УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
Д.А. Зубцов
10 декабря 2013 г.

ЗАДАНИЯ

по дисциплине:	**Дифференциальные уравнения**
по направлению	010900 «Прикладные математика и физика»
факультеты:	**ФАКИ, ФФКЭ, ФАЛТ, ФУПМ, ФИВТ**
кафедра:	**высшей математики**
курс:	II
Трудоёмкость:	обязательная часть — 2 зач. ед., вариативная часть— 1 зач. ед., дополнительная за сложность — 1 зач. ед.
семестр:	4
лекции:	34 часа
практические (семинарские) занятия:	34 часа
лабораторные занятия:	нет
ВСЕГО ЧАСОВ	— 68

Экзамен — 4 семестр

Самостоятельная работа — 1 час в неделю

Задание составила

В.М. Ипатова, к.ф.-м.н., доцент

Программа принята на заседании кафедры
высшей математики 3 декабря 2013 г.

Заведующий кафедрой Е.С. Половинкин

З А Д А Н И Я

по дисциплине «Дифференциальные уравнения»
для студентов 2 курса ФАКИ, ФФКЭ, ФАЛТ, ФУПМ, ФИВТ
на 4 семестр 2013/2014 учебного года

Литература

1. Сборник задач по дифференциальным уравнениям и вариационному исчислению /под ред. В.К. Романко. – М.: Лаборатория базовых знаний, 2002. (С)
2. *Филиппов А.Ф.* Сборник задач по дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 1979, 1985, 1992, 2004, 2005. (Ф)

ЗАМЕЧАНИЯ

1. Задачи с подчёркнутыми номерами рекомендовано разобрать на семинарских занятиях.
2. Задачи и разделы, отмеченные звёздочкой (*), являются необязательными для базового уровня.
3. Задачи, отмеченные двумя звёздочками (**), являются необязательными для повышенного уровня.

ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 10–15 марта)

I. Вариационное исчисление

С. § 19: 43; 55; 84; 101*; 103.

1. Исследовать функционал на экстремум

$$\int\limits_1^e \left(2xy^2 + 2x^2yy' - xy'^2 - y' + 2y\right) dx, \qquad y(1) = -1, \quad y(e) = e.$$

С. § 20.1: 9; 12. С. § 20.2: 3. С. § 20.3: 2. С. § 21: 7; 10*.

2. Исследовать функционал на экстремум

$$\int\limits_0^{\pi/2} \left(y^2 \sin 2x - yy' \cos 2x + y'^2 + 2y' \sin x\right) dx, \qquad y(0) = 1.$$

II. Исследование задачи Коши

С. § 5: 25; 26; 27. Ф.: 234; 1064*; 1066*; 1071*.

3. Найти все решения уравнения $y'' = \sqrt[3]{(y')^2}$, для которых $y'(0) = y(0) = 0$. Как полученный результат согласуется с теоремой существования и единственности решения задачи Коши?
С. §6: <u>2</u>; 36; 50; 44*; 47*.

<u>4.</u> Решить дифференциальное уравнение $x(y')^2 - 2yy' + y = 0$. Найти особые решения и изобразить интегральные кривые на координатной плоскости.
а) Указать интегральные кривые, проходящие через точку (0,0).
б) Найти решение, проходящее через точку (1,2). Объяснить получившийся результат. $\boxed{20+7^*}$

ВТОРОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 5–10 мая)

III. Исследование поведения фазовых траекторий

Ф.: 971; 972*; 973; 974; 975; 978* (для фокусов и узлов определить, являются ли они устойчивыми или неустойчивыми).
С. §13: <u>8</u>; 17; <u>33</u>; 46. С. §14: 6*; 12**.

5. Найти положения равновесия уравнения

$$\ddot{x} = \frac{2(4 - x^2) + (8 + x)\dot{x}}{x},$$

определить их характер и нарисовать фазовые траектории линеаризованных уравнений в окрестности положений равновесия.

IV. Первые интегралы и их использование для решения автономных систем

Ф.: 1147; <u>1148</u>; 1155; 1157. С. §16: 12*.

V. Линейные однородные уравнения в частных производных первого порядка

С. §17: 4; <u>6</u>; 11; 24*; 28; <u>79</u>; <u>100</u>.

VI. Линейные уравнения с переменными коэффициентами

Ф.: 656; 657; 665; <u>667</u>; 669*; 679. Ф.: §22: 47; 57; <u>58</u>; 63*.

Найти общее решение линейных дифференциальных уравнений 2-го порядка, используя формулу Лиувилля-Остроградского:
С. §9: 8; <u>11</u>; <u>27</u>; 52; <u>56</u>; 68(a).

6. Доказать, что уравнение Бесселя $x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0$, где $\nu = \mathrm{const}$, при $x > 0$ не может иметь двух линейно независимых решений, ограниченных в окрестности нуля вместе со своими первыми производными.

VII. Теорема Штурма

Ф.: 723; 725*. С. § 10: 2; 3; 6; 10**.

7. Доказать, что:

а) любое нетривиальное решение уравнения Бесселя

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0, \quad \nu = \mathrm{const}\,,$$

имеет бесконечное число нулей на $(0, +\infty)$;

б)* расстояние между последовательными нулями любого указанного выше решения стремится к π при $x \to +\infty$.

39+8*+2**

Задания составила В.М. Ипатова, к.ф.-м.н., доцент