УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
Д.А. Зубцов
23 декабря 2013 г.

ПРОГРАММА И ЗАДАНИЯ

по дисциплине:	**Функциональный анализ**
по направлению	010900 «Прикладные математика и физика»
факультет:	**ФУПМ**
кафедра:	**высшей математики**
курс:	III
Трудоёмкость:	вариативная часть— 3 зач. ед., дополнительная за сложность — 1 зач. ед.
семестр:	6
лекции:	34 часа
практические (семинарские) занятия:	17 часов
лабораторные занятия:	нет
ВСЕГО ЧАСОВ	— 51

Экзамен — 6 семестр

Самостоятельная работа — 2 часа в неделю

Программу составил

Р.В. Константинов, к.ф.-м.н., доцент

Программа принята на заседании кафедры
высшей математики 23 ноября 2013 г.

Заведующий кафедрой Е.С. Половинкин

1. Мера и интеграл Лебега, измеримые функции, пространства $\mathbb{L}_p$ (изучается только на семинарах).
2. Сопряженное пространство. Теорема Хана–Банаха. Теорема Рисса–Фреше.
3. Слабая топология и слабая сходимость в банаховых пространствах. Теорема Мазура.
4. Слабая* топология. Теорема Банаха–Алаоглу. Рефлексивные банаховы пространства. Теорема Банаха–Тихонова.
5. Сопряженные операторы. Спектр оператора.
6. Компактные операторы. Теорема Фредгольма для компактных операторов.
7. Самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве. Теорема Гильберта–Шмидта.

Литература

1. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1981.
2. *Треногин В.А.* Функциональный анализ. – М.: Наука, 1993.
3. *Константинов Р.В.* Лекции по функциональному анализу: учеб.-метод. пособие. – М.: МФТИ, 2009.
4. *Рудин У.* Основы математического анализа. – М.: Мир, 1976.
5. *Треногин В.А., Писаревский Б.М., Соболева Т.С.* Задачи и упражнения по функциональному анализу. – М.: Наука, 1984.
6. *Власов В.В., Коновалов С.П., Курочкин С.В.* Задачи по функциональному анализу. – М.: МФТИ, 2000.

З А Д А Н И Я

Все номера задач в задании указаны по книге

Власов В.В., Коновалов С.П., Курочкин С.В. Задачи по функциональному анализу. – М.: МФТИ, 2000.

Задачи, отмеченные (*), являются необязательными.

ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 31 марта–5 апреля)

1. Мера Лебега (изучается только на семинарах)

Т-1. Доказать, что в $\mathbb{R}^n$ любое открытое множество измеримо по Лебегу. Привести пример ограниченного открытого множества в $\mathbb{R}^n$, не измеримого по Жордану.

Т-2. Доказать, что в $\mathbb{R}^n$ любое измеримое по Лебегу множество есть объединение подходящего борелевского множества и множества лебеговой меры нуль.

Т-3* Привести примеры неборелевского подмножества вещественной оси лебеговой меры нуль и неизмеримого по Лебегу подмножества вещественной оси.

Т-4. Пусть функция скачков $\alpha(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \theta(|x| - n)\mathrm{sign}(x)$ для всех $x \in \mathbb{R}$. Здесь

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x \leqslant 0. \end{cases}$$

Пусть μ_α — соответствующая функции α мера Лебега–Стилтьеса на $\mathbb{R}$, а $\mathfrak{M}_\alpha$ — σ-кольцо μ_α-измеримых подмножеств вещественной оси. Доказать, что любое множество $A \subset \mathbb{R}$ является μ_α-измеримым, т. е. $A \in \mathfrak{M}_\alpha$, и вычислить $\mu_\alpha(A)$.

§ 8: 6, 17;

2. Измеримые функции, интеграл Лебега, пространства $\mathbb{L}_p$ (изучается только на семинарах)

§ 8: 1, 3, 8, 14, 15;

Т-5. Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$ — измеримо по Лебегу, а число $p \in [1,+\infty)$. Доказать, что пространство $\mathbb{L}_p(E)$ является полным.

Т-6. Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$ измеримо по Лебегу с конечной положительной мерой, а числа p и q таковы, что $1 \leqslant q < p$. Доказать, что $\mathbb{L}_p(E) \subset \mathbb{L}_q(E)$. Доказать, что пространство $\big(L_p(E),\|\cdot\|_q\big)$ неполно, а его пополнением является $\mathbb{L}_q(E)$.

Т-7. Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$ измеримо по Лебегу с положительной мерой, а число $p \in [1, +\infty)$. Пусть линейное пространство $CL_p(E) = C(E) \cap \mathbb{L}_p(E)$. Доказать, что пространство $\big(CL_p(E),\|\cdot\|_p\big)$ неполно, а его пополнением является $\mathbb{L}_p(E)$.

Т-8. Исследовать множество

$$M = \left\{ z \in c_0 \;\middle|\; \begin{array}{c} \exists f_z \in \mathbb{L}_1[0,1] : \|f_z\|_1 \leqslant 1, \\ z(k) = \int\limits_0^{\frac{1}{k}} f_z(t)\,dt \;\; \forall\, k \in \mathbb{N} \end{array} \right\}$$

на ограниченность, вполне ограниченность и замкнутость в пространстве c_0.

Т-9. Исследовать множество

$$M = \left\{ f \in \mathbb{L}_2[0,1] \;\middle|\; \begin{array}{c} \exists z_f \in \ell_2 \; : \; \|z_f\|_2 \leqslant 1, \\ f(t) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{z_f(k)}{k+t} \;\; \text{п. в. } t \in [0,1] \end{array} \right\}$$

на ограниченность, вполне ограниченность и замкнутость в пространстве $\mathbb{L}_2[0,1]$.

3. Сопряжённое пространство. Теоремы Хана–Банаха и Рисса–Фреше

§ 9: 1, 7, 9, 10;

Т-10. Привести пример функционала $f \in \ell_\infty^*$, не достигающего своей нормы.

4. Слабая и слабая* топология и сходимость

§ 10: 1, 3, 4, 6, 14;

Т-11. Исследовать последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \ell_\infty$ вида

$$x_n(k) = i^k \quad \text{для} \quad k \leqslant n; \qquad x_n(k) = 0 \quad \text{для} \quad k > n,$$

на слабую сходимость в пространстве ℓ_∞. Рассматривая ℓ_∞ как сопряжённое к пространству ℓ_1, исследовать в нём слабую* сходимость последовательности x_n.

Т-12. Пусть H — гильбертово пространство, а последовательность $x_n \in H$ состоит из попарно ортогональных векторов. Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ сильно сходится в H тогда и только тогда, когда он сходится слабо.

ВТОРОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 12–17 мая)

5. Сопряжённые операторы. Спектр оператора

§ 11: 1, 3, 9, 10;

Т-13. Доказать, что оператор $A\colon \mathbb{L}_2(\mathbb{R}) \to c$ вида

$$(Ax)(k) = \int\limits_{[-k,k]} \frac{x(t)}{t+i}\,dt, \quad \forall\, k \in \mathbb{N}, \quad \forall\, x \in \mathbb{L}_2(\mathbb{R})$$

является ограниченным, и найти его сопряжённый. Исследовать множество $A(B_1(0))$ на вполне ограниченность и замкнутость в пространстве c.

6. Спектр и резольвента

§ 7: 1, 7, 13, 14;

Т-14. Пусть число $a \neq 0$. Найти спектр и резольвенту оператора трансляции $T_a\colon \mathbb{L}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{L}_2(\mathbb{R})$ вида $(T_a x)(t) = x(t+a)$ для всех $x \in \mathbb{L}_2(\mathbb{R})$ и п. в. $t \in \mathbb{R}$.

Т-15* Найти спектр и резольвенту оператора A: $C[0,1] \to C[0,1]$ вида $(Ax)(t) = x(t^2)$ для всех $x \in C[0,1]$ и $t \in [0,1]$.

7. Компактные операторы

§ 12: 3, 9, 10, 13, 17;

Т-16. Пусть линейный оператор $A\colon c \to \mathbb{L}_1[1,+\infty)$ имеет вид

$$(Ax)(t) = \int\limits_{[t,+\infty)} e^{-\tau} x([\tau])\, d\tau, \quad \forall\, x \in c, \quad \text{п. в. } t \in [1,+\infty).$$

Здесь $[\tau]$ — целая часть числа τ. Доказать непрерывность оператора A. Найти сопряжённый оператор A^*. Исследовать компактность оператора A.

Т-17. Пусть E_1 и E_2 — банаховы пространства, причем в E_2 существует счётный базис. Пусть линейный оператор $A\colon E_1 \to E_2$ является компактным. Доказать, что существует последовательность линейных ограниченных операторов $A_n\colon E_1 \to E_2$ с конечномерными образами, сходящаяся по операторной норме к оператору A.

8. Самосопряжённые операторы

§ 11: 5, 7, 11, 13, 15; § 12: 18.

Задания составил Р.В. Константинов, к.ф.-м.н., доцент