УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
Д.А. Зубцов
23 декабря 2013 г.

ПРОГРАММА И ЗАДАНИЯ

по дисциплине:	**Дискретная математика**
по направлению	010900 «Прикладные математика и физика»
факультет:	**ФАЛТ**
кафедра:	**высшей математики**
курс:	I
Трудоёмкость:	обязательная часть — 0 зач. ед., вариативная часть— 3 зач. ед., дополнительная за сложность — 1 зач. ед.
семестр:	2
лекции:	34 часа
практические (семинарские) занятия:	34 часа
лабораторные занятия:	нет
ВСЕГО ЧАСОВ	— 68

Экзамен — 2 семестр

Самостоятельная работа — 2 часа в неделю

Программу составили:

Л.П. Купцов, к.ф.-м.н., доцент,
А.Г. Здор, к.ф.-м.н., ст. преп.

Программа принята на заседании кафедры
высшей математики 1 декабря 2013 г.

Заведующий кафедрой Е.С. Половинкин

1. Множества, операции над множествами. Диаграммы Эйлера–Венна. Алгебра множеств. Основные тождества алгебры множеств.
2. Конечные множества. Теоремы сложения и умножения. Выборки, перестановки, размещения, сочетания. Размещения и сочетания с повторениями. Перестановки с повторениями, полиномиальная теорема.
3. Формула включения и исключения. Обобщение формулы включения и исключения для подсчета количества элементов, обладающих ровно r свойствами.
4. Булевы функции: определение, табличный способ задания, лексикографический порядок перечисления всех наборов переменных, элементарные булевы функции от одной и двух переменных.
5. Существенные и фиктивные переменные. Представление булевых функций формулами. Эквивалентность формул, основные тождества двоичной булевой алгебры.
6. Теорема о разложении (дизъюнктивном) булевой функции по первым m переменным. СДНФ не равной тождественно нулю булевой функции.
7. Двойственная булева функция. Принцип двойственности. Теорема о разложении (конъюнктивном) булевой функции по первым m переменным. СКНФ не равной тождественно единице булевой функции.
8. Многочлены Жегалкина. Существование и единственность представления произвольной булевой функции каноническим многочленом Жегалкина.
9. Замкнутые и полные системы булевых функций. Пять классов Поста. Теорема Поста о полноте.
10. Анализ и синтез переключательных схем. Минимизация булевых функций в классе ДНФ.

11. Высказывания и операции над ними. Функции, формулы и основные тождества алгебры логики.
12. Понятие графа, способы задания. Ориентированные и неориентированные графы. Изоморфизм графов. Подграфы, пути, цепи, циклы. Связность графа.
13. Эйлеровы графы: критерий, алгоритм построения эйлерова цикла. Гамильтоновы и полугамильтоновы графы. Планарные графы, критерий планарности.
14. Взвешенные неориентированные и ориентированные графы. Алгоритмы «фронта волны» и Дейкстры нахождения кратчайших путей от выделенной вершины графа до остальных.
15. Деревья. Остовное дерево графа. «Жадный» алгоритм построения минимального остовного дерева взвешенного неориентированного графа.
16. Транспортные сети. Полный и максимальный потоки. Алгоритм построения полного потока. Граф приращений. Алгоритм построения максимального потока. Разрезы транспортной сети. Теорема о минимальном разрезе.
17. Коды. Алфавитное кодирование. Префиксный код, его взаимная однозначность. Неравенство Крафта–Макмиллана.
18. Коды Фано и Хаффмена, алгоритмы их построения.
19. Код Хэмминга. Исправление ошибки.
20. Самокорректирующиеся коды. Разбиение множества вершин n-мерного куба на сферы и шары.

Литература

Основная

1. *Судоплатов С.В., Овчинникова Е.В.* Элементы дискретной математики. – М.–Новосибирск, 2002.
2. *Иванов Б.Н.* Дискретная математика. Алгоритмы и программы. – М.: Лаборатория базовых знаний, 2001.
3. *Нефёдов В.Н., Осипова В.А.* Курс дискретной математики. – М.: МАИ, 1992.
4. *Горбатов В.А.* Фундаментальные основы дискретной математики. – М.: ФМЛ, 2000.
5. *Яблонский С.В.* Введение в дискретную математику. – М.: Наука, 1986.
6. *Ерусалимский Я.М.* Дискретная математика (теория, задачи, приложения). – М.: Вузовская школа, 1999.
7. *Редькин Н.П.* Дискретная математика. – М.–СПб.–Краснодар: ЛАНЬ, 2003.

Дополнительная

8. *Кук Д., Бейз Г.* Компьютерная математика. – М.: Наука, 1990.
9. *Оре О.* Теория графов. – М.: Наука, 1980.
10. *Форд Л.Р., Фалкерсон Д.Р.* Потоки в сетях. – М.: Мир, 1966.
11. *Свами М., Тхуласирман К.* Графы, сети и алгоритмы. – М.: Мир, 1984.
12. *Берж К.* Теория графов и её приложения. – М.: ИЛ, 1962.
13. *Либер А.Е.* Двоичная булева алгебра. – Саратов: Изд. СГУ, 1966.
14. *Пензов Ю.Е.* Элементы математической логики и теории множеств. – Саратов: Изд. СГУ, 1968.
15. Сборник задач по математической логике и теории множеств – Саратов: Изд. СГУ, 1969.

З А Д А Н И Я

Задачи, отмеченные (*), являются необязательными.

ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 24–29 марта)

I. Теория множеств

1. В январе было 10 ясных и безветренных дней, 15 дней дул ветер и 12 дней шёл снег. Сколько дней была метель (т.е. дул ветер и одновременно шёл снег)?

2. В посылке — яблоки и груши, большие и маленькие, жёлтые и зелёные. Нет маленьких груш и маленьких зелёных яблок. Яблок — 25; груш — 17; больших плодов — 32; жёлтых плодов — 28; зелёных яблок на 2 больше, чем зелёных груш. Сколько в посылке больших жёлтых яблок?

3. На экзамене по математике были предложены три задачи: по алгебре, по геометрии и по тригонометрии. Из 100 абитуриентов решили:
алгебру — 80 абитуриентов;
геометрию — 70;
тригонометрию — 60;
алгебру и геометрию — 60;
алгебру и тригонометрию — 50;
геометрию и тригонометрию — 40;
все задачи — 30.

Сколько абитуриентов не решили ни одной задачи? Сколько абитуриентов решили *ровно* две задачи?

4*. В классе из 25 школьников:

а) 17 мальчишек и 8 девчонок: тонких и толстых, длинных и коротких;

б) нет тонких коротких мальчишек и длинных девчонок;

в) длинных на 1 больше коротких;

г) число коротких толстых мальчишек на 3 больше числа коротких толстых девчонок;

д) длинных толстых мальчишек столько же, сколько коротких толстых девчонок.

Сколько в классе коротких толстушек?

II. Комбинаторика

5. Имеется сеть дорог (см. рис. 1). Сколько существует различных маршрутов, не содержащих циклы, из A в B?

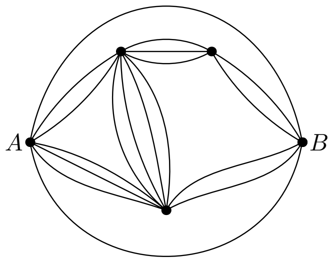

Рис. 1

6. В кабину лифта 11-этажного дома вошли 4 человека. Каждый из них может выйти на любом из 10 этажей. Сколькими различными способами может осуществиться разгрузка лифта?

7. Сколькими различными способами можно поделить 12 одинаковых конфет между тремя девочками так, чтобы ни одна девочка не осталась без конфет?

8. Сколько существует различных четырёхзначных чисел, которые делятся *ровно на одно* число из 3, 5 и 7?

9. Сколько существует различных четырёхзначных чисел от 1000 до 2000, которые делятся *ровно на два* числа из чисел 11, 13 и 17?

10. Сколько различных четырёхзначных чисел можно записать, используя только цифры 0, 1, 2, 3, 4, 5, если:

а) ни одна цифра не повторяется?

б) цифры могут повторяться?

11. Сколькими различными способами курс из 100 студентов можно разбить на 5 групп по 20 человек?

12. План города (его улицы) изображён на рис. 2 (все кварталы — равные квадраты). Сколько существует различных кратчайших маршрутов из A в B?

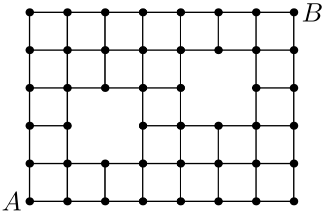

Рис. 2

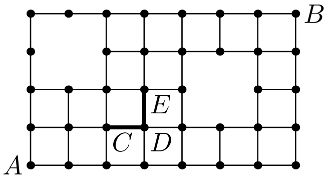

Рис. 3

13. План города (его улицы) изображён на рис. 3 (все кварталы — равные квадраты). Автомобилист наудачу выбирает кратчайший путь из A в B. Чему равна вероятность того, что он проедет по ломаной CDE?

14. 10 студентов пошли в столовую и на вешалке повесили 10 плащей. Пообедав, они случайным образом одели плащи. Чему равна вероятность того, что:

а) каждый из студентов одел *не свой* плащ?

б) *ровно* 5 студентов одели не свои плащи?

15*. Шестизначное число (от 000000 до 999999) называется «счастливым», если у него сумма первых трёх цифр равна сумме последних трёх цифр. Сколько существует различных «счастливых» билетов?

III. Двоичная булева алгебра

16. Представьте в виде СДНФ и СКНФ булевы функции, заданные столбцами своих значений:

$$(10110011)^{\mathrm{T}}, \quad (10011001)^{\mathrm{T}}, \quad (11010101)^{\mathrm{T}}.$$

Построить для каждой из этих функций канонический многочлен Жегалкина. Исследовать полноту системы, образованной этими функциями

17. Представьте в виде СДНФ и СКНФ булевы функции

$$f(x,y,z) = (x+y)\overline{(\overline{x}+z)} + y\overline{(y+\overline{z})},$$
$$g(x,y,z) = \overline{(\overline{x}+\overline{y}+z)(x+yz)},$$

$$h(x,y,z) = (x \oplus \overline{y})(\overline{x}z \oplus y)(x + y + \overline{z}),$$

$$k(x,y,z) = (xy + z)\overline{(x \oplus y) + \overline{z}},$$

$$^{*}\ m(x,y,z) = \overline{(x \oplus y)} \oplus (z + y)\overline{(z + x)}$$

двумя способами:

а) с помощью таблицы значений;

б) с помощью алгебраических преобразований.

18. Сократите число букв (переключателей) в схемах (рис. 4–7):

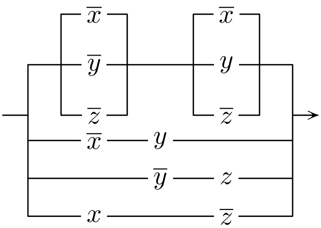

Рис. 4

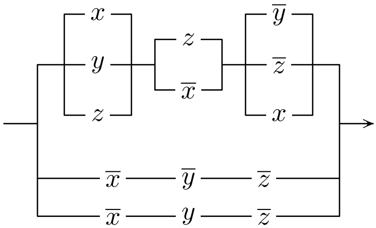

Рис. 5

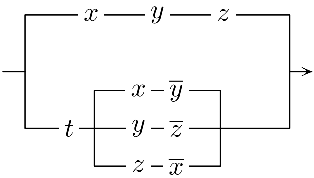

Рис. 6

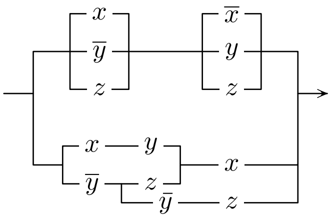

Рис. 7

19. Составьте схему голосовательной машины для комиссии из 4 человек (председатель + 3 члена комиссии). Решение принимается большинством голосов, а в случае, когда счёт 2:2, тогда когда «ЗА» проголосует председатель.

20. Составьте схему для включения-выключения одной лампочки, содержащую три выключателя и изменяющую состояние лампочки при переключении *ровно одного* из любых трёх выключателей (задача для трёх выключателей).

IV. Алгебра высказываний

21. Представьте в виде СДНФ и СКНФ следующие функции алгебры логики:

$$f(x,y,z) = (y \leftrightarrow \overline{(x \vee z)}) \wedge (y \to (x \wedge z)) \leftrightarrow (x \wedge \overline{y} \wedge \overline{z}),$$

$$g(x,y,z) = (x \to y) \wedge z \vee (\overline{z} \to \overline{x}),$$

$$h(x,y,z) = (x \leftrightarrow (\overline{y} \to \overline{(z \vee (x \wedge y))}) \to ((x \wedge y) \vee \overline{z}),$$

$$k(x,y,z) = ((x \to \overline{y}) \wedge (y \to \overline{z}) \to (z \to \overline{x}),$$

двумя способами:

а) с помощью таблицы истинности;

б) с помощью алгебраических преобразований.

22. Кто из четырёх студентов A, B, C, D сдал экзамен по дискретной математике, если известно, что

а) если A сдал, то B не сдал;

б) если D сдал, то и A сдал;

в) если B не сдал, то C сдал или A не сдал;

г) если D не сдал, то A сдал, а C не сдал?

23. Один из трёх внуков бабушки Маши съел варенье. Бабушка спросила: «Кто съел варенье?» Алёша ответил: «Вова не ел. Это Вася». Вася ответил: «Вова съел. Алёша не ел». Вова ответил: «Вася не ел. И отстань: я ещё не сделал уроки!» Оказалось, что два внука в каждом из двух заявлений сказали правду, а третий внук солгал оба раза. Кто съел варенье?

24. Декан Холмс допрашивал трёх студентов A, B, C, подозреваемых в похищении с кафедры ВМ контрольной работы по ДМ. Каждый из них говорил либо правду, либо лгал. Студент A сказал, что B лжёт. Студент B сказал, что C лжёт. Студент C сказал, что лгут и A и B. Может ли декан определить, кто из студентов A, B, C говорит правду?

ВТОРОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 12–17 мая)

V. Графы

1. Докажите изоморфность следующих пар графов (рис. 8–11):

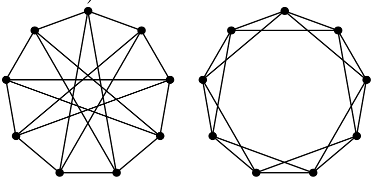

Рис. 8

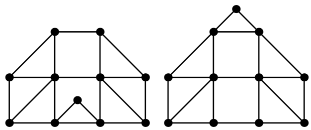

Рис. 9

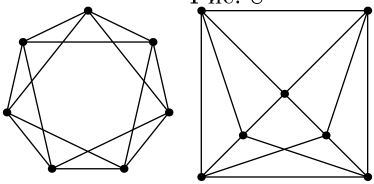

Рис. 10

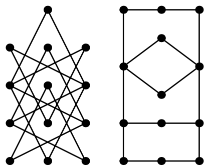

Рис. 11

2. Докажите неизоморфность следующих пар графов (рис. 12, 13):

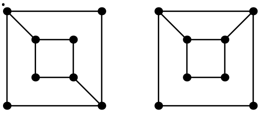

Рис. 12

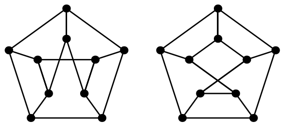

Рис. 13

3. Постройте эйлеровы циклы в графах (рис. 14, 15):

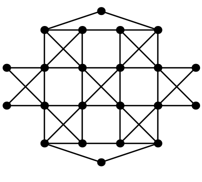

Рис. 14

K^4

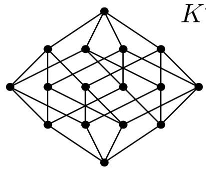

Рис. 15

4. Докажите гамильтоновость графа, образованного вершинами и рёбрами n-мерного единичного куба K^n для

а) $n = 2, 3, 4$ (рис. 15) б)* для $n \geqslant 5$.

5. Докажите, что граф «ход коня»

а) на шахматной доске 3×4 является полугамильтоновым и планарным;

б) на шахматной доске 3×5 не является даже полугамильтоновым;

в)* на шахматной доске 4×4 не является гамильтоновым и даже полугамильтоновым.

6. Докажите негамильтоновость следующих графов:

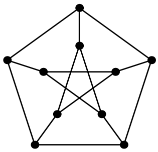

Рис. 16

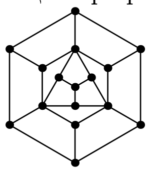

Рис. 17

7. С помощью алгоритма Дейкстры найдите самый дешёвый маршрут из вершины ① в вершину ⑨ и обратно в неорграфе, изображённом на рис. 18, и в орграфе, изображённом на рис. 19. (Число на ребре (дуге) — стоимость проезда по этому ребру (дуге)).

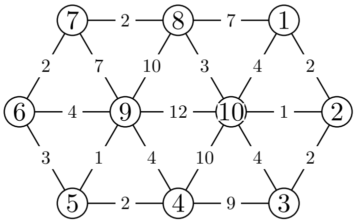

Рис. 18

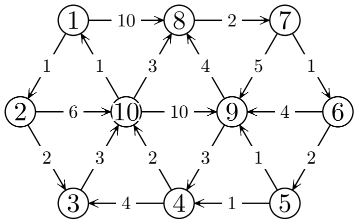

Рис. 19

8. В транспортной сети (рис. 20) постройте:

а) полный поток;

б) максимальный поток. Докажите его максимальность.

(Число на дуге — пропускная способность этой дуги).

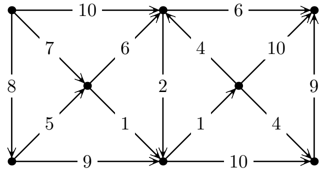

Рис. 20

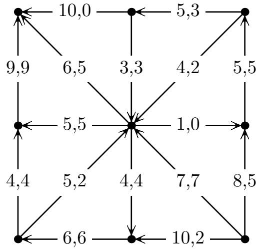

Рис. 21

9. Проверьте, что поток (рис. 21) является полным. Увеличьте его до максимального. Докажите максимальность построенного потока.

VI. Коды

10. Построить префиксный двоичный код с минимальной избыточностью (код Хаффмена) для пятибуквенных сообщений, в которых относительные частоты появления букв равны 0,3; 0,3; 0,15; 0,15; 0,1. Разбить на буквы фразу: 00010000101110111000010110.

11. Построить префиксные двоичные коды Фано и Хаффмена для передачи пятибуквенных сообщений, в которых буквы встречаются с относительными частотами 0,3; 0,3; 0,2; 0,15; 0,05. Сравнить средние длины этих кодов.

12. Построить префиксный код с минимальной избыточностью (код Хаффмена) с помощью алфавита {0,1,2,3} для передачи девятибуквенных сообщений с относительными частотами появления букв: 0,22; 0,2; 0,12; 0,11; 0,1; 0,09; 0,08; 0,06; 0,02.

13. Существует ли код длины 20, содержащий 1000 кодовых слов и исправляющий любые комбинации из трёх и менее ошибок?

14. Доказать, что для исправления k (и меньшего числа) ошибок и вместе с этим обнаружения l (и меньшего числа) ошибок ($l \geqslant k$) необходимо и достаточно, чтобы кодовое расстояние d удовлетворяло неравенству $d \geqslant l + k + 1$.

15. Используя код Хемминга длины 7, найти положение одиночной ошибки в слове (1010101) и закодировать сообщение (1100).

16. Построить систему проверок для кодов Хемминга длин 5; 6; 15. Сколько кодовых слов содержит каждый из них?

17. К кодовым словам $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_7)$ кода Хемминга длины 7 добавлен символ $\beta_0 = \sum\limits_{k=1}^{7} \beta_k$. Доказать, что полученный код имеет 16 кодовых слов, позволяет исправить любую одиночную ошибку и обнаружить любую двойную ошибку в кодовом слове.

Задания составили: Л.П. Купцов, к.ф.-м.н., доцент,
А.Г. Здор, к.ф.-м.н., ст. преп.