УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
Д.А. Зубцов
10 декабря 2013 г.

ПРОГРАММА И ЗАДАНИЯ

по дисциплине:	**Линейная алгебра**
по направлению	010900 «Прикладные математика и физика»
факультет:	**для всех факультетов**
кафедра:	**высшей математики**
курс:	I
Трудоёмкость:	обязательная часть — 3 зач. ед., вариативная часть— 1 зач. ед., дополнительная за сложность — 1 зач. ед.
семестр:	2
лекции:	34 часа
практические (семинарские) занятия:	34 часа
лабораторные занятия:	нет
ВСЕГО ЧАСОВ	— 68

Экзамен — 2 семестр

Самостоятельная работа — 2 часа в неделю

Программу составили:

Д.В. Беклемишев, д.п.н., профессор
П.А. Кожевников, к.ф.-м.н., доцент
О.К. Подлипский, к.ф.-м.н., доцент
И.А. Чубаров, к.ф.-м.н., доцент

Программа принята на заседании кафедры
высшей математики 1 декабря 2013 г.

Заведующий кафедрой Е.С. Половинкин

П Р О Г Р А М М А
(базовый уровень)

Ранг матрицы. Теорема о базисном миноре. Теорема о ранге матрицы.

Системы линейных уравнений. Теорема Кронеккера–Капелли. Фундаментальная система решений и общее решение однородной системы линейных уравнений. Общее решение неоднородной системы. Метод Гаусса.

Аксиоматика линейного пространства. Линейная зависимость и линейная независимость систем элементов в линейном пространстве. Размерность и базис.

Подпространства и линейные оболочки в линейном пространстве. Сумма и пересечение подпространств. Прямая сумма. Формула размерности суммы подпространств.

Разложение по базису в линейном пространстве. Координатное представление элементов линейного пространства и операций с ними. Теорема об изоморфизме.

Изменение координат при изменении базиса в линейном пространстве. Матрица перехода и ее свойства.

Линейные отображения и линейные преобразования линейного пространства. Ядро и множество образов. Операции над линейными преобразованиями. Обратное преобразование.

Матрицы линейного отображения и линейного преобразования для конечномерных пространств. Операции над линейными преобразованиями в координатной форме. Изменение матрицы линейного отображения при замене базисов.

Инвариантные подпространства линейных преобразований. Собственные векторы и собственные значения. Собственные подпространства. Линейная независимость собственных векторов, принадлежащих различным собственным векторам.

Нахождение собственных значений и собственных векторов линейного преобразования конечномерного линейного пространства. Характеристическое уравнение. Его инвариантность. Оценка размерности собственного подпространства. Условия диагонализуемости матрицы линейного преобразования.

Линейные формы. Сопряженное (двойственное) пространство.

Билинейные и квадратичные формы. Их координатное представление в конечномерном линейном пространстве. Изменение матриц билинейной и квадратичной форм при изменении базиса.

Приведение квадратичной формы к каноническому виду методом Лагранжа. Теорема инерции для квадратичных форм. Знакоопределенные квадратичные формы. Критерий Сильвестра.

Аксиоматика евклидова пространства. Неравенство Коши–Буняковского. Неравенство треугольника. Матрица Грама и ее свойства.

Конечномерное евклидово пространство. Ортогонализация базиса. Переход от одного ортонормированного базиса к другому. Ортогональное дополнение подпространства.

Линейные преобразования евклидова пространства. Ортогональное проектирование на подпространство. Сопряженные преобразования, их свойства.

Самосопряженные преобразования. Свойства их собственных векторов и собственных значений.

Существование базиса из собственных векторов самосопряженного преобразования.

Ортогональные преобразования. Их свойства. Координатный признак ортогональности.

Построение ортонормированного базиса, в котором квадратичная форма имеет диагональный вид. Одновременное приведение к диагональному виду пары квадратичных форм, одна из которых является знакоопределенной.

П Р О Г Р А М М А
(повышенный уровень)

Ранг матрицы. Теорема о базисном миноре. Теорема о ранге матрицы.

Системы линейных уравнений. Теорема Кронеккера–Капелли. Фундаментальная система решений и общее решение однородной системы линейных уравнений. Общее решение неоднородной системы. Метод Гаусса. Теорема Фредгольма.

Аксиоматика линейного пространства. Линейная зависимость и линейная независимость систем элементов в линейном пространстве. Размерность и базис.

Подпространства и линейные оболочки в линейном пространстве. Сумма и пересечение подпространств. Прямая сумма. Формула размерности суммы подпространств. Вывод формулы размерности суммы подпространств. Гиперплоскости.

Разложение по базису в линейном пространстве. Координатное представление элементов линейного пространства и операций с ними. Теорема об изоморфизме. Координатная форма необходимого и достаточного условия линейной зависимости элементов.

Изменение координат при изменении базиса в линейном пространстве. Матрица перехода и ее свойства. Координатная форма задания подпространств и гиперплоскостей.

Линейные отображения и линейные преобразования линейного пространства. Ядро и множество образов. Операции над линейными преобразованиями. Обратное преобразование. Линейное пространство линейных отображений. Алгебра линейных преобразований.

Матрицы линейного отображения и линейного преобразования для конечномерных пространств. Операции над линейными преобразованиями в координатной форме. Изменение матрицы линейного отображения при замене базисов. Изоморфизм пространства линейных отображений и пространства матриц.

Инвариантные подпространства линейных преобразований. Собственные векторы и собственные значения. Собственные подпространства. Линейная независимость собственных векторов, принадлежащих различным собственным векторам.

Нахождение собственных значений и собственных векторов линейного преобразования конечномерного линейного пространства. Характеристическое уравнение. Его инвариантность. Оценка размерности собственного подпространства. Условия диагонализуемости матрицы линейного преобразования. Приведение матрицы линейного преобразования к треугольному виду. Формулировка теоремы Жордана.

Линейные формы. Сопряженное (двойственное) пространство. Биортогональный базис. Вторичное сопряженное пространство.

Билинейные и квадратичные формы. Их координатное представление в конечномерном линейном пространстве. Изменение матриц билинейной и квадратичной форм при изменении базиса.

Приведение квадратичной формы к каноническому виду методом Лагранжа. Теорема инерции для квадратичных форм. Знакоопределенные квадратичные формы. Критерий Сильвестра.

Приведение квадратичной формы к диагональному виду элементарными преобразованиями.

Аксиоматика евклидова пространства. Неравенство Коши–Буняковского. Неравенство треугольника. Матрица Грама и ее свойства.

Конечномерное евклидово пространство. Ортогонализация базиса. Переход от одного ортонормированного базиса к другому. Ортогональное дополнение подпространства.

Линейные преобразования евклидова пространства. Ортогональное проектирование на подпространство. Сопряженные преобразования, их свойства. Координатная форма сопряжения преобразования конечномерного евклидова пространства.

Самосопряженные преобразования. Свойства их собственных векторов и собственных значений. Существование базиса из собственных векторов самосопряженного преобразования.

Ортогональные преобразования. Их свойства. Координатный признак ортогональности. Свойства ортогональных матриц.

Полярное разложение линейных преобразований евклидова пространства. Канонический вид матрицы ортогонального преобразования. Сингулярное разложение.

Построение ортонормированного базиса, в котором квадратичная форма имеет диагональный вид. Одновременное приведение к диагональному виду пары квадратичных форм, одна из которых является знакоопределенной.

Унитарное пространство и его аксиоматика. Унитарные и эрмитовы матрицы. Унитарные и эрмитовы преобразования. Эрмитовы формы. Свойства унитарных и эрмитовых преобразований. Свойства эрмитовых форм.

Понятие о тензорах. Основные тензорные операции. Тензоры в евклидовом пространстве. Тензоры в ортонормированном базисе.

Литература

1. *Беклемишев Д.В.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. – 10-е изд. – М.: Наука, 2003.
2. *Кострикин А.И.* Введение в алгебру. Ч. 1. Основы алгебры. – М.: Физматлит, 2004.
3. *Умнов А.Е.* Аналитическая геометрия и линейная алгебра. Ч. 1, 2. – М.: МФТИ, 2006, http://www.umnov.ru.
4. *Чехлов В.И.* Лекции по аналитической геометрии и линейной алгебре. – М.: МФТИ, 2000.

З А Д А Н И Я

Литература

Все номера задач указаны по книге:
Беклемишева Л.А., Петрович А.Ю., Чубаров И.А. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре. – 3-е изд. – М.: Физматлит, 2003.

ЗАМЕЧАНИЯ

1. Задачи с подчёркнутыми номерами рекомендовано разобрать на семинарских занятиях.
2. Задачи и разделы, отмеченные звёздочкой (*), являются необязательными для базового уровня.
3. Задачи, отмеченные двумя звёздочками (**), являются необязательными для повышенного уровня.

ПЕРВОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 24–29 марта)

I. Матрицы

1. Действия с матрицами (повторение)

$\underline{15.34}$; 15.35; 15.72*; 15.83; 15.127*.

2. Обратная матрица

$\underline{15.56}$; 15.58; 15.65(2, 12*); 15.54(3).

3. Ранг матрицы

16.13; $\underline{16.19(4)}$; 16.34*; 16.39*; 16.28**; 16.41**.

II. Системы линейных уравнений

$\underline{17.1(3)}$; 18.1(11); 18.17(3); 19.6($\underline{20}$, 25); 19.7(2); 19.19(1)*; 19.29(1)*.

III. Линейные пространства

1. Подпространство, линейная оболочка, базис

20.3($\underline{3}$, 4); 20.4(2,$\underline{3}$); 20.7(4); 20.14(5); 20.16; $\underline{20.18}$; $\underline{20.22(4)}$; $\underline{20.23(3)}$; 20.29; 18.13*.

2. Сумма и пересечение, прямая сумма

$\underline{15.93}$; 15.95(2); 21.4(1); $\underline{21.6(5)}$; 21.7(6, $\underline{7}$).

IV. Линейные отображения

1. Матрица линейного отображения, ядро, образ

23.8($\underline{1}$, 3); 23.9($\underline{2}$, 3); 23.14(1, 3); $\underline{23.15(1)}$; $\underline{23.28(4)}$; 23.30(2); $\underline{23.41(2)}$; 23.62(4); $\underline{23.67(3)}$; 23.70(1).

2. Действия с линейными отображениями

23.82(1)*; 23.83(2); 23.74(4)**.

3. Линейные функции

31.22**; 31.37**.

Сводная таблица задач первого задания

разд.	**$\underline{\text{задачи}}$**	**задачи**	**задачи***	**задачи****
I, 1	15.34	15.35; 15.83	15.72; 15.127	
I, 2	15.56	15.47(3, 6); 15.58; 15.65(2); 15.54(3)	15.65(12)	
I, 3	16.19(4)	16.13;	16.34; 16.39	16.28; 16.41
II	17.1(3); 19.6(20)	18.1(11); 18.17(3); 19.6(25); 19.7(2)	19.19(1); 19.29(1)	
III, 1	20.3(3); 20(4(3); 20.18; 20.22(4); 20.23(3)	20.3(4); 20.4(2); 20.7(4); 20.14(5); 20.16; 20.29	18.13	
III, 2	15.93; 21.6(5); 21.7(7)	15.95(2); 21.4(1); 21.7(6)		
IV, 1	23.8(1); 23.9(2); 23.15(1); 23.28(4); 23.41(2); 23.67(3)	23.8(3); 23.9(3); 23.14(1, 3); 23.30(2); 23.62(4); 23.70(1)		
IV, 2		23.83(2)	23.82(1)	23.74(4)
IV, 3				31.22; 31.37

$\boxed{48+9^*+5^{**}}$

ВТОРОЕ ЗАДАНИЕ

(срок сдачи 12–17 мая)

I. Структура линейного преобразования

1. Собственные векторы, собственные значения, диагонализируемость

24.13; 24.14(2)*; 24.20(2); 24.28(2)*; 24.29**; 24.30(19, 30); 24.42(1, 3); 24.49**; 23.98(2)**; 24.26(4)**.

2. Инвариантные подпространства

24.69; 24.71; 24.72(1); 24.82(2)**; 24.100**.

II. Билинейные и квадратичные функции

32.2(4); 32.3(1); 32.7(3); 32.8(5, 8, 12); 32.9(7, 12); 32.21**.

III. Евклидовы пространства

1. Матрица Грама, ортогональное дополнение, проекция, ортогонализация

25.7; 25.25(1); 25.23; 25.9*; 26.13(4); 26.14(2); 26.16(1); 26.27(1); 26.28(1); 26.42(1); 26.44(1).

2. Линейные преобразования евклидовых пространств. Самосопряженные и ортогональные преобразования

28.34(1); 29.5*; 29.7(1)*; 29.14(2); 29.19(3, 7); 29.37(2)*; 29.47(2); 25.50(2); 29.49; 29.53(2)*.

Т.1. Являются ли преобразования из задачи 23.8(2, 5)

а) самосопряженными; б) ортогональными?

Т.2*. Преобразование φ евклидового пространства из задачи 25.7 задано формулой

$$\varphi(f)(y) = \int\limits_{-1}^{1} K(x,y) f(x)\, dx,$$

где $K\colon [-1,1]\times[-1,1] \mapsto \mathbb{R}$ — непрерывная функция. При каком условии на K преобразование φ является самосопряженным?

3. Билинейные и квадратичные функции в евклидовых пространствах

32.27(4, 13); 32.29*; 32.30**; 32.39(2); 32.36(4, 5); 32.37*.

IV.** Тензоры

35.3(1, 5, 6); 35.4(2, 5, 6); 35.8(1); 36.25(2); 36.35(4, 5, 13); 36.36(1).

Сводная таблица задач второго задания

разд.	**задачи**	**задачи**	**задачи***	**задачи****
I, 1	24.13; 24.20(2); 24.30(30); 24.42(3)	24.30(19); 24.42(1)	24.14(2); 24.28(2)	24.29; 24.49; 23.98(2); 24.26(4)
I, 2	24.71; 24.72(1)	24.69;		24.82(2); 24.100
II	32.2(4); 32.8(12); 32.9(12)	32.3(1); 32.7(3); 32.8(5, 8); 32.9(7)		32.21
III, 1	25.7; 25.23; 26.13(4); 26.16(1); 26.27(1); 26.44(1)	25.25(1); 26.14(2); 26.28(1); 26.42(1)	25.9	
III, 2	29.14(2); 29.19(7); 29.47(2)	28.34(1); 29.19(3); 25.50(2)	29.5; 29.7(1); 29.37(2); 29.53(2)	
		Т. 1	Т. 2	
III, 3	32.27(13); 32.36(5); 32.37	32.27(4); 32.39(2); 32.36(4)	32.29; 32.37	32.30
IV				35.3(1,5,6); 35.4(2,5,6); 35.8(1); 36.25(2); 36.35(4,5,13); 36.36(1)

39+10*+20**

Задания составила В.Ю. Дубинская, к.ф.-м.н., доцент