в неделю

Программу составили:

М.В. Балашов, д.ф.-м.н., профессор,
Л.Н. Знаменская, д.ф.-м.н., профессор,
Г.Е. Иванов, д.ф.-м.н., профессор,
А.Ю. Петрович, к.ф.-м.н., доцент

Программа принята на заседании кафедры высшей математики 3 декабря 2013 г.

Заведующий кафедрой Е.С. Половинкин

П Р О Г Р А М М А
(базовый уровень)

1. Лемма Римана. Тригонометрические ряды Фурье для абсолютно интегрируемых функций, стремление их коэффициентов к нулю. Представление частичной суммы ряда Фурье интегралом через ядро Дирихле. Принцип локализации. Признаки Дини и Липшица сходимости рядов Фурье, следствия из признака Липшица. Равномерная сходимость рядов Фурье. Почленное дифференцирование и интегрирование рядов Фурье. Порядок убывания коэффициентов Фурье. Ряды Фурье в комплексной форме.
2. Суммирование рядов Фурье методом средних арифметических. Теоремы Вейерштрасса о приближении непрерывных функций тригонометрическими и алгебраическими многочленами.
3. Метрические и линейные нормированные пространства. Сходимость в метрических пространствах. Полные метрические пространства, полные линейные нормированные (банаховы) пространства. Полнота пространства $C[a,b]$. Полные системы в линейных нормированных пространствах.
4. Бесконечномерные евклидовы пространства. Ряд Фурье по ортонормированной системе. Минимальное свойство коэффициентов Фурье, неравенство Бесселя. Равенство Парсеваля. Ортонормированный базис в бесконечномерном евклидовом пространстве.
5. Тригонометрические ряды Фурье для функций, абсолютно интегрируемых с квадратом. Полнота тригонометрической системы, равенство Парсеваля.
6. Собственные интегралы, зависящие от параметра, их свойства. Несобственные интегралы, зависимые от параметра; равномерная сходимость. Критерий Коши равномерной сходимости, признак Вейерштрасса. Непрерывность, дифференцирование и интегрирование по параметру несобственных интегралов. Применение теории интегралов, зависящих от параметра, к вычислению определенных интегралов. Интеграл Дирихле.
7. Интеграл Фурье. Преобразование Фурье абсолютно интегрируемой функции и его свойства: непрерывность, стремление к нулю на бесконечности. Формулы обращения. Преобразование Фурье производной и производная преобразования Фурье.

8. Пространство основных функций D и пространство обобщенных функций D'. Регулярные и сингулярные обобщенные функции. Дельта-функция. Умножение обобщенной функции на бесконечно дифференцируемую. Сходимость в пространстве обобщенных функций. Дифференцирование обобщенных функций.

П Р О Г Р А М М А
(повышенный уровень)

1. Лемма Римана. Тригонометрические ряды Фурье для абсолютно интегрируемых функций, стремление их коэффициентов к нулю. Представление частичной суммы ряда Фурье интегралом через ядро Дирихле. Принцип локализации. Признаки Дини и Липшица сходимости рядов Фурье, следствия из признака Липшица. Равномерная сходимость рядов Фурье. Почленное дифференцирование и интегрирование рядов Фурье. Порядок убывания коэффициентов Фурье. Ряды Фурье в комплексной форме.
2. Суммирование рядов Фурье методом средних арифметических. Теоремы Вейерштрасса о приближении непрерывных функций тригонометрическими и алгебраическими многочленами.
3. Метрические и линейные нормированные пространства. Сходимость в метрических пространствах. Полные метрические пространства, полные линейные нормированные (банаховы) пространства. Полнота пространства $C[a,b]$. Неполнота пространств непрерывных на отрезке функций с интегральными нормами. Сравнение норм: сравнение равномерной сходимости, сходимостей в среднем и в среднем квадратичном. Полные системы в линейных нормированных пространствах.
4. Бесконечномерные евклидовы пространства. Ряд Фурье по ортонормированной системе. Минимальное свойство коэффициентов Фурье, неравенство Бесселя. Равенство Парсеваля. Ортонормированный базис в бесконечномерном евклидовом пространстве. Гильбертовы пространства. Необходимое и достаточное условие для того, чтобы последовательность чисел являлась последовательностью коэффициентов Фурье элемента гильбертова пространства с фиксированным ортонормированным базисом. Связь понятий полноты и замкнутости ортонормированной системы.

5. Тригонометрические ряды Фурье для функций, абсолютно интегрируемых с квадратом. Полнота тригонометрической системы, равенство Парсеваля. Полнота системы полиномов Лежандра.
6. Собственные интегралы, зависящие от параметра, их свойства. Несобственные интегралы, зависящие от параметра; равномерная сходимость. Критерий Коши равномерной сходимости, признак Вейерштрасса. Признак Дирихле. Непрерывность, дифференцирование и интегрирование по параметру несобственных интегралов. Применение теории интегралов, зависящих от параметра, к вычислению определенных интегралов. Интегралы Дирихле и Лапласа. Интегралы Эйлера — гамма и бета-функции. Выражение бета-функции через гамма-функцию.
7. Интеграл Фурье. Представление функции интегралом Фурье. Преобразование Фурье абсолютно интегрируемой функции и его свойства: непрерывность, стремление к нулю на бесконечности. Формулы обращения. Преобразование Фурье производной и производная преобразования Фурье.
8. Пространство основных функций D и пространство обобщенных функций D'. Регулярные и сингулярные обобщенные функции. Дельта-функция. Умножение обобщенной функции на бесконечно дифференцируемую. Сходимость в пространстве обобщенных функций. Дифференцирование обобщенных функций.
9. Пространство основных функций S и пространство обобщенных функций S'. Преобразование Фурье обобщенных функций. Преобразование Фурье производной и производная преобразования Фурье.

Литература

Основная

1. *Иванов Г.Е.* Лекции по математическому анализу. Ч. 2. – М.: МФТИ, 2004, 2011.
2. *Петрович А.Ю.* Лекции по математическому анализу. Ч. 3. Кратные интегралы. Гармонический анализ. – М.: МФТИ, 2013.
3. *Тер-Крикоров А.М., Шабунин М.И.* Курс математического анализа. – М.: МФТИ, 1997; М.: Физматлит, 2003–2007.

Дополнительная

4. *Бесов О.В.* Лекции по математическому анализу. Ч. 2. – М.: МФТИ, 2005.

5. *Яковлев Г.Н.* Лекции по математическому анализу. Ч. 2, 3. – М.: Физматлит, 2004.
6. *Кудрявцев Л.Д.* Краткий курс математического анализа. – М.: Наука, 1989; М.: Физматлит, 2002.
7. *Никольский С.М.* Курс математического анализа. Т. 1, 2. – М.: Наука, 1983.
8. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. – 6-е изд. – М.: Наука, 1966.
9. *Ильин В.А., Позняк Э.Г.* Основы математического анализа. – 4-е изд. – М.: Наука, 1982.
10. *Архипов Г.И., Садовничий В.А., Чубариков В.Н.* Лекции по математическому анализу. – 2-е изд. – М.: Высш. шк., 2000.

З А Д А Н И Я

Литература

1. Сборник задач по математическому анализу. Интегралы. Ряды: учебное пособие/ под ред. Л. Д. Кудрявцева. – М.: Наука. 1986. (Цитируется С.2).
2. Сборник задач по математическому анализу. Функции нескольких переменных: учебное пособие/ под ред. Л. Д. Кудрявцева. – М.: Наука. 1995. (Цитируется С.3)

ЗАМЕЧАНИЯ

1. Задачи с подчёркнутыми номерами рекомендовано разобрать на семинарских занятиях.
2. Задачи и разделы, отмеченные звёздочкой (*), являются необязательными для базового уровня.
3. Задачи, отмеченные двумя звёздочками (**), являются необязательными для повышенного уровня.

ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 17–22 марта)

I. Тригонометрические ряды Фурье

С.2. §22: 1(3); 4; 10; <u>12</u>; 27; <u>30</u>; 34*; 43 (в каждом примере построить график суммы ряда и исследовать ряд на равномерную сходимость на $\mathbb{R}$).

С.2. §22: 58*; 60(2)*; 65*; 66; 72; 110; 111(4).

1. Сходятся ли равномерно на $\mathbb{R}$ ряды Фурье функции $f(x) = 1 + \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$ $(0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2})$ по системам

а) $\{\sin(2k-1)x\}_{k=1}^{\infty}$; б) $\{\cos(2k-1)x\}_{k=1}^{\infty}$;

в) $\{\cos 2kx\}_{k=0}^{\infty}$; г) $\{\sin 2kx\}_{k=1}^{\infty}$.

Построить графики сумм этих рядов.

2. Не вычисляя коэффициентов Фурье, оценить порядок их убывания для следующих функций, заданных на отрезке $[-\pi,\pi]$:

а) x^7; б) x^{2014};

в) $(\pi - |x|)\sin x$; г) $(\pi^2 - x^2)\sin^2 x$.

С.2. §22: 115; 121; 138*.

3. Построить график суммы ряда Фурье на $[-\pi,\pi]$ функции $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$ и найти для этого ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$.

С.2. §22: 118.

С.2. §16: 47(2)*; 48(1,3).

II. Функциональные пространства

4. Докажите, что если $f(x)$ — функция, непрерывная на отрезке $[a,b]$, а $\{f_n(x)\}$ — последовательность функций, непрерывных на отрезке $[a,b]$, то между разными видами сходимости имеются связи, указанные на схеме (при перечеркнутой стрелке привести соответствующий пример):

$$\begin{array}{ccccc}
\begin{array}{c}\{f_n(x)\}\\ \text{сходится к } f(x)\\ \text{равномерно}\end{array} & \begin{array}{c}\longrightarrow\\ \not\longleftarrow\end{array} & \begin{array}{c}\{f_n(x)\}\\ \text{сходится к } f(x)\\ \text{по норме } L^2\end{array} & \begin{array}{c}\longrightarrow\\ \not\longleftarrow\end{array} & \begin{array}{c}\{f_n(x)\}\\ \text{сходится к } f(x)\\ \text{по норме } L^1\end{array} \\
\not\nwarrow\ \searrow & & \not\uparrow\ \not\downarrow & & \not\swarrow\ \not\nearrow \\
& & \begin{array}{c}\{f_n(x)\}\ \text{сходится}\\ \text{к } f(x) \text{ поточечно}\end{array} & &
\end{array}$$

С.3. §18: 22; 92*; 98*.

С.3. §19: 116; 121(2).

5. а)* Докажите, что система функций $\{1,\, x,\, x^2,\, \ldots,\, x^k,\, \ldots\}$ полна в пространстве $CL_2([a,b])$.

б) Докажите, что система функций $\{x,\, x^3,\, \ldots,\, x^{2k+1},\, \ldots\}$ полна в пространстве $C([1,2])$. Будет ли она полна в пространстве $C([0,1])$? Рассмотреть те же вопросы для системы функций

$\{1,\, x,\, x^3,\, \ldots,\, x^{2k+1},\, \ldots\}$.

6. Полна ли система $\{\cos 2kx\}_{k=0}^{\infty}$ в пространстве

а) $C\left(\left[0; \frac{\pi}{2}\right]\right)$; б) $C([0;2])$?

7** Полна ли система функций $\{1,\, \frac{1}{x},\, \frac{1}{x^2},\, \ldots,\, \frac{1}{x^k},\, \ldots\}$ в пространстве $C([1{,}10])$?

8** Полна ли система $\{e^{kx}\}_{k=0}^{\infty}$ в пространстве $C([-3{,}3])$?

$\boxed{23+9^*+2^{**}}$

ВТОРОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 12–17 мая)

I. Собственные интегралы, зависящие от параметра

С.3. §13: 2(3); 5(1)*; 8(2); 14(3); 18(4)*.

С.3. §15: 1(4) (применить перестановку двух собственных интегралов).

II. Несобственные интегралы, зависящие от параметра

С.3. §14: 1(1) — исследовать также при $\alpha \in (1; +\infty)$;
1(2) — исследовать также при $\alpha \in (0; 1)$.

С.3. §14: 6(3); 7(3,6); 8(5).

1* Вычислить интегралы Лапласа:

а) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{1+x^2}\, dx$; б) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x \sin \alpha x}{1+x^2}\, dx$.

С.3. §15: 2(1,6); 6(2); 13(3); 15(4).

С.3. §16: 7(2); 8(3)*; 9(2); 10(2)*; 12(8).

III. Интеграл Фурье. Преобразование Фурье

С.2. §12: 248; 250; 254.

С.3. §17: 1(3); 2(2); 6(1).

2. Найти преобразование Фурье функции

а) $f(x) = e^{-\alpha|x|}$, $\alpha > 0$; б) $f(x) = \dfrac{\alpha}{\alpha^2 + x^2}$, $\alpha > 0$;

в)* $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$; г)** $f(x) = \dfrac{x \cos x}{1+x^2}$.

С.3. §17: 8(2,6); 14(1,3); 17(1)*.

IV. Обобщённые функции

С.3. §21: 58*; 60.

3. Доказать, что в D':

а) $\lim\limits_{\varepsilon\to+0} \dfrac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2} = \pi\delta(x)$; б) $\lim\limits_{\varepsilon\to+0} \dfrac{1}{x}\sin\dfrac{x}{\varepsilon} = \pi\delta(x)$.

С.З. §21: 71; 84*.

4. Найти в D' $\lim\limits_{\varepsilon\to+0} \dfrac{x\varepsilon}{(x^2+\varepsilon^2)^2}$.

5. Найти первые и вторые производные в D':

а) $\theta(x)\cdot\sin x$; б) $|x|$; в) $|x|\cdot\cos x$.

6. Упростить в D' выражения:

а) $(\operatorname{ch} x + e^x \sin x)\delta(x)$; б) $\left(\dfrac{1+\sin 2x}{x^2+2} - 3x\right)\delta'(x)$;

в) $e^{x^2}\delta''(x)$.

С.З. §21: 92*; 100*; 105*; 116*.

7. Найти преобразование Фурье в S':

а)* $\theta(1-|x|)$; б)* 1; в)* x^2; г)** $\sin x$.

35+15*+2**

Задания составила С.С. Самарова, к.ф.-м.н., доцент