

УТВЕРЖДАЮ  
Проректор по учебной работе  
Д.А. Зубцов  
10 декабря 2013 г.

## ЗАДАНИЯ

по дисциплине: Дифференциальные уравнения  
по направлению 010900 «Прикладная математика и физика»  
факультеты: ФРТК, ФОПФ, ФМХФ, ФПФЭ, ФБМФ  
кафедра: высшей математики  
курс: II  
Трудоёмкость: обязательная часть — 2 зач. ед.,  
вариативная часть — 1 зач. ед.,  
дополнительная за сложность — 1 зач. ед.  
семестр: 4  
лекции: 34 часа  
практические (семинарские)  
занятия: 34 часа Экзамен — 4 семестр  
лабораторные занятия: нет Самостоятельная работа  
— 1 час в неделю  
ВСЕГО ЧАСОВ — 68

Задания составил В.Н. Диесперов, д.ф.-м.н., профессор  
Программа принята на заседании кафедры  
высшей математики 3 декабря 2013 г.

Заведующий кафедрой Е.С. Половинкин

# З А Д А Н И Я

по дисциплине «Дифференциальные уравнения»  
для студентов 2 курса ФРТК, ФОПФ, ФМХФ, ФПФЭ, ФБМФ  
на 4 семестр 2013/2014 учебного года

## Литература

1. Сборник задач по дифференциальным уравнениям и вариационному исчислению /под ред. В.К. Романко. – М.: Лаборатория базовых знаний, 2006. (С)
2. *Филлипов А.Ф.* Сборник задач по дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 2004, 2005. (Ф)

## ЗАМЕЧАНИЯ

1. Задачи с подчёркнутыми номерами рекомендовано разобрать на семинарских занятиях.
2. Задачи и разделы, отмеченные звёздочкой (\*), являются необязательными для базового уровня.
3. Задачи, отмеченные двумя звёздочками (\*\*), являются необязательными для повышенного уровня.

## ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 10–15 марта)

### I. Линейные системы с постоянными коэффициентами

С. § 11: 27; 55; 99; 35; 144; 184. Ф.: 811.

#### 1. Найти все действительные решения системы

$$\dot{x} = 2x - y + z + \cos t,$$

$$\dot{y} = 5x - 4y + 3z + \sin t, \quad (\lambda_{1,2} = 1, \lambda_3 = -1).$$

$$\dot{z} = 4x - 4y + 3z + 2 \sin t - 2 \cos t,$$

### II. Матричная экспонента

С помощью матричной экспоненты решить линейные системы уравнений

С. § 11: 117; 123; 131

и для каждой из них найти решения, удовлетворяющие начальному условию  $\vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

- 2\*** Найти собственные значения и собственные векторы матрицы  $e^{tA}$  в зависимости от  $t$ , если  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

### III. Теорема Штурма

Ф.: 726; 729.

С. § 10: 2; 3; 4; 7\*. Ф.: 725\*\*.

3. а) Доказать, что каждое нетривиальное решение уравнения  $x^4 y'' + 2x^3 y' + y = 0$  на интервале  $(0; 1)$  имеет бесконечно много нулей.

б)\* Сколько нулей имеет решение задачи Коши  $y\left(\frac{2}{\pi}\right) = 1$ ,

$y'\left(\frac{2}{\pi}\right) = 0$  на интервале  $\left(\frac{1}{10}, \frac{2}{\pi}\right)$ ?

4. Доказать, что при  $x \rightarrow +\infty$  расстояние между последовательными нулями любого решения уравнения Бесселя

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0, \quad x > 0$$

стремится к  $\pi$ .

17+3\*+1\*\*

## ВТОРОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 5–10 мая)

### IV. Вариационное исчисление

С. § 19: 14; 45; 79; 105.

С. § 20.1: 2; 9; 11.

С. § 20.2: 4.

С. § 20.3: 5.

С. § 21: 6; 11.

5. Найти допустимую экстремаль:

$$J(y) = \int_0^{\pi} [y^2 - (y')^2] dx, \quad y(0) = 1, \quad y(\pi) = -1,$$

$$\int_0^{\pi} y \cos x dx = \frac{\pi}{2}, \quad \int_0^{\pi} y \sin x dx = \pi.$$

### V. Исследование поведения фазовых траекторий

Ф. 971; 973; 974; 975.

С. § 13: 44; 39; 53.

С. § 14: 3.

### VI. Первые интегралы автономных систем

Ф.: 1164.

6. Проверить, что функция  $u = y + zx^2$  является первым интегралом системы уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = x(x + y + x^2z), \\ \dot{y} = x^3z, \\ \dot{z} = -z(3x + 2y + 2x^2z); \end{cases} \quad (1)$$

Найти все первые интегралы системы (1).

7. Найти первые интегралы уравнений и систем уравнений. Затем, используя их, в пунктах а), б) и в) исследовать поведение траекторий на фазовой плоскости

а)  $\ddot{x} + \sin x = 0;$

б)  $\ddot{x} - x + x^2 = 0;$

в)  $\begin{cases} \dot{x} = 2xy, \\ \dot{y} = x^2 + y^2 - 1; \end{cases}$

г)\*  $\begin{cases} \dot{x} = x(y + z), \\ \dot{y} = z(z - y), \\ \dot{z} = y(y - z). \end{cases}$

С. § 16: 3; 5; 17.

### VII. Линейные однородные уравнения в частных производных первого порядка

С. § 17: 4; 11; 25; 29; 41. Ф.: 327; 219\*.

### VIII. Повторение. Подготовка к контрольной работе

С. § 8: 129. С. § 11: 35. С. § 9: 31. С. § 13: 49.

С. § 20.1: 8. С. § 6: 31. С. § 17: 84. С. § 7: 56.

41+2\*

Задания составил

В.Н. Диесперов, д.ф.-м.н., профессор