ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ — 2008

РЕШЕНИЕ 2 — 6 КУРСЫ

1. Найти бесконечно дифференцируемую функцию $f : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$, для которой при любом $x_0 > 0$ рекуррентная последовательность $x_{n+1} = f(x_n)$ удовлетворяет асимптотическому равенству

$$x_n \sim \frac{1}{\ln n}, \quad n \to \infty.$$

Решение. Пусть для начала $x_n = 1/\ln n$. Построим такую функцию, что $f(x_{n-1}) = x_n$. Для этого рассмотрим $\varphi(t) = 1/\ln t$ и найдем решение функционального уравнения $f(\varphi(t-1)) = \varphi(t)$. Это есть функция $f(t) = 1/\ln\left(1 + e^{1/t}\right)$. Покажем, что f — то, что надо.

Для последовательности $x_{n+1} = 1/\ln\left(1 + e^{1/x_n}\right)$ получаем

$$e^{1/x_{n+1}} = 1 + e^{1/x_n} = \ldots = n + 1 + e^{1/x_0},$$

откуда следует требуемое условие.

2. Доказать, что симметричная матрица A неотрицательно определена тогда и только тогда, когда для любой симметричной неотрицательно определённой матрицы B выполнено неравенство $\operatorname{tr} AB \geq 0$.

Решение. Заметим, что если X — столбец, то матрица XX^T неотрицательно определена и симметрична. Также заметим, что всякая неотрицательно определённая симметричная B представляется в виде (теорема о приведении к диагональному виду)

$$B = X_1 X_1^T + \cdots + X_n X_n^T.$$

Пусть A неотрицательно определена. Тогда $B = X_1 X_1^T + \cdots + X_n X_n^T$ и

$$\operatorname{tr} AB = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{tr} A X_i X_i^T = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{tr} X_i^T A X_i \geq 0$$

по определению положительной определённости.

В обратную сторону: для любого столбца X положим $B = XX^T$ и получим, что

$$\operatorname{tr} X^T A X = \operatorname{tr} A X X^T \geq 0.$$

3. Пусть $B \subset \mathbb{R}^n$ — центрально симметричное выпуклое компактное тело с центром нуле. Для множества $A \subset \mathbb{R}^n$ определим множество

$$f(A) = \bigcap_{a \in A} (a + B)$$

(здесь $a+B=\{a+x \mid x\in B\}$ — сдвиг множества B). Доказать, что непустое множество A есть пересечение сдвигов множества B тогда и только тогда, когда $A=f(f(A))$.

Решение. Заметим, что множество $S=\cap_{x\in B}(z+B)$ есть $\{0\}$. Действительно, $0=x+(-x)\in x+B$ при любом $x\in B$, поэтому $0\in S$. С другой стороны, пусть $0\neq y\in S$; тогда из компактности B следует, что существует $\lambda=\max\{\mu \mid \mu y\in B\}\geq 1$. Тогда из $y\in S\subset(-\lambda y)+B$, то есть $(1+\lambda)y\in B$. Противоречие с выбором λ. Значит, $S=\{0\}$. Отсюда следует, что $\cap_{z\in x+B}(z+B)=\{x\}$ для любого x.

Если $A=f(f(A))$, то очевидно A есть пересечение сдвигов B.

Пусть A есть такое множество, что $f(A)\neq\emptyset$.

Покажем, что $A\subset f(f(A))$. Пусть $a\in A$. Тогда $f(A)=\bigcap\limits_{z\in A}(z+B)\subset a+B$. Отсюда $f(f(A))=\bigcap\limits_{z\in f(A)}(z+B)\supset\bigcap\limits_{z\in a+B}(z+B)=\{a\}$. Итак, $A\subset f(f(A))$.

Пусть множество A есть непустое пересечение сдвигов B, т.е. для некоторого множества X выполнено $A=f(X)$. По доказанному $f(A)=f(f(X))\supset X$, откуда $f(f(A))\subset f(X)=A$.

4. Пусть $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ — непрерывная функция. Доказать, что найдется подмножество $X\subset[0,1]$ мощности континуум, на котором функция f монотонна.

Решение. Пусть найдутся такие точки $a,b\in[0,1]$, что $a<b$ и $f(a)<f(b)$. Если это не так, то для любых точек $a,b\in[0,1]$, $a<b$, выполнено $f(a)\geq f(b)$ и требуемое доказано.

Для каждого $c\in[f(a),f(b)]$ определим $x_c=\sup\{x\in[a,b] \mid f(x)=c\}$. В силу непрерывности f получаем, что $f(x_c)=c$ и из $c_1<c_2$ следует $x_{c_1}<x_{c_2}$ и $f(x_{c_1})=c_1<c_2=f(x_{c_2})$. По построению $\{x_c \mid c\in[f(a),f(b)]\}$ — искомый континуум.

5. а) Замкнутое ограниченное множество $A\subset\mathbb{R}^n$ обладает свойством: для любой точки $x\in\mathbb{R}^n$ существует ровно одна точка $a(x)\in A$ такая, что $\|x-a(x)\|=\sup\limits_{a\in A}\|x-a\|$. Доказать, что множество A одноточечно.

б) Докажите то же утверждение для произвольного ограниченного множества $A\subset\mathbb{R}^n$.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x)=\sup\limits_{a\in A}\|x-a\|$. Поскольку это непрерывная функция на $\mathbb{R}^n$ и $\lim\limits_{\|x\|\to+\infty}f(x)=+\infty$, то минимум f достигается в некоторой точке $x_0\in\mathbb{R}^n$. Покажем, что $A=\{x_0\}$.

Допустим противное. Тогда $f(x_0) > 0$ и шар $B_{f(x_0)}(x_0)$ является шаром наименьшего радиуса (равного $f(x_0)$), который содержит A среди всех шаров, содержащих A. При этом в силу условия задачи $\partial B_{f(x_0)}(x_0) \cap A = \{a_0\}$. Определим полусферу.

$$S = \partial B_{f(x_0)}(x_0) \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid (a_0 - x_0, x - x_0) \le 0\}$$

Так как $S \cap A = \emptyset$, то по лемме Гейне-Бореля существует ненулевой сдвиг $S_t = S + t(a_0 - x_0)$, $t > 0$, вдоль вектора $a_0 - x_0$, сохраняющий условие $S_\tau \cap A = \emptyset$ для всех $\tau \in [0, t]$. Отсюда следует, что

$$A \subset B_{f(x_0)}(x_0) \cap B_{f(x_0)}(x_0 + t(a_0 - x_0)).$$

Но по теореме Пифагора получаем, что тогда

$$A \subset x_0 + \frac{t}{2}(a_0 - x_0) + \sqrt{f^2(x_0) - \frac{t^2\|a_0 - x_0\|^2}{4}}\, B_1(0),$$

что противоречит минимальности радиуса $f(x_0)$.

б) Докажем, что если множество A удовлетворяет нашему свойству, то и его замыкание $B = \overline{A}$ также ему удовлетворяет. Заметим, что $\max\limits_{b\in B} \|x - b\| = \max\limits_{a\in A} \|x - a\|$ для любого x (максимумы по условию существуют!).

Предположим противное. Тогда для некоторой точки x существуют две точки $b_1, b_2 \in B$ такие, что $\|x - b_i\| = \max\limits_{b\in B} \|x - b\| =: s$. Тогда одна из них — скажем, b_1 — лежит в $B \setminus A$. Рассмотрим точку $x_1 = x + (x - b_1)$. Тогда $\|x_1 - b_1\| = \|2(x - b_1)\| = 2s$, а для любой другой точки $b \in B$ имеем $\|x_1 - b\| \le \|x_1 - x\| + \|x - b\| = 2s$. При этом равенство может достигаться тогда и только тогда, когда x_1, b и x лежат на одной прямой (x между b и x_1), и $\|x - b\| = s$; это выполняется только при $b = b_1$. Таким образом, $\|x_1 - b_1\| > \|x_1 - b\|$ для любой точки $b \in B \setminus \{b_1\} \supset A$; в частности, $\|x_1 - b_1\| > \max\limits_{x\in A} \|x_1 - a\|$. Это невозможно, так как $\max\limits_{b\in B} \|x_1 - b\| = \max\limits_{a\in A} \|x_1 - a\|$.

Итак, множество B удовлетворяет нашему свойству и по пункту а) одноточечно. Значит, и A одноточечно.

6. Пусть $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ — выпуклая непрерывно дифференцируемая функция; $f(0) = 0$, $\nabla f(0) = 0$. Доказать, что

$$f(x) \ge \int\limits_0^{\|x\|} \varphi(t)\, dt, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^2,$$

где $\varphi(t) = \inf\limits_{\|x\|=t} \|\nabla f(x)\|$, $\forall t \ge 0$.

Решение. Будем обозначать $f'(x) = \nabla f(x)$. Определим

$$x(t) = \arg\min_{\|x\|=t} f(x). \qquad (1)$$

Для любого ненулевого вектора y, такого, что $\langle y, x(t)\rangle = 0$ следует равенство $\langle f'(x(t)), y\rangle = 0$ (в противном случае получаем противоречие с фактом $f(x(t)) = \min\limits_{\|x\|=t} f(x)$). Поэтому для всех $t \geq 0$ найдется число

$$\lambda(t) : f'(x(t)) = \lambda(t)x(t). \qquad (2)$$

Поскольку f выпуклая функция, то $\langle f'(x) - f'(0), x - 0\rangle \geq 0$, поэтому $\lambda(t) \geq 0$. Заметим, что

$$\varphi(t) \leq \|f'(x(t))\| = \lambda(t)\|x(t)\| = t\lambda(t).$$

Поэтому

$$\lambda(t) \geq \frac{\varphi(t)}{t}, \qquad \forall t > 0. \qquad (3)$$

Зафиксируем $t > 0$. Пусть $\Delta > 0$ и $0 < t - \Delta \leq t_1 \leq t$. Так как из (1) следует, что $f(x(t_1)) \leq f\left(\frac{t_1}{t}x(t)\right)$, то

$$f(x(t)) - f(x(t_1)) \geq f(x(t)) - f\left(\frac{t_1}{t}x(t)\right) = \langle f'(x(t)), x(t)\rangle \frac{t - t_1}{t} + o(\Delta) = (2)$$

$$(2) = \lambda(t)\|x(t)\|^2 \frac{t - t_1}{t} + o(\Delta) = \lambda(t)t(t - t_1) + o(\Delta) \geq (3) \geq \varphi(t)(t - t_1) + o(\Delta).$$

Из этой выкладки получаем, для функции $\psi(t) = f(x(t)) = \min\limits_{\|x\|=t} f(x)$ существует *нижняя левая* производная

$$\psi'_{l-}(t) = \liminf_{\Delta t \to +0} \frac{\psi(t) - \psi(t - \Delta t)}{\Delta t} \geq \varphi(t) \qquad (4)$$

для всех $t \geq 0$. Заметим, что функция $\psi(t)$ непрерывна, так как $f(x)$ равномерно непрерывна на любом компакте. Положим $\Phi(t) = \int\limits_0^t \varphi(t)\,dt$. Тогда $\psi'_{l-}(t) \geq \Phi'(t)$ и $\psi(0) = \Phi(0) = 0$. Покажем, что при этих условиях $\psi(t) \geq \Phi(t)$.

Пусть $g(t) = \psi(t) - \Phi(t)$. Тогда $g'_{l-}(t) \geq 0$ и $g(0) = 0$. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и покажем, что $g(t) \geq -\varepsilon t$. Положим $t_0 = \min\{s \in [0, t] : g(t) - g(s) \geq -\varepsilon(t - s)\}$ (минимум существует, так как $g(t)$ непрерывна). Предположим, что $t_0 > 0$. Тогда из $g'_{l-}(t_0) \geq 0$ следует, что существует $\delta \in (0, t_0)$ такое, что $g(t_0-\delta) \leq g(t_0)+\varepsilon\delta$. Это значит, что $g(t)-g(t_0-\delta) \geq g(t)-g(t_0)-\varepsilon\delta \geq -\varepsilon(t-(t_0-\delta))$, что противоречит минимальности t_0. Значит, $t_0 = 0$, и $g(t) = g(t) - g(0) \geq -\varepsilon t$. В силу произвольности $\varepsilon > 0$ получаем, что $g(t) \geq 0$.