УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
Д.А. Зубцов
10 декабря 2013 г.

ПРОГРАММА И ЗАДАНИЯ

по дисциплине:	**Многомерный анализ. Интегралы и ряды**		
по направлению	010900 «Прикладные математика и физика»		
факультеты:	**для всех факультетов**		
кафедра:	**высшей математики**		
курс:	I		
Трудоёмкость:	обязательная часть — 5 зач. ед., вариативная часть— 1 зач. ед., дополнительная за сложность — 1 зач. ед.		
семестр:	2		
лекции:	68 часов		
практические (семинарские) занятия:	68 часов	Экзамен —	2 семестр
лабораторные занятия:	нет	Самостоятельная работа	— 2 часа в неделю
ВСЕГО ЧАСОВ	— 136		

Программу составили:

О.В. Бесов, д.ф.-м.н., профессор,
Б.И. Голубов, д.ф.-м.н., профессор,
Р.Н. Карасёв, д.ф.-м.н., профессор,
В.Ж. Сакбаев, д.ф.-м.н., доцент,
Б.В. Трушин, к.ф.-м.н., доцент

Программа принята на заседании кафедры
высшей математики 1 декабря 2013 г.

Заведующий кафедрой Е.С. Половинкин

ПРОГРАММА
(базовый уровень)

1. Точечное n-мерное пространство. Расстояние между точками, его свойства. Предел последовательности точек в n-мерном евклидовом пространстве. Теорема Больцано–Вейерштрасса и критерий Коши сходимости последовательности. Внутренние, предельные, изолированные точки множества, точки прикосновения. Открытые и замкнутые множества, их свойства. Внутренность, замыкание и граница множества.
2. Предел числовой функции нескольких переменных. Определения в терминах окрестностей и в терминах последовательностей. Предел функции по множеству. Пределы по направлениям. Повторные пределы.
3. Непрерывность функции нескольких переменных в точке и по множеству. Непрерывность сложной функции. Свойства функций, непрерывных на компакте — ограниченность, достижимость нижней и верхней граней, равномерная непрерывность. Теорема о промежуточных значениях функции, непрерывной в области.
4. Частные производные функции нескольких переменных. Дифференцируемость функции нескольких переменных в точке, дифференциал. Необходимые условия дифференцируемости, достаточные условия дифференцируемости функции нескольких переменных. Дифференцируемость сложной функции. Инвариантность формы дифференциала относительно замены переменных. Градиент, его независимость от выбора прямоугольной системы координат. Производная по направлению.
5. Частные производные высших порядков. Независимость смешанной частной производной от порядка дифференцирования. Формула Тейлора для функций нескольких переменных с остаточным членом в форме Пеано (*без доказательства*).
6. Теорема о неявной функции, заданной одним уравнением. Непрерывно дифференцируемые отображения конечномерных пространств, матрица Якоби, якобиан.
7. Мера Жордана в n-мерном евклидовом пространстве. Критерий измеримости (*без доказательства*). Измеримость объединения, пересечения и разности измеримых множеств. Конечная аддитивность меры Жордана.

8. Определенный интеграл Римана. Суммы Римана, суммы Дарбу, критерий интегрируемости. Интегрируемость непрерывной функции, интегрируемость монотонной функции, интегрируемость ограниченной функции с конечным числом точек разрыва. Свойства интегрируемых функций: аддитивность интеграла по отрезкам, линейность интеграла, интегрируемость произведения функций, интегрируемость модуля интегрируемой функции, интегрирование неравенств, теорема о среднем. Свойства интеграла с переменным верхним пределом — непрерывность, дифференцируемость. Формула Ньютона–Лейбница. Интегрирование подстановкой и по частям в определенном интеграле.
9. Геометрические приложения определенного интеграла — площадь криволинейной трапеции, объем тела вращения, длина кривой.
10. Криволинейный интеграл первого рода и его свойства. Ориентация гладкой кривой. Криволинейный интеграл второго рода и его свойства.
11. Несобственный интеграл (случай неограниченной функции и случай бесконечного промежутка интегрирования). Критерий Коши сходимости интеграла. Интегралы от знакопостоянных функций, признаки сравнения сходимости. Интегралы от знакопеременных функций: сходимость и абсолютная сходимость. Признаки Дирихле и Абеля сходимости интегралов.
12. Числовые ряды. Критерий Коши сходимости ряда. Знакопостоянные ряды: признаки сравнения сходимости, признаки Даламбера и Коши, интегральный признак. Знакопеременные ряды: сходимость и абсолютная сходимость.
13. Равномерная сходимость функциональных последовательностей и рядов. Критерий Коши равномерной сходимости. Непрерывность суммы равномерно сходящегося ряда из непрерывных функций. Почленное интегрирование и дифференцирование функциональных последовательностей и рядов. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости функциональных рядов.
14. Степенные ряды с комплексными членами. Первая теорема Абеля (на потоке О.В. Бесова — поведение степенного ряда внутри и вне круга сходимости). Круг и радиус сходимости. Характер сходимости степенного ряда в круге сходимости.

15. Степенные ряды с действительными членами. Сохранение радиуса сходимости при почленном интегрировании и дифференцировании степенного ряда. Бесконечная дифференцируемость суммы степенного ряда на интервале сходимости. Единственность разложения функции в степенной ряд, ряд Тейлора. Формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме, в форме Лагранжа и форме Коши. Разложение в ряд Тейлора основных элементарных функций.

ПРОГРАММА
(повышенный уровень)

1. Точечное n-мерное пространство. Расстояние между точками, его свойства. Предел последовательности точек в n-мерном евклидовом пространстве. Теорема Больцано–Вейерштрасса и критерий Коши сходимости последовательности. Внутренние, предельные, изолированные точки множества, точки прикосновения. Открытые и замкнутые множества, их свойства. Внутренность, замыкание и граница множества.
2. Предел числовой функции нескольких переменных. Определения в терминах окрестностей и в терминах последовательностей. Предел функции по множеству. Пределы по направлениям. Повторные пределы. Исследование предела функции двух переменных при помощи перехода к полярным координатам.
3. Непрерывность функции нескольких переменных в точке и по множеству. Непрерывность сложной функции. Свойства функций, непрерывных на компакте — ограниченность, достижимость нижней и верхней граней, равномерная непрерывность. Теорема о промежуточных значениях функции, непрерывной в области.
4. Частные производные функции нескольких переменных. Дифференцируемость функции нескольких переменных в точке, дифференциал. Необходимые условия дифференцируемости, достаточные условия дифференцируемости. Дифференцируемость сложной функции. Инвариантность формы дифференциала относительно замены переменных. Градиент, его независимость от выбора прямоугольной системы координат. Производная по направлению.

5. Частные производные высших порядков. Независимость смешанной частной производной от порядка дифференцирования. Дифференциалы высших порядков, отсутствие инвариантности их формы относительно замены переменных. Формула Тейлора для функций нескольких переменных с остаточным членом в формах Лагранжа и Пеано.
6. Теорема о неявной функции, заданной одним уравнением. Непрерывно дифференцируемые отображения конечномерных пространств, матрица Якоби, якобиан. Теорема о неявных функциях, заданных системой уравнений (*без доказательства*). Локальная обратимость непрерывно дифференцируемого отображения пространств одинаковой размерности с ненулевым якобианом.
7. Мера Жордана в n-мерном евклидовом пространстве. Критерий измеримости. Измеримость объединения, пересечения и разности измеримых множеств. Конечная аддитивность меры Жордана.
8. Определенный интеграл Римана. Суммы Римана, суммы Дарбу, критерий интегрируемости. Интегрируемость непрерывной функции, интегрируемость монотонной функции, интегрируемость ограниченной функции с конечным числом точек разрыва. Свойства интегрируемых функций: аддитивность интеграла по отрезкам, линейность интеграла, интегрируемость произведения функций, интегрируемость модуля интегрируемой функции, интегрирование неравенств, теорема о среднем. Свойства интеграла с переменным верхним пределом — непрерывность, дифференцируемость. Формула Ньютона–Лейбница. Интегрирование подстановкой и по частям в определенном интеграле.
9. Геометрические приложения определенного интеграла — площадь криволинейной трапеции, объем тела вращения, длина кривой, площадь поверхности вращения.
10. Криволинейный интеграл первого рода и его свойства. Ориентация гладкой кривой. Криволинейный интеграл второго рода и его свойства.
11. Несобственный интеграл (случай неограниченной функции и случай бесконечного промежутка интегрирования). Критерий Коши сходимости интеграла. Интегралы от знакопостоянных функций, признаки сравнения сходимости. Интегралы от зна-

копеременных функций: сходимость и абсолютная сходимость. Признаки Дирихле и Абеля сходимости интегралов.

12. Числовые ряды. Критерий Коши сходимости ряда. Знакопостоянные ряды: признаки сравнения сходимости, признаки Даламбера и Коши, интегральный признак. Знакопеременные ряды: сходимость и абсолютная сходимость. Признаки Дирихле и Абеля. Независимость суммы абсолютно сходящегося ряда от порядка слагаемых. Теорема Римана о перестановке членов сходящегося, но не абсолютно сходящегося ряда. Произведение абсолютно сходящихся рядов.
13. Равномерная сходимость функциональных последовательностей и рядов. Критерий Коши равномерной сходимости. Непрерывность суммы равномерно сходящегося ряда из непрерывных функций. Почленное интегрирование и дифференцирование функциональных последовательностей и рядов. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости функциональных рядов. Признаки Дирихле и Абеля.
14. Степенные ряды с комплексными членами. Первая теорема Абеля (на потоке О.В. Бесова — поведение степенного ряда внутри и вне круга сходимости). Круг и радиус сходимости. Характер сходимости степенного ряда в круге сходимости. Формула Коши–Адамара для радиуса сходимости. Непрерывность суммы комплексного степенного ряда.
15. Степенные ряды с действительными членами. Сохранение радиуса сходимости степенного ряда при почленном дифференцировании и интегрировании ряда. Бесконечная дифференцируемость суммы степенного ряда на интервале сходимости. Единственность разложения функции в степенной ряд, ряд Тейлора. Формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме, в форме Лагранжа и в форме Коши. Пример бесконечно дифференцируемой функции, не разлагающейся в степенной ряд. Разложение в ряд Тейлора основных элементарных функций. Разложение в степенной ряд комплекснозначной функции.

Литература

Основная

1. *Бесов О.В.* Лекции по математическому анализу. Ч. 1. – М.: МФТИ, 2004.

2. *Иванов Г.Е.* Лекции по математическому анализу. Ч. 1. – М.: МФТИ, 2004, 2011.
3. *Петрович А.Ю.* Лекции по математическому анализу. Ч. 2. Многомерный анализ. Интегралы и ряды. – М.: МФТИ, 2012.
4. *Тер-Крикоров А.М., Шабунин М.И.* Курс математического анализа. – М.: МФТИ, 2003–2007.
5. *Яковлев Г.Н.* Лекции по математическому анализу. Ч. 1. – М.: Физматлит, 2001, 2004.

Дополнительная

6. *Кудрявцев Л.Д.* Курс математического анализа. – 5-е изд. – М.: Дрофа, 2003.
7. *Кудрявцев Л.Д.* Краткий курс математического анализа. Т. 1. – М.: Наука, 2002.
8. *Никольский С.М.* Курс математического анализа. Т. 1. – М.: Наука, 2000.
9. *Ильин В.А., Позняк Э.Г.* Основы математического анализа. Т. 1, 2. – М.: Наука–Физматлит, 1998.
10. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. – 8-е изд. – М.: Физматлит, 2007.
11. *Зорич В.А.* Математический анализ. Т. 1. – М.: Наука, 1981.

ЗАДАНИЯ

Литература

1. Сборник задач по математическому анализу. Предел, непрерывность, дифференцируемость: учебное пособие/под ред. Л.Д. Кудрявцева. – М.: Физматлит, 2003. (цитируется — С1.)
2. Сборник задач по математическому анализу. Интегралы. Ряды: учебное пособие/под ред. Л.Д. Кудрявцева. – М.: Физматлит, 2003. (цитируется — С2.)
3. Сборник задач по математическому анализу. Функции нескольких переменных: учебное пособие/под ред. Л.Д. Кудрявцева. – М.: Физматлит, 2003. (цитируется — С3.)

ЗАМЕЧАНИЯ

1. Задачи с подчёркнутыми номерами рекомендовано разобрать на семинарских занятиях.
2. Задачи и разделы, отмеченные звёздочкой (*), являются необязательными для базового уровня.
3. Задачи, отмеченные двумя звёздочками (**), являются необязательными для повышенного уровня.

ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 10–15 марта)

I. Функции многих переменных

А) Множества в конечномерных евклидовых пространствах

С3, §2: 9 а), б), г) (3, 6); 20(12).

Т.1. Является ли множество

$$E = \{\, (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : e^{x_1^2+x_2^2+x_3^2} < 1 + x_4^2 \,\}$$

в пространстве $\mathbb{R}^4$ а) открытым; б) замкнутым; в) областью?

Т.2.* Докажите, что следующие утверждения равносильны:

а) *множество M замкнуто*;

б) *дополнение $\mathbb{R}^n \setminus M$ множества M до всего пространства $\mathbb{R}^n$ открытое множество*;

в) *множество M содержит все свои предельные точки*;

г) *множество M содержит все свои граничные точки*;

д) *множество M содержит все свои точки прикосновения.*

Т.3.* Докажите, что

а) *замыкание $\overline{M}$ множества $M \subset \mathbb{R}^n$ и граница ∂M множества M замкнутые множества,*

б) *множество всех внутренних точек множества M есть открытое множество.*

Т.4. Для множества $M \subset \mathbb{R}$, $M = ([0,1] \cap \mathbb{Q}) \bigcup \{8\}$ найдите:

а) все граничные точки;

б) все предельные точки;

в) все точки прикосновения;

г) все изолированные точки;

д) все внутренние точки;

е) $\partial(\partial M)$.

Является ли множество M открытым или замкнутым?

С3, §1: 15; 18; 28; 37*; 39(6).

Б) Предел и непрерывность

С3, §2: 37(2, 8); 46(1); 48(6*, 9, 10); 51; 54; 62(7); 71**.

Т.5. Исследовать существование предела в точке $O(0, 0)$ следующих функций:

а) $f(x,y) = \dfrac{\sin\sqrt[3]{|x|^3 + |y|^5}}{\sqrt[3]{x^4 + y^4}}$;   б) $f(x,y) = \dfrac{1 - \cos\sqrt[3]{|x|^3 + |y|^5}}{\sqrt[3]{x^4 + y^4}}$;

в) $f(x,y) = \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2}$.

Проверьте, что предел по каждому направлению равен нулю.

Т.6.** Докажите, что отображение $f : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}$ непрерывно тогда и только тогда, когда прообраз $D = f^{-1}(\Omega)$ всякого открытого множества $\Omega \subset \mathbb{R}$ есть открытое множество в $\mathbb{R}^n$.

В) Частные производные, дифференциал

С3, §3: 3(6); 18(1); 44(4).

С3, §4: 4; 8(4); 19(2); 25(2); 27(2, 4*); 43(3)*.

С3, §3: 19(1, 4); 20(1, 3, 6); 21(2*, 3); 23(1); 12(1, 4, 5).

Т.7. Исследовать на дифференцируемость в точке $O(0,0)$ следующие функции:

а) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^2}{x}\sin 3x, & x \neq 0; \\ y^3, & x = 0; \end{cases}$

б)* $f(x,y) = \begin{cases} \sqrt[3]{\dfrac{x^3y+y^5}{|x|+|y|}} + 2y, & x^2+y^2 \neq 0; \\ 0, & x^2+y^2 = 0; \end{cases}$;

в) функцию $f(x,y) = (2x^2 - y^2 - 1)\sqrt{x^2+y^2-xy-x-y+1}$ исследовать на дифференцируемость в точке $E(1,1)$.

Г) Формула Тейлора

С3, §4: 65(2); 70(2); 79(1)*.

II. Равномерная непрерывность

С1, §12: 2(1, 2); 3(3); 4(3, 4); 7; 17; 21*; 23; 25.

С3, §2: 77(3)*.

Т.8. а) Пусть функция f дифференцируема на замкнутом луче $I = [a, +\infty)$. Доказать следующие утверждения:

1) если f' ограничена на I, то f равномерно непрерывна на I;
2) если f' непрерывна на множестве I и имеет конечный предел при $x \to +\infty$, то f равномерно непрерывна на I;
3)* если f' неограничена на I, то f может быть, а может и не быть равномерно непрерывной на I;
4) если f' бесконечно большая при $x \to +\infty$, то f не является равномерно непрерывной на I.

б) Пусть f непрерывна на замкнутом луче $I = [a,+\infty)$ и имеет конечный предел при $x \to +\infty$. Тогда f равномерно непрерывна на множестве I.

Т.9. Исследовать на равномерную непрерывность на множестве $(0,+\infty)$ следующие функции:

а) $f(x,y) = x \sin \frac{1}{x}$; б) $f(x,y) = \sqrt{x} \ln(1 + x^2)$;

в)* $f(x,y) = x \exp(\sin^2 x)$; г) $f(x,y) = \frac{\sin x^2}{\sqrt{x}}$.

Т.10.** Доказать, что дифференцируемая функция $w = f(x,y)$, имеющая ограниченные частные производные f'_x и f'_y в некоторой выпуклой области $D \subset \mathbb{R}^2$, равномерно непрерывна в области D.

Сводная таблица задач первого задания

разд.	задачи	задачи	задачи*	задачи**
СЗ 2		9 а), б), г) (3, 6); 20(12)		
	Т1; Т2*; Т3*	Т4	Т2; Т3	
СЗ 1		15; 18; 28; 39(6)	37	
СЗ 2		37(2, 8); 46(1); 48(9, 10); 51; 54; 62(7)	48(6)	71
		Т5 а), б), в)		Т6
СЗ 3		3(6); 18(1); 44(4);		
СЗ 4		4; 8(4); 19(2); 25(2); 27(2)	27(4); 43(3)	
СЗ 3		19(1, 4); 20(1, 3, 6); 21(3); 23(1); 12(1, 4, 5)	21(2)	
		Т7 а), в)	Т7 б)	
СЗ 4		65(2); 70(2)	79(1)	
С1 12		2(1, 2); 3(3); 4(3, 4); 7; 17; 23; 25	21	
СЗ 2			77(3)	
		Т8 а)(1, 2, 4); Т8 б); Т9 а), б), г)	Т8 а)(3); Т9 в)	Т10

56+12*+3**

ВТОРОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 14–19 апреля)

III. Мера Жордана

C3, §7: <u>22</u>; 48.

T.1. Измеримо ли:

а) множество рациональных точек отрезка $[0, 1]$ в $\mathbb{R}^1$?

б) множество рациональных точек отрезка $[0, 1]$ оси абсцисс в $\mathbb{R}^2$?

IV. Определенный интеграл

А) Свойства определенного интеграла и его вычисление

C2, §6: 4(1); <u>24</u>; <u>27**</u>; 41; 54(5); 111*; 112(1, 2); 117; 126; <u>161</u>; 180; 182; 197; 108(1).

C2, §10: <u>45*</u>; 50(4).

<u>**T.2.**</u> Доказать, что $\left|\int\limits_a^b \frac{\sin x}{x}\,dx\right| \leqslant \frac{2}{a}$, где $b > a > 0$.

<u>**T.3.**</u> Пусть функция f ограничена на полуинтервале $(a, b]$ и при любом $\varepsilon \in (0, b-a)$ она интегрируема по Риману на отрезке $[a + \varepsilon, b]$. Доказать, что при любом доопределении функции f в точке $x = a$, функция f интегрируема по Риману на отрезке $[a, b]$ и справедливо равенство

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0} \int\limits_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx.$$

Б) Геометрические приложения определенного интеграла

C2, §7: 4(3); 6(8); 25(6)*; 34(2); 69(6); 72(3); 82(4).

C2, §8: 2(4); 12(2); 81(5); 88(2)*.

C2, §9: 34(1)*.

V. Криволинейный интеграл

C3, §10: <u>1(3)</u>; 9; 13(2); 21; 27(2); 43**.

VI. Несобственный интеграл

C2, §11: 69; 85; 88; 94.

C2, §12: 87; 91; 100; 104; 110*; 121; 125; 135; 139; 140; 186; 227.

Сводная таблица задач второго задания

разд.	**задачи**	**задачи**	**задачи***	**задачи****
С3 7	22	48		
		Т1 а), б)		
С2 6	24; 27**; 161	4(1); 41; 54(5); 112(1, 2); 180; 182; 197; 108(1)	111	27
С2 10	45*	50(4)	45	
	Т2; Т3			
С2 7		4(3); 6(8); 34(2); 69(6); 72(3); 82(4)	25(6)	
С2 8		2(4); 12(2); 81(5)	88(2)	
С2 9			34(1)	
С3 10	1(3)	9; 13(2); 21; 27(2)		43
С2 11		69; 85; 88; 94		
С2 12		87; 91; 100; 104; 121; 125; 135; 139; 140; 186; 227	110	

$\boxed{53+6^*+2^{**}}$

ТРЕТЬЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 19–24 мая)

VII. Числовые ряды

А) Ряды с неотрицательными членами

С2, §13: 2(1); 5(3); 10*; 12(4); 13(3); 14(4).

С2, §14: 2(6, 7); 10(5); 11(6); 19(8, 15); 21(7, 14); 25(9); 37; 38*; 39*.

Т.1. Исследовать на сходимость ряды:

$$\text{а)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[3]{n^3+\frac{n}{3}\sin\frac{1}{n}}\right)^{-n^3}; \qquad \text{б)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\Big(1-\ln\Big(n^{\sin(1/n)}\Big)\Big)^{n};$$

в)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\, e^n}{n^{n+\alpha}}$.

Б) Знакопеременные ряды

С2, §15: 3(4); 4(4); 8(4, 6*); 9(2); 12(4)*.

Во всех задачах §15 исследовать также абсолютную сходимость числовых рядов.

VIII. Функциональные последовательности и ряды

С2, §17: 5(3); 8(5); 9(11); 12(2, 5); 17(10).

С2, §18: 22(1); 32(4, 5); 33(7); 34(6); 36(2); 37(10); 43*; 45*.

Т.2. Исследовать на поточечную и равномерную сходимость на отрезке $E = [0, 1]$ следующие функциональные последовательности:

а) $f_n(x) = x^n - x^{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$;

б) $f_n(x) = x^n - x^{2n}$, $n \in \mathbb{N}$.

Т.3. Исследовать на поточечную и равномерную сходимость на множествах $E_1 = (0,)$ и $E_2 = (a, +\infty)$ функциональную последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ и функциональный ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, если:

а) $f_n(x) = x \sin \dfrac{1}{(xn)^2}$; б) $f_n(x) = \dfrac{\sin \frac{xn}{x^2+n^2}}{1 + \ln^2 n}$;

в) $f_n(x) = \dfrac{x \ln(xn)}{n^2}$.

С2, §19: 2*; 5*; 6*; 14.

IX. Степенные ряды

С2, §20: 2(3); 3(1); 5(2); 8(4); 9(5).

С2, §21: 6(5); 9(3); 11(4); 19(4); 25(4); 31(5); 56(1); 80.

Сводная таблица задач третьего задания

разд.	**задачи**	**задачи**	**задачи***
13		2(1); 5(3); 12(4); 13(3); 14(4)	10
14		2(6, 7); 10(5); 11(6); 19(8, 15); 21(7, 14); 25(9); 37	38; 39
		Т1 а), б)	Т1 в)
15	9(2)	3(4); 4(4); 8(4)	8(6); 12(4)
17		5(3); 8(5); 9(11); 12(2, 5); 17(10)	
18	22(1)	32(4, 5); 33(7); 34(6); 36(2); 37(10)	43; 45
	Т2 а), б); Т3 а), б), в)		
19	14		2; 5; 6
20		2(3); 3(1); 5(2); 8(4); 9(5)	
21	80	6(5); 9(3); 11(4); 19(4); 25(4); 31(5); 56(1)	

52+11*

Задания составил А.А. Бурцев, к.ф.-м.н., доцент