ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ — 2008

РЕШЕНИЕ 1 КУРС

1. Пусть для натурального n число x_n — корень уравнения $x = \operatorname{tg} x$ из промежутка $(\pi n, \pi(n+1))$. Доказать, что

$$x_n = \pi n + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{\pi n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Решение. Пусть $y_n = x_n - \pi n - \frac{\pi}{2}$. Легко видеть, что $y_n < 0$ и $y_n \to 0$.

$$y_n + \pi n + \frac{\pi}{2} = \operatorname{tg}\left(y_n + \pi n + \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{ctg} y_n = -\frac{1}{y_n} + O\left(y_n\right),$$

$$\pi n + \frac{\pi}{2} = -\frac{1}{y_n} + O\left(y_n\right).$$

Из асимптотического равенства получаем, что

$$y_n = -\frac{1}{\pi n + \frac{\pi}{2}} + \frac{1}{\pi n + \frac{\pi}{2}} O(y_n^2),$$

откуда $y_n = -\frac{1}{\pi n} + O(1/n^2)$.

2. Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_n$ и $e'_1, e'_2, \ldots, e'_n$ — два базиса в $\mathbb{R}^n$. Доказать, что существует такая перестановка $e'_{i_1}, e'_{i_2}, \ldots, e'_{i_n}$ векторов $e'_1, e'_2, \ldots, e'_n$, что для любого $k = 1, 2, \ldots, n$ векторы $e'_{i_1}, e'_{i_2}, \ldots, e'_{i_k}, e_{k+1}, e_{k+2}, \ldots, e_n$ образуют базис.

Решение. Пусть среди $e'_1, e'_2, \ldots, e'_n$ выбрано $k < n$ таких различных векторов $e'_{i_1}, e'_{i_2}, \ldots, e'_{i_k}$, что $e'_{i_1}, e'_{i_2}, \ldots, e'_{i_k}, e_{k+1}, e_{k+2}, \ldots, e_n$ — базис. Рассмотрим $(n-1)$-мерное подпространство $V_{k+1} = \langle e'_{i_1}, e'_{i_2}, \ldots, e'_{i_k}, e_{k+2}, \ldots, e_n \rangle$. Среди векторов $e'_1, e'_2, \ldots, e'_n$ найдется вектор v, не лежащий в V_{k+1}. Заметим, что v отличен от $e'_{i_1}, e'_{i_2}, \ldots, e'_{i_k}$, поскольку $e'_{i_1}, e'_{i_2}, \ldots, e'_{i_k} \in V_{k+1}$. Положим $e'_{i_{k+1}} = v$, тогда $e'_{i_1}, e'_{i_2}, \ldots, e'_{i_{k+1}}, e_{k+2}, e_{k+3}, \ldots, e_n$ — базис.

Рассуждая как показано выше для $k = 0, 1, \ldots, n-1$, мы получим требуемую перестановку $e'_{i_1}, e'_{i_2}, \ldots, e'_{i_n}$.

3. Пусть $B_1(a)$ — замкнутый единичный евклидов шар в $\mathbb{R}^n$ с центром в точке $a \in \mathbb{R}^n$. Для множества $A \subset \mathbb{R}^n$ определим множество

$$f(A) = \bigcap_{a \in A} B_1(a).$$

Доказать, что непустое множество A есть пересечение замкнутых единичных шаров тогда и только тогда, когда $A = f(f(A))$.

Решение. Если $A = f(f(A))$, то очевидно A есть пересечение замкнутых единичных шаров.

Пусть A есть такое множество, что $f(A) \neq \emptyset$.

Покажем, что $A \subset f(f(A))$. Пусть $a \in A$. Тогда $f(A) = \bigcap\limits_{z \in A} B_1(z) \subset B_1(a)$. Отсюда $f(f(A)) = \bigcap\limits_{z \in f(A)} B_1(z) \supset \bigcap\limits_{z \in B_1(a)} B_1(z) = \{a\}$. Итак, $A \subset f(f(A))$.

Пусть множество A есть непустое пересечение единичных замкнутых шаров, т.е. для некоторого множества B выполнено $A = f(B)$. По доказанному $f(A) = f(f(B)) \supset B$, откуда $f(f(A)) \subset f(B) = A$.

4. Даны непрерывные функции $f, g\colon [0,1] \to [0,1]$, причем известно, что f строго возрастает. Докажите, что

$$\int_0^1 f(g(x))\,dx \leq \int_0^1 (f(x) + g(x))\,dx.$$

Решение. Пусть $c = \max_{x\in[0,1]}(f(x) - x)$. Тогда

$$\int_0 (f(g(x)) - g(x))\,dx \leq \int_0^1 c\,dx = c.$$

Следовательно, достаточно доказать, что $c \leq \int_0^1 f(x)\,dx$. Если $c \leq 0$, то это неравенство очевидно. Пусть $c > 0$, и $f(x_0) - x_0 = c$. Тогда $0 \leq x_0 = f(x_0) - c \leq 1 - c$. Тогда

$$\int_0^1 f(x)\,dx \geq \int_{x_0}^1 f(x)\,dx \geq \int_{x_0}^1 f(x_0)\,dx = (1 - x_0)(x_0 + c).$$

Осталось заметить, что $(1-x_0)(x_0+c) = c + x_0(1-c-x_0) \geq c$ при $0 \leq x_0 \leq 1-c$.

5. Пусть $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция. Доказать, что найдется подмножество $X \subset [0,1]$ мощности континуум, на котором функция f монотонна.

Решение. Пусть найдутся такие точки $a, b \in [0,1]$, что $a < b$ и $f(a) < f(b)$. Если это не так, то для любых точек $a, b \in [0,1]$, $a < b$, выполнено $f(a) \geq f(b)$ и требуемое доказано.

Для каждого $c \in [f(a), f(b)]$ определим $x_c = \sup\{x \in [a,b] \mid f(x) = c\}$. В силу непрерывности f получаем, что $f(x_c) = c$ и из $c_1 < c_2$ следует $x_{c_1} < x_{c_2}$ и $f(x_{c_1}) = c_1 < c_2 = f(x_{c_2})$. По построению $\{x_c \mid c \in [f(a), f(b)]\}$ — искомый континуум.

6. а) Замкнутое ограниченное множество $A \subset \mathbb{R}^2$ обладает свойством: для любой точки $x \in \mathbb{R}^2$ существует ровно одна точка $a(x) \in A$ такая, что $\|x - a(x)\| = \sup\limits_{a \in A} \|x - a\|$. Доказать, что множество A одноточечно.

б) Докажите то же утверждение для произвольного ограниченного множества $A \subset \mathbb{R}^2$.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = \sup\limits_{a \in A} \|x - a\|$. Поскольку это непрерывная функция на $\mathbb{R}^n$ и $\lim\limits_{\|x\| \to +\infty} f(x) = +\infty$, то минимум f достигается в некоторой точке $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Покажем, что $A = \{x_0\}$.

Допустим противное. Тогда $f(x_0) > 0$ и шар $B_{f(x_0)}(x_0)$ является шаром наименьшего радиуса (равного $f(x_0)$), который содержит A среди всех шаров, содержащих A. При этом в силу условия задачи $\partial B_{f(x_0)}(x_0) \cap A = \{a_0\}$. Определим полусферу.

$$S = \partial B_{f(x_0)}(x_0) \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid (a_0 - x_0, x - x_0) \leq 0\}$$

Так как $S \cap A = \emptyset$, то по лемме Гейне-Бореля существует ненулевой сдвиг $S_t = S + t(a_0 - x_0)$, $t > 0$, вдоль вектора $a_0 - x_0$, сохраняющий условие $S_\tau \cap A = \emptyset$ для всех $\tau \in [0, t]$. Отсюда следует, что

$$A \subset B_{f(x_0)}(x_0) \cap B_{f(x_0)}(x_0 + t(a_0 - x_0)).$$

Но по теореме Пифагора получаем, что тогда

$$A \subset x_0 + \frac{t}{2}(a_0 - x_0) + \sqrt{f^2(x_0) - \frac{t^2\|a_0 - x_0\|^2}{4}}\, B_1(0),$$

что противоречит минимальности радиуса $f(x_0)$.

б) Докажем, что если множество A удовлетворяет нашему свойству, то и его замыкание $B = \overline{A}$ также ему удовлетворяет. Заметим, что $\max\limits_{b \in B} \|x - b\| = \max\limits_{a \in A} \|x - a\|$ для любого x (максимумы по условию существуют!).

Предположим противное. Тогда для некоторой точки x существуют две точки $b_1, b_2 \in B$ такие, что $\|x - b_i\| = \max\limits_{b \in B} \|x - b\| =: s$. Тогда одна из них — скажем, b_1 — лежит в $B \setminus A$. Рассмотрим точку $x_1 = x + (x - b_1)$. Тогда $\|x_1 - b_1\| = \|2(x - b_1)\| = 2s$, а для любой другой точки $b \in B$ имеем $\|x_1 - b\| \leq \|x_1 - x\| + \|x - b\| = 2s$. При этом равенство может достигаться тогда и только тогда, когда x_1, b и x лежат на одной прямой (x между b и x_1), и $\|x - b\| = s$; это выполняется только при $b = b_1$. Таким образом, $\|x_1 - b_1\| > \|x_1 - b\|$ для любой точки $b \in B \setminus \{b_1\} \supset A$; в частности, $\|x_1 - b_1\| > \max\limits_{x \in A} \|x_1 - a\|$. Это невозможно, так как $\max\limits_{b \in B} \|x_1 - b\| = \max\limits_{a \in A} \|x_1 - a\|$.

Итак, множество B удовлетворяет нашему свойству и по пункту а) одноточечно. Значит, и A одноточечно.