1

Введение

С 1974 года в Московском физико-техническом институте регулярно проводилась олимпиада студентов по математике. Цель олимпиады очевидна — максимально способствовать развитию у студентов интереса к изучению математики, выявлять наиболее одаренных студентов, стимулировать их творческую активность.

Правила проведения олимпиад за эти 34 года фактически не изменились. Олимпиада проводится раздельно для 1-го и для 2 — 6 курсов. Проходит она в конце февраля — начале марта. На решение 6-ти задач отводится 4 астрономических часа.

Для проведения олимпиады на кафедре высшей математики ежегодно создается оргкомитет и жюри, которое по традиции возглавляет заведующий кафедрой. Оргкомитет, помимо подготовки задач, проводит всю необходимую организационную работу, включающую, в частности, ознакомление студентов с задачами, предлагавшимися на прошлых олимпиадах.

Количество участников олимпиады колеблется в пределах от 80 до 150 человек. Для проверки работ выделяется 10 преподвателей. Лучшие работы независимо перепроверяются и сравниваются членами жюри. Окончательно жюри отбирает 7—10 победителей на 1-м и 2—6 курсах.

С 1974 года по 1990 год включительно олимпиада МФТИ проводилась в рамках Всесоюзной математической олимпиады студентов, в качестве ее первого тура. По результатам первого тура формировалась команда МФТИ для участия в Московском городском туре олимпиады. Наши студенты во II-м туре неизменно добивались высоких результатов, как в командном первенстве, где обычно выступало 35—45 команд вузов Москвы, так и в личном соревновании. Команда МФТИ, как правило, занимала почетное II место, пропуская вперед только сильную команду механико-математического факультета МГУ. В личном первенстве члены команды МФТИ регулярно занимали призовые места. Это давало им право выступать в третьем заключительном туре олимпиады в составе команд Москвы и России. Уже в первой Всесоюзной олимпиаде студентов, проходящей на механико-математическом факультете МГУ в октябре 1974 года, жюри заключительного тура, возглавляемое академиком П.С. Александровым, присудило 3-е призовое место студенту 2-го курса МФТИ В.В. Сологубову. Еще большего успеха добились наши студенты в ноябре 1985 года в Омском политехническом институте. Тогда команда Москвы, укомплектованная в основном студентами МФТИ, заняла I место. Первые два места в индивидуальном первенстве также достались нашим студентам.

К сожалению, начиная с 1991 года II и III туры олимпиады по математике не проводятся. Составить впечатление об этих олимпиадах читатель может по книгам [1], [2].

В отличие от развала студенческого олимпиадного движения в России в начале 90-х годов, за рубежом в это же время интерес к математическим олимпиадам студентов возрос. С 1994 года возникла олимпиада IMC [3] (International Mathematical Competition for university students), организатором которой стал английский математик John Jayne. Студенты МФТИ эпизодически (когда было финансирование) участвовали в соревнованиях IMC и всегда добивались хороших результатов, входя обычно в командном первенстве в первую пятерку из более чем 40 университетов участников. Особенно удачным оказался 1995 год, когда команда МФТИ заняла первое место, а — тогда студент 1-го курса — Р.Н. Карасев установил абсолютный рекорд: набрал 199 баллов из 200 возможных и получил гран-при.

Весьма интересно, что организаторы IMC иногда брали задачи олимпиад МФТИ, например задача 5 (a) второго дня IMC-2 — это задача 1993.4.2. В свою очередь организаторы олимпиад МФТИ для лучшей подготовки команды использовали некоторые задачи из арсенала IMC. При этом некоторые задачи посылались нами специально для IMC, например задача 3 2-го дня IMC-10. Таким образом, взаимодействие с IMC имеет давнюю историю. К сожалению, постоянные финансовые трудности не позволяют талантливым студентам МФТИ регулярно участвовать в мероприятиях IMC и достойно представлять там Россию.

Отметим, что помимо спортивного интереса, многие задачи олимпиад МФТИ являются простыми частными случаями глубоких математических фактов и теорий. Решение таких задач может служить первыми ступеньками на пути к серьезным математическим результатам. В решениях мы постарались указать на такие задачи и дать ссылки на литературу, в которой можно найти развитие изложенных в задаче идей.

В заключение мы вспомним авторов задач разных лет: А.А. Болибрух, Б.В. Федосов, Б.И. Голубов, С.П. Коновалов, Е.С. Половинкин, Г.Н. Яковлев, В.М. Уроев, М.В. Балашов, Р.Н. Карасев, И.И. Богданов, П.А. Кожевников и многие другие.

Апрель, 2007 Москва — Долгопрудный

С.П. Коновалов, М.В. Балашов

Условия задач

Номер задачи **1993.1.1** означает, что она дана в 1993 году, имеет номер 1 и предложена первокурсникам. Номер задачи **1993.1.2** означает, что она дана в 1993 году, имеет номер 1 и предложена студентам 2—6 курсов. Номер задачи **1993.2** означает, что она дана в 1993 году, имеет номер 2 и предложена студентам всех курсов.

ОЛИМПИАДА — 1993

1993.1.1. Найти наибольшее значение функции

$$f = |x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 - x_2x_4|$$

на единичном кубе $\{x \in \mathbb{R}^4 \mid |x_k| \le 1,\ 1 \le k \le 4\}$.

1993.1.2. Найти решение матричного дифференциального уравнения $\frac{dX}{dt} = AX + XB$, где A, B — постоянные матрицы порядка n, удовлетворяющее условию $X(0) = E$.

1993.2. В квадратной матрице A порядка $2n$ на главной диагонали стоят нули, а остальные элементы равны ± 1. Доказать, что $\det A \neq 0$.

1993.3. Частица движется из точки A в точку B по прямой, не меняя направления движения. Расстояние $AB = 1$, время движения равно 1, в начальный и конечный моменты времени движения скорость равна нулю. Доказать, что в некоторый момент времени абсолютная величина ускорения частицы равна 4.

1993.4.1. Существует ли непрерывная функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, принимающая рациональные значения в иррациональных точках и иррациональные значения в рациональных точках?

1993.4.2. Доказать, что функция

$$T(x) = \frac{a_0}{2} + \cos x + \sum_{k=2}^{\infty} a_k \cos kx,$$

где $|a_0| < 1$, принимает как положительные, так и отрицательные значения.

1993.5.1. Пусть A и B — замкнутые выпуклые множества на плоскости. Следует ли отсюда, что их сумма

$$A + B = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x = a + b,\ a \in A,\ b \in B\}$$

тоже замкнутое множество?

1993.5.2. Известно, что все корни полинома

$$P(z) = z^n + c_1 z^{n-1} + \cdots + c_n$$

с комплексными коэффициентами — чисто мнимые. Доказать, что при любом вещественном x выполнено неравенство

$$\left| \frac{2xP'(x)}{P(x)} - n \right| \le n.$$

1993.6.1. Можно ли число π представить как

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{k_n} - \sqrt{m_n} \right),$$

где $\{k_n\}$ и $\{m_n\}$ — последовательности натуральных чисел?

1993.6.2. Доказать, что при $a > 1$ справедливо равенство

$$\int\limits_0^{\pi/2} \cos ax\,(\cos x)^{a-2}\ dx = 0.$$

ОЛИМПИАДА — 1994

1994.1. 1994 окружности разбивают плоскость на области, границами которых являются дуги окружностей. Сколько цветов необходимо, чтобы раскрасить такую географическую карту?

1994.2. Всегда ли будет связным множество, полученное из открытого единичного квадрата удалением счетного множество точек?

1994.3. Найти все непрерывные функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, удовлетворяющие уравнению

$$3f(2x+1) = f(x) + 5x.$$

1994.4. На плоскости даны точки A_1, A_2, A_3, A_4, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Проведем две концентрические окружности: одну через точки A_1, A_2, A_3, а другую через точку A_4. Обозначим через $k(A_1, A_2, A_3, A_4)$ произведение площадей треугольника $A_1A_2A_3$ и получившегося кругового кольца. Доказать, что величина k не зависит от нумерации точек: $k(A_1, A_2, A_3, A_4) =$

$$= k(A_2, A_3, A_4, A_1) = k(A_3, A_4, A_1, A_2) = k(A_4, A_1, A_2, A_3).$$

1994.5.1. Пусть $C(\alpha)$ — коэффициент при x^{1994} в разложении по формуле Маклорена функции $(1+x)^{\alpha}$. Вычислить

$$\int\limits_0^1 C(-y-1)\left(\frac{1}{y+1}+\dots+\frac{1}{y+1994}\right)dy.$$

1994.5.2. Пусть $\varphi_1(x)$, $\dots$, $\varphi_n(x)$ — ортонормированная на отрезке $[0,1]$ система непрерывных функций. Доказать, что хотя бы для одной функции φ_i $(i=1,\dots,n)$ справедливо неравенство

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\int\limits_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\varphi_i(x)\,dx\right)^2\le\frac{1}{n}.$$

1994.6.1. На плоскости дана парабола. Как с помощью циркуля и линейки построить ее ось?

1994.6.2. Доказать, что дифференциальное уравнение

$$\sum_{k=0}^{n}c_k x^{k+1}\left(x^{k-1}y\right)^{(k)}=0$$

сводится к линейному дифференциальному уравнению с помощью замены $t=x^{-1}$ и выписать это уравнение.

ОЛИМПИАДА — 1995

1995.1.1. Может ли график непрерывной функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ пересекать каждую невертикальную прямую бесконечное число раз?

1995.1.2. Сущестует ли непрерывная при $x > 1$ функция f, удовлетворяющая уравнению

$$(x^2 - x)(f(x^2) + f(x)) = 1?$$

1995.2. Существует ли непрерывно дифференцируемая функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, удовлетворяющая условию

$$|f(x)| < 2, \qquad f(x)f'(x) \geq \sin x, \quad \forall x \in \mathbb{R}?$$

1995.3. Пусть $f_1, \ldots, f_n$ — линейно независимая система непрерывно дифференцируемых на отрезке $[0, 1]$ функций. Доказать, что среди производных $f_1', \ldots, f_n'$ найдутся $n - 1$ линейно независимых функций.

1995.4. Найти предел

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{C_n^k} \right)^n.$$

1995.5. Доказать, что при $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ справедливо неравенство

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} < 1.$$

1995.6.1. Определим сумму двух множеств на евклидовой плоскости:

$$A + B = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x = a + b,\ a \in A,\ b \in B\}.$$

Пусть $A = B_r(a) \cap B_r(-a)$, где $B_r(a) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x - a\| \le r\}$ — круг радиуса $r > 0$ с центром в точке a, $\|a\| < r$. Доказать, что найдутся такие точки b_1 и b_2, что

$$A + (B_r(b_1) \cap B_r(b_2)) = B_r(0). \qquad (*)$$

1995.6.2. Для множеств на комплексной плоскости определим операции сложения и умножения

$$A + B = \{z \in \mathbb{C} \mid z = a + b,\ a \in A,\ b \in B\},$$

$$A \cdot B = \{z \in \mathbb{C} \mid z = ab,\ a \in A, b \in B\}.$$

Пусть $A = \{z \mid |z| = \frac{1}{1995}\}$. Найти хотя бы одно решение уравнения $A + X = A \cdot X$, удовлетворяющее условию $0 \notin X$.

ОЛИМПИАДА — 1996

1996.1. Пусть a, b, c — расстояния между тремя точками целочисленной решетки, лежащими на окружности радиуса R. Доказать, что $abc \ge 2R$.

1996.2. Доказать, что для любого натурального числа n справедливо неравенство

$$\left\{n\sqrt{2}\right\} > \frac{1}{2n\sqrt{2}},$$

где $\{x\}$ — дробная часть числа x.

1996.3.1. Пусть $f \in C^{n+1}(\mathbb{R})$ и

$$\ln\left(\frac{f(b)+f'(b)+\cdots+f^{(n)}(b)}{f(a)+f'(a)+\cdots+f^{(n)}(a)}\right) = b-a,$$

где $a<b$. Доказать, что найдется $c \in (a,b)$ такое, что

$$f^{(n+1)}(c) = f(c).$$

1996.3.2. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$, если $a_1 = a > 0$, $a_2 = a^2$, $a_n = \sum\limits_{i=1}^{n-1} a_i a_{n-i}$ при $n \geq 3$.

1996.4.1. Доказать, что при $n \geq 2$ все положительные корни многочлена

$$P(x) = x^n - \sum_{k=0}^{n-1} x^k$$

лежат на интервале $\left(2-\frac{1}{2^{n-1}}, 2-\frac{1}{2^n}\right)$.

1996.4.2. Пусть x, $\varphi_1,\ldots,\varphi_n$ — элементы евклидова пространства, c_1, ..., c_n — произвольные вещественные числа. Доказать неравенство

$$\left(\sum_{i=1}^n c_i(x,\varphi_i)\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n c_i^2\right)^2 (x,x)\left(\max_{1\leq i\leq n}\sum_{j=1}^n |(\varphi_i,\varphi_j)|\right).$$

1996.5.1. Пусть $A = (a_{ij})$ — невырожденная матрица порядка n, $a_{ij} > 0\ \forall i, j$. Доказать, что $z_n \leq n^2 - 2n$, где z_n — число нулевых элементов в матрице A^{-1}.

1996.5.2. Пусть спектр матрицы порядка n

$$A(x) = B(x) + \frac{C}{x}$$

ограничен на интервале $x \in (0, 1)$, матрица C — постоянная, а элементы матрицы $B(x)$ ограничены на отрезке $[0, 1]$. Доказать, что матрица C — нильпотентная (т.е. $\exists k \in \mathbb{N}$: $C^k = 0$).

1996.6. Пусть a, b, c — неотрицательные целые числа, причем $ab \geq c^2$. Доказать, что существует натуральное число n и целые числа $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ такие, что

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = a, \quad \sum_{i=1}^{n} y_i^2 = b, \quad \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = c.$$

ОЛИМПИАДА — 1997

1997.1.1. Пусть $a_1, \ldots, a_n$ — положительные числа. Доказать, что многочлен

$$x^n - a_1 x^{n-1} - \cdots - a_n$$

имеет ровно один положительный корень.

1997.1.2. Доказать, что

$$\lim_{x \to +\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{(n^2 + x)^2} = \frac{1}{2}.$$

1997.2. Найти объем сечения четырехмерного куба

$$\left\{x \in \mathbb{R}^4 \mid 0 \le x_k \le 1,\ k \in \overline{1,4}\right\}$$

гиперплоскостью $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2$.

1997.3.1. Доказать, что $\forall \varepsilon > 0$ найдутся натуральное число n и числа $a_1, \ldots, a_n$ такие, что

$$\max_{x \in [0,1]} \left| x - \sum_{k=1}^{n} a_k x^{2k+1} \right| < \varepsilon.$$

1997.3.2. Всегда ли будет измеримым по Жордану ограниченное открытое связное множество на плоскости?

1997.4. Касательные к параболе $y^2 = 2px$ в точках A, B и C образуют треугольник KLM. Доказать, что $S_{KLM} = \frac{1}{2} S_{ABC}$.

1997.5. Пусть $f \in C^1([0,1])$. Доказать неравенство

$$\left| f\left(\frac{1}{2}\right) \right| \le \int\limits_0^1 |f(x)|\, dx + \frac{1}{2} \int\limits_0^1 |f'(x)|\, dx.$$

1997.6. Пусть $A(x)$ — квадратная матрица порядка $2n+1$, определенная на интервале $(0,1)$. Известно, что $\det A(x) = 1$

для всех x и для любой постоянной матрицы B существует предел $\lim\limits_{x\to+0} A(x)BA^{-1}(x)$. Доказать, что существуют пределы

$$\lim_{x\to+0} A(x) \qquad \text{и} \qquad \lim_{x\to+0} A^{-1}(x).$$

ОЛИМПИАДА — 1998

1998.1. Дано взаимно однозначное отображение $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Доказать, что найдутся натуральные числа a, b и c такие, что $a < b < c$ и $f(a) + f(c) = 2f(b)$.

1998.2. Пусть комплексные числа a, b и c такие, что все корни уравнения $z^3 + az^2 + bz + c = 0$ лежат на окружности $|z| = 1$. Доказать, что все корни уравнения $z^3 + |a|z^2 + |b|z + |c| = 0$ также лежат на окружности $|z| = 1$.

1998.3.1. Существует ли ортогональное преобразование плоскости $\mathbb{R}^2$ и ограниченное множество $S \subset \mathbb{R}^2$ такие, что $f(S) \subset S$, но $f(S) \neq S$?

1998.3.2. Пусть A — невырожденная вещественная 2×2 матрица, у которой собственные значения $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$. Доказать, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется 2×2 матрица S и число $\delta \in [0, \varepsilon]$ такие, что

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} \lambda & \delta \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

1998.4. (i) Доказать, что существует многочлен $P(x)$ такой, что для любого натурального числа n

$$\int\limits_{n-1}^{n} P(x)\,dx = n^4.$$

(ii) Найти сумму $\sum\limits_{k=1}^{n} k^4$.

1998.5. Последовательность $\{x_n\}$ задана рекуррентно: x_1 — некоторое число из интервала $(0,1)$, а $x_{n+1} = \ln(1+x_n)$. Найти предел $\lim\limits_{n\to\infty} nx_n$.

1998.6. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — ортонормированный базис в $\mathbb{R}^n$, а $a_1, \ldots, a_n$ — векторы единичной длины. Доказать, что если

$$(a_1, e_1) + \cdots + (a_n, e_n) > \sqrt{n(n-1)},$$

то векторы $a_1, \ldots, a_n$ линейно независимы.

ОЛИМПИАДА — 1999

1999.1. Доказать, что всякое непрерывное отображение окружности в прямую переводит некоторую пару диаметрально противоположных точек в одну точку.

1999.2.1. Пусть

$$M = \left\{ f \in C([0,\pi]) \;\middle|\; \int\limits_0^{\pi} f(x)\sin x\,dx = \int\limits_0^{\pi} f(x)\cos x\,dx = 1 \right\}.$$

Найти $\min\limits_{f\in M} \int_0^{\pi} f^2(x)\,dx$.

1999.2.2. Пусть дано уравнение $y' = xy + f(x)$, где $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — непрерывная ограниченная функция. Найти необходимое и достаточное условие, которому должна удовлетворять функция $f(x)$ для того, чтобы уравнение имело решение $y(x) \to 0$ при $x \to \infty$.

1999.3. Пусть $a_1, \ldots, a_n$ — положительные числа и выполнено неравенство $a_1 + \cdots + a_n < 1$. Доказать, что

$$\frac{(a_1 + \cdots + a_n)(1 - a_1)(1 - a_2) \ldots (1 - a_n)}{a_1 a_2 \ldots a_n (1 - a_1 - \cdots - a_n)} \geq n^{n+1}.$$

1999.4. Доказать, что при любом натуральном n существует сечение n-мерного куба $\{x \in \mathbb{R}^n \mid |x_k| \leq 1,\ k = 1, \ldots, n\}$ двумерной плоскостью, являющееся правильным $2n$-угольником.

1999.5. Существует ли функция $f(x)$, непрерывная на полуоси $(1, +\infty)$ и такая, что

$$\int\limits_x^{x^2} f(t)\,dt = 1, \qquad \forall x \in (1, +\infty)?$$

1999.6. Найти матрицу третьего порядка

$$T(x) = T_0 + \frac{1}{x} T_1 + \cdots + \frac{1}{x^n} T_n$$

(T_k — постоянные матрицы) такую, что при $x \neq 0$ выполнено равенство $\det T(x) = 1$, а матрицу

$$A(x) = T(x) \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sin x}{x} & e^{2x} & \frac{\sin x}{x^2} \\ x^3 & \frac{\ln(1+x)}{x} & \frac{\cos x}{x^2} \\ 0 & 0 & e^x \end{pmatrix}$$

можно доопределить в нуле так, что после этого она станет невырожденной и непрерывной в некоторой окрестности нуля.

ОЛИМПИАДА — 2000

2000.1. Дано семейство $F = \{A \subset \mathbb{N} \mid |A| < \infty\}$ такое, что $A \cap B \neq \emptyset$ для любых $A, B \in F$. Верно ли, что всегда найдется такое конечное множество $X \subset \mathbb{N}$, что $A \cap B \cap X \neq \emptyset$ для любых $A, B \in F$?

2000.2. Пусть $f \in C([0,1])$ и для любых $x, y \in [0,1]$ выполняется неравенство $xf(y) + yf(x) \leq 1$. Доказать, что

$$\int\limits_0^1 f(x)\,dx \leq \frac{\pi}{4}.$$

2000.3. Существует ли такая биекция $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi(n)}{n^2} < +\infty?$$

2000.4. Пусть невырожденная матрица M порядка $2n$ и обратная матрица M^{-1} разбиты на квадратные блоки

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \qquad M^{-1} = \begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix}.$$

Доказать, что $\det M \cdot \det H = \det A$.

2000.5. Пусть L — вещественное линейное пространство, $\dim L = 10$, L_1 и L_2 — подпространства L, $L_1 \subset L_2$, $\dim L_1 = 3$, $\dim L_2 = 6$. Пусть $\mathbb{E}$ — пространство тех линейных преобразований L, для которых L_1 и L_2 являются инвариантными подпространствами. Найти размерность пространства $\mathbb{E}$.

2000.6. Пусть $P(x)$ — многочлен степени n с вещественными коэффициентами, имеющий только вещественные корни. Доказать, что

$$(n-1)\left(P'(x)\right)^2 \geq nP(x)P''(x)$$

для любого $x \in \mathbb{R}$.

ОЛИМПИАДА — 2001

2001.1. Дана возрастающая функция $f : [0,1] \to [0,1]$. Доказать, что найдется такая точка $x \in [0,1]$, что $f(x) = x$.

2001.2. Пусть $\{x_i\}_{i=1}^n$ — конечная убывающая последовательность положительных чисел. Доказать, что

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\sqrt{i}}.$$

2001.3. Пусть $f \in C(\mathbb{R})$ и ни на одном интервале функция f не является монотонной. Доказать, что на любом интервале имеются точки минимума функции f.

2001.4. Найти все функции $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ (здесь $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$), удовлетворяющие уравнению

$$f(x)f(yf(x)) = f(x+y), \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}_+.$$

2001.5. Пусть $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены степени n и $G(x,y) = \sum_{k=0}^{n} P^{(n-k)}(x)Q^{(k)}(y)$. Доказать, что $G(x,y) = G(y,x)$.

2001.6. Доказать, что единичный квадрат можно разрезать на N квадратов меньшего размера, если N достаточно велико.

ОЛИМПИАДА — 2002

2002.1. Вычислить определитель матрицы (a_{ij}) порядка n, где $a_{ij} = \delta_{ij} + x_i y_j$ (δ_{ij} — символ Кронекера).

2002.2. Зная, что $\int\limits_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\,dx = \frac{\pi^2}{12}$, вычислить $\int\limits_0^1 \frac{\ln(1-x^3)}{x}\,dx$.

2002.3. Последовательность $\{x_n\}$ задана рекуррентно: $x_0 = 1$, $x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2}{2002}$. Доказать, что $x_{2002} < \frac{1}{2}$.

2002.4. Пусть A и B — квадратные матрицы порядка n. Доказать, что равенство $P(A+B) = P(A) + P'(A)B$ выполняется для любого многочлена $P(x)$ тогда и только тогда, когда $AB - BA = B^2$.

2002.5. Пусть $\{\varepsilon_n\}$ — последовательность, состоящая из ± 1. Может ли число
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{n!}$$
быть рациональным?

2002.6. Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$ — компакт и
$$B = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \forall x \in B \; \exists!\, a \in A : \; \|x - a\| = \sup_{y \in A} \|x - y\| \right\}.$$
Доказать, что замыкание множества B совпадает с $\mathbb{R}^n$.

ОЛИМПИАДА — 2003

2003.1. Пусть a, b, c, d — комплексные числа, $|a| \leq 1$, $|b| \leq 1$, $|c| \leq 1$, $|d| \leq 1$. Найти наибольшее значение выражения $|ac + ad + bc - bd|$.

2003.2. Доказать, что для любых векторов $a_1, \ldots, a_n$ из $\mathbb{R}^3$ выполнено неравенство $\sum\limits_{i,j=1}^{n} e^{(a_i, a_j)} \geq n^2$.

2003.3. Доказать, что многочлен вида $a_1 x^{k_1} + a_2 x^{k_2} + \cdots + a_{2003} x^{k_{2003}}$ имеет не более 2002 положительных корней (с учетом кратности).

2003.4. Пусть $f(x)$ — непрерывная периодическая функция. Доказать, что для любого $a \in \mathbb{R}$ уравнение $f(x + a) = f(x)$ имеет по крайней мере два корня на каждом отрезке, длина которого равна периоду.

2003.5. Три прямые $r = r_i + a_i t$ $(i = 1, 2, 3)$ попарно не пересекаются и не параллельны одной плоскости. Выразить объем параллелепипеда, три ребра которого лежат на данных прямых, через векторы r_i и a_i.

2003.6. Доказать неравенство

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ . & . & \dots & . \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} \le \left[\frac{2}{n-1} \left(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \right) \right]^{\frac{n(n-1)}{4}}$$

ОЛИМПИАДА — 2004

2004.1. Элементы матрицы порядка 10 — целые числа, причем по крайней мере 92 из них — нечетные. Доказать, что определитель этой матрицы — четное число.

2004.2. Пусть $f(x)$ — непрерывная периодическая функция с периодом T, $\int_0^T f(x)\,dx = 0$. Доказать, что найдется такое число a, что при любом b выполняется неравенство

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \ge 0.$$

2004.3. Пусть P — периметр треугольника с целочисленными координатами вершин на плоскости Oxy, R — радиус описанной около треугольника окружности. Доказать неравенство $P^3 \ge 54R$.

2004.4. Найти многочлен $P(x)$ наименьшей степени, который имеет нуль десятого порядка при $x = 0$ и такой, что $P(x) - 1$ имеет нуль пятого порядка при $x = 1$.

2004.5. На плоскости даны три попарно пересекающиеся окружности. Через точки пересечения каждых двух окружностей проведена прямая. Доказать, что эти три прямые пересекаются в одной точке или параллельны.

2004.6.1. Поверхность $z = f(x, y)$, где $f(x, y)$ — многочлен степени не ниже второй, обладает свойством: *через любую ее точку можно провести две прямые, целиком лежащие на поверхности.* Доказать, что поверхность — гиперболический параболоид.

2004.6.2. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} B & C \\ C^T & D \end{pmatrix},$$

где B, C, D — действительные матрицы одного порядка, B — невырожденная, B и D — симметрические. Обозначим через n_1, n_2, n_3 число положительных собственных значений матриц A, B, $D - C^T B^{-1} C$ соответственно. Доказать, что $n_1 = n_2 + n_3$.

ОЛИМПИАДА — 2005

2005.1. Пусть положительные числа x_1, x_2, y_1, y_2 удовлетворяют соотношениям $x_1 + x_2 = y_1 + y_2 = 1$, $x_1^2 + x_2^2 <$ $< y_1^2 + y_2^2$. Доказать, что

$$x_1 \ln x_1 + x_2 \ln x_2 < y_1 \ln y_1 + y_2 \ln y_2.$$

2005.2. Пусть d_n — количество перестановок $\sigma : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ таких, что выполнено неравенство $(\sigma(i) - \sigma(i-1))(\sigma(i) - \sigma(i+1)) > 0$ при любом $i = 2, 3, \ldots, n-1$. Доказать, что $2d_{2004} < d_{2005}$.

2005.3. а) Дана дифференцируемая функция $f : [0,1] \to \mathbb{R}$. Известно, что $x \sin f(x) + x^2 = f(x) \sin x + 2f(x)^2$ при любом $x \in [0,1]$. Найдите $|f'_+(0)|$ (здесь $f'_+(0)$ — производная справа в точке 0).

б) Дана непрерывная функция $f : [0,1] \to \mathbb{R}$. Известно, что $x \sin f(x) + x^2 = f(x) \sin x + 2f(x)^2$ при любом $x \in [0,1]$. Докажите, что существует $f'_+(0)$.

2005.4. На плоскости задана замкнутая кусочно-гладкая кривая Γ, ограничивающая выпуклую центрально-симметричную область. Доказать, что в кривую Γ можно вписать аффинно правильный шестиугольник (т.е. образ правильного шестиугольника при некотором аффинном преобразовании).

2005.5. Даны целочисленные матрицы A и B порядка 10. Известно, что матрицы A, $A+B$, $A+2B$, $\ldots$, $A+25B$ имеют целочисленные обратные. Доказать, что матрица $A+2005B$ также имеет целочисленную обратную.

2005.6. Пусть функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывна в точке $x = x_0$, т.е.

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in U_\delta(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon. \qquad (*)$$

Доказать, что в условии $(*)$ для каждого $\varepsilon > 0$ можно так подобрать $\delta = \delta(\varepsilon)$, что функция $\delta(\varepsilon)$ будет непрерывной при $\varepsilon > 0$.

ОЛИМПИАДА — 2006

2006.1. Пусть $f \in C^2([0,1])$. Доказать, что функцию f можно представить в виде разности двух выпуклых вниз функций.

2006.2.1. Пусть $x_n = \underbrace{\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+\dots+\sqrt[3]{6}}}}_{n \text{ раз}}$. Найти предел $\lim\limits_{n\to\infty} 6^n(2-x_n)$.

2006.2.2. Пусть $\alpha \in (0,1)$, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{k^\alpha}$ сходится и $x_k \geq x_{k+1} \geq 0$ для всех k. Доказать, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k^{\frac{1}{1-\alpha}}$ также сходится.

2006.3.1. Дан многочлен $P(x)$ нечетной степени n такой, что $\lim\limits_{x\to+\infty} P(x) = +\infty$. Известно, что многочлены $P(x)$ и $P(P(x))$ имеют ровно по n вещественных корней. Доказать, что многочлен $P(P(P(x)))$ также имеет ровно n вещественных корней.

2006.3.2. Доказать, что для любого решения $y(x)$ уравнения $y'' + \sin y = 0$ существует $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{y(x)}{x}$.

2006.4. Четыре квадратичных уравнения $f_1(x,y) = 0$, $f_2(x,y) = 0$, $f_3(x,y) = 0$, $f_4(x,y) = 0$ задают четыре окружности на плоскости, при этом ни у каких трех окружностей центры не лежат на одной прямой, окружности не пересекаются и не содержатся внутри друг друга. Докажите, что функции f_1, f_2, f_3, f_4 линейно зависимы тогда и только тогда, когда существует окружность, пересекающая

4 исходных окружности под прямыми углами.

2006.5.1. Пусть $A \subset \mathbb{R}^2$ — выпуклое компактное множество и A_ε — ε-окрестность этого множества, т.е. множество $\cup_{a\in A}\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x-a\| \le \varepsilon\}$. Доказать, что площадь $S(A_\varepsilon)$ множества A_ε есть $S(A_\varepsilon) = a + b\varepsilon + c\varepsilon^2$ и найти коэффициенты a, b, c. Считать, что граница A есть спрямляемая кривая.

2006.5.2. Выпуклый компакт A в евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$ имеет площадь π.

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2} \exp\left(-\varrho(x,A)\right)\, dx = 5\pi,$$

где функция $\varrho(x,A) = \min_{a\in A}\|x-a\|\ \forall x \in \mathbb{R}^2$. Найти длину границы ∂A компакта A.

2006.6. Пусть B, C — вещественные $n\times n$ матрицы, $A = B + i\,C$ — комплексная $n\times n$ матрица, $i = \sqrt{-1}$. Доказать, что

$$\det\begin{pmatrix} B & -C \\ C & B \end{pmatrix} = |\det A|^2.$$

ОЛИМПИАДА — 2007

2007.1. Пусть $C \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченное множество и функция $f : C \to \mathbb{R}$ удовлетворяет условию $|f(x_1) - f(x_2)| \le \|x_1 - x_2\|$ для всех точек $x_1, x_2 \in C$. Доказать, что функция $g(x) = \inf\limits_{y\in C}(\|x-y\| + f(y))$ удовлетворяет условию $|g(x_1) - g(x_2)| \le \|x_1 - x_2\|$ для всех $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ и $g(x) = f(x)$ для всех $x \in C$.

2007.2.1. Пусть $x_0 = a$, $x_1 = b$, а $x_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right) x_{n-1} + \frac{1}{n} x_{n-2}$, $n = 2, 3, \ldots$. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

2007.2.2. Пусть последовательность $\{a_n\}$ такова, что последовательность $\left\{\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} a_k\right\}$ сходится. Доказать, что для любого $\varepsilon > 0$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{1+\varepsilon}}$ сходится.

2007.3.1. Пусть B — центрально симметричное выпуклое компактное тело в $\mathbb{R}^2$. Доказать, что найдется такой параллелограмм, содержащий B, что середины сторон параллелограмма являются точками множества B.

2007.3.2. Доказать, что задача Коши $\dot{x}(t) = x(t/2) + e^t$, $x(0) = 1$, имеет единственное решение на оси. (Решение есть непрерывно дифференцируемая функция $x(\cdot)$, удовлетворяющая задаче Коши).

2007.4. Пусть $f(x)$ — многочлен с действительными коэффициентами степени n, имеющий n различных действительных корней $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Доказать, что для любого натурального $k \le n-2$ выполнено $\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^k}{f'(x_i)} = 0$.

2007.5. Пусть заданы $T \in \mathbb{R}^{m\times n}$ — матрица ранга m, $b \in \mathbb{R}^m$ и множество $A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Tx = b;\ x_k \ge 0,\ 1 \le k \le n\}$. Доказать, что если точка $x \in A$ является вершиной множества A, то существует такая нумерация $\{i_k\}_{k=1}^{n}$ компонент точки x, что $x_{i_k} = 0$ для всех $k \in \overline{m+1, n}$, а столбцы $\{T_{i_k}\}_{k=1}^{m}$ линейно независимы.

2007.6. Пусть A и B — выпуклые компакты из $\mathbb{R}^2$ с непустой внутренностью, граница которых не содержит отрезков. Пусть $C = A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$. Доказать, что существуют непрерывные функции $a : [0,1] \to A$ и $b : [0,1] \to B$ такие, что

$$\{a(t) + b(t) \mid t \in [0,1]\} = C.$$

Решения задач

ОЛИМПИАДА — 1993

1993.1.1.

$f = |x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 - x_2x_4| \le |x_1| \cdot |x_3 + x_4| + |x_2| \cdot |x_3 - x_4| \le$

$\le |x_3 + x_4| + |x_3 - x_4|$. Без ограничения общности можно считать, что $x_3 \ge x_4 \ge 0$, поэтому $f \le 2x_3 = 2$. Это значение достигается, например, в точке $x_k = 1$, $1 \le k \le 4$.

Замечание. Заметим, что относительно каждой координаты x_k (при фиксированных остальных) функция имеет вид $|ax_k + b|$, поэтому наибольшее значение функция принимает при $x_k = -1$ или $x_k = 1$. Следовательно, максимальное значение достигается в каких-то вершинах куба, которых 16. Ситуация здесь аналогична тому факту, что выпуклая непрерывная функция достигает максимума на компакте в некоторой крайней точке этого компакта.

1993.1.2. Сделаем в уравнении замену $X = e^{At}Y(t)$:

$$\dot{X} = Ae^{At}Y + e^{At}\dot{Y} = Ae^{At}Y + e^{At}YB,$$

откуда $\dot{Y} = YB$, $Y = Ce^{Bt}$, где C — постоянная матрица. Общее решение $X = e^{At}Ce^{Bt}$, решение задачи Коши $X = e^{At}e^{Bt}$.

1993.2. Рассмотрим матрицу $B = A^2$. В ней b_{ii} — нечетные числа (сумма нуля и нечетного числа ±1), а b_{ij}, $i \ne j$ — четные числа (сумма двух нулей и четного числа ±1). Следовательно, $\det A^2 = (\det A)^2$ — нечетное число.

1993.3. Пусть $v(t)$ — скорость частицы в момент времени t, $t \in [0, 1]$. Тогда $v(0) = v(1) = 0$, $\int_0^1 v(t)\,dt = 1$. В координатах (t, v) рассмотрим треугольник OMN, где $O(0,0)$, $M\left(\frac{1}{2}, 2\right)$, $N(1,0)$. График функции $v(t)$ пересекается по крайней мере с одной из боковых сторон треугольника OMN, т.к. $S_{OMN}=1$. Следовательно, на графике функции $v=v(t)$ найдется точка $(t_0, v(t_0))$, в которой касательная параллельна боковой стороне треугольника, т.е. $|v'(t_0)|=4$.

1993.4.1. Предположим, что такая функция существует. Тогда множество $f(\mathbb{Q})$ — образ счетного множества — не более чем счетно, как и $f(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})$, т.к. по условию $f(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})\subset\mathbb{Q}$. Следовательно, множество значений функции не более чем счетно и содержит по крайней мере две разные точки. Это противоречит теореме Больцано—Коши о промежуточных значениях непрерывной функции.

1993.4.2. Рассмотрим два интеграла:

$$I_{\pm}=\int\limits_0^{2\pi} T(x)(1\pm\cos x)\,dx=\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{a_0}{2}\pm\cos^2 x\right)\,dx=\pi(a_0\pm 1).$$

Так как $|a_0|<1$, то $I_+>0$, $I_-<0$. Но если предположить, что $T\geq 0$ (≤ 0), то оба интеграла будут ≥ 0 (≤ 0), т.к. $1\pm\cos x\geq 0$. Следовательно, функция $T(x)$ принимает значения разных знаков.

1993.5.1. Нет. Например, если $A=\{(x,y)\mid y=0\}$, а $B=\{(x,y)\mid x>0,\ y>0,\ xy>1\}$, то $A+B=\{(x,y)\mid y>0\}$.

1993.5.2. Пусть $P(x)=(x-a_1)^{k_1}\ldots(x-a_m)^{k_m}$, где $\operatorname{Re}a_s=0$ и $\sum\limits_{s=1}^{m}k_s=n$. Тогда

$$\left|\frac{2xP'(x)}{P(x)}-n\right|=\left|2x\sum_s\frac{k_s}{x-a_s}-\sum_s k_s\right|=\left|\sum_s k_s\frac{x+a_s}{x-a_s}\right|\leq$$
$$\leq\sum_s k_s\left|\frac{x+a_s}{x-a_s}\right|=\sum_s k_s=n.$$

1993.6.1. При каждом натуральном n числа

$$p(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\sqrt{p^2(n+1)}-\sqrt{p^2n},\qquad p=1,2,\ldots$$

образуют арифметическую прогрессию с разностью $d_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$. Следовательно, с точностью d_n ими можно приблизить любое число из $(0, +\infty)$. Так как $d_n \to 0$ при $n \to \infty$, то любое число — в том числе и π — можно представить в виде $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{k_n} - \sqrt{m_n}\right)$.

1993.6.2. Требуемый результат получается сразу, если исходный интеграл следующим образом разбить на два интеграла, а затем во втором проинтегрировать по частям:

$$\int\limits_0^{\pi/2} \cos ax\,(\cos x)^{a-2}\,dx =$$
$$= \int\limits_0^{\pi/2} (\cos(a-1)x\cos x - \sin(a-1)x\sin x)\,(\cos x)^{a-2}\,dx =$$
$$= \int\limits_0^{\pi/2} \cos(a-1)x\,(\cos x)^{a-1}\,dx + \int\limits_0^{\pi/2} \tfrac{\sin(a-1)x}{a-1}\,d\,(\cos x)^{a-1} =$$
$$= \tfrac{\sin(a-1)x}{a-1}\,(\cos x)^{a-1}\Big|_0^{\pi/2} = 0.$$

ОЛИМПИАДА — 1994

1994.1. Каждая точка лежит либо внутри четного числа окружностей, либо внутри нечетного. Поэтому достаточно двух цветов — черного и нечерного.

1994.2. Всегда. Пусть A и B — точки данного множества. Существует такое число R_0, что для любого $R > R_0$ малая дуга окружности радиуса R, проходящей через точки A и B, лежит в единичном квадрате. Множество таких дуг несчетно, поэтому хотя бы на одной из них нет точек удаленного множества.

1994.3. Методом неопределенных коэффициентов находим решение в классе линейных функций: $f_1(x) = x - \frac{3}{2}$. Покажем, что f_1 — единственное решение.

Пусть $g(x) = f(x) - f_1(x)$, тогда $g \in C(\mathbb{R})$ и удовлетворяет уравнению $3g(2x+1) = g(x)$. Заменим в этом уравнении x на $\frac{x-1}{2}$: $g(x) = \frac{1}{3} g\left(\frac{x-1}{2}\right)$. В полученном уравнении опять заменим x на $\frac{x-1}{2}$: $g\left(\frac{x-1}{2}\right) = \frac{1}{3} g\left(\frac{x-3}{4}\right)$ и т.д. Получим

$$g(x) = \frac{1}{3^n} g\left(\frac{x - 2^n + 1}{2^n}\right), \quad n = 1, 2, \ldots .$$

В силу непрерывности g для любого x

$$\lim_{n\to\infty} g\left(\frac{x - 2^n + 1}{2^n}\right) = g(-1),$$

поэтому $g(x) \equiv 0$.

1994.4. Пусть (x_i, y_i) — координаты точек A_i в некоторой прямоугольной системе координат Oxy. Рассмотрим определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1^2 + y_1^2 \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2^2 + y_2^2 \\ 1 & x_3 & y_3 & x_3^2 + y_3^2 \\ 1 & x_4 & y_4 & x_4^2 + y_4^2 \end{vmatrix}.$$

Заметив, что при переносе начала координат Δ не меняется, перенесем начало координат в точку, являющуюся центром концентрических окружностей для разбиения (A_1, A_2, A_3, A_4). Тогда в новой системе координат

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & r^2 \\ 1 & x_2 & y_2 & r^2 \\ 1 & x_3 & y_3 & r^2 \\ 1 & x_4 & y_4 & R^2 \end{vmatrix} = \left(R^2 - r^2\right) \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix},$$

откуда

$$|\Delta| = \left|R^2 - r^2\right| \cdot 2S_{A_1A_2A_3} = \frac{2}{\pi} k(A_1, A_2, A_3, A_4).$$

1994.5.1.

$$\frac{1}{1994!}\int\limits_0^1 \left(\prod_{k=1}^{1994}(y+k)\right)' dy = 1994.$$

1994.5.2. Применим неравенство Бесселя для характеристических функций $\varkappa_k(x)$ отрезков $\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$, где $\varkappa_k(x) = 1$ при $x \in \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$ и $\varkappa_k(x) = 0$ при $x \notin \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$:

$$\sum_{i=1}^{n}(\varkappa_k, \varphi_i)^2 \le (\varkappa_k, \varkappa_k) = \frac{1}{n}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Следовательно,

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}(\varkappa_k, \varphi_i)^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}(\varkappa_k, \varphi_i)^2\right) \le 1,$$

а потому найдется i: $\sum\limits_{k=1}^{n}(\varkappa_k, \varphi_i)^2 \le \frac{1}{n}$.

1994.6.1. Как известно, середины параллельных хорд параболы лежат на диаметре, поэтому возможен такой план построения:

1) проводим две параллельные хорды, тогда прямая, проходящая через их середины, — диаметр,

2) строим хорду, перпендикулярную этому диаметру, а затем через ее середину проводим прямую, параллельную диаметру.

1994.6.2. Пусть $D = \frac{d}{dx}$ — оператор дифференцирования. Справедливо тождество

$$x^{n+1}D^n x^{n-1} = \left(x^2 D\right)^n. \qquad (*)$$

Докажем $(*)$ по индукции. При $n = 1$ равенство справедливо. При переходе от n к $n+1$ имеем

$$\begin{aligned}
&x^{n+2}D^{n+1}x^n y = \\
&= x^{n+2}D^{n+1}(x \cdot x^{n-1}y) = x^{n+2}((n+1)D^n x^{n-1}y + xD^{n+1}x^{n-1}y),\\
&(x^2D)^{n+1}y = x^2D(x^2D)^n y = x^2D(x^{n+1}D^n x^{n-1}y) = \\
&\qquad = x^2\left((n+1)x^n D^n x^{n-1}y + x^{n+1}D^{n+1}x^{n-1}y\right),
\end{aligned}$$

откуда следует $(*)$.

Теперь можно преобразовать исходное уравнение:

$$\sum_{k=0}^{n} c_k x^{k+1} D^k x^{k-1} y \equiv \sum_{k=0}^{n} c_k (x^2 D)^k y = 0,$$

если $t = x^{-1}$, то $x^2 D = -D_t$ и уравнение примет вид

$$\sum_{k=0}^{n} c_k (-1)^k \frac{d^k y}{dy^k} = 0.$$

ОЛИМПИАДА — 1995

1995.1.1. Да. Например, $f(x) = x^2 \sin x$.

1995.1.2. Да. При $x > 1$ имеем

$$\frac{1}{x^2 - x} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{x^k},$$

ряд сходится абсолютно и равномерно на любом компакте из $\{x > 1\}$. Чтобы получить $f(x)$, достаточно построить разбиение

$$\{n \in \mathbb{N} \mid n \geq 2\} = \{n_k\}_{k=1}^{\infty} \bigcup \{2n_k\}_{k=1}^{\infty}.$$

Явная формула:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{-2^{2n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} x^{-2^{2n}(2k+1)}.$$

1995.2. Не существует. Имеем

$$f^2(x) - f^2(0) = \int\limits_0^x 2f(t)f'(t)\,dt \geq 2 \int\limits_0^x \sin t\,dt = 2(1 - \cos x),$$

следовательно, $f^2(\pi) \geq 4$.

1995.3. Пусть f_1', ..., f_n' линейно зависимы (в противном случае все ясно) и, например, $c_1 f_1' + \dots + c_{n-1} f_{n-1}' = f_n'$. Тогда $c_1 f_1 + \dots + c_{n-1} f_{n-1} + c = f_n$, где $c \neq 0$ в силу линейной независимости системы $\{f_k\}_{k=1}^n$. Покажем, что функции $\{f_k'\}_{k=1}^{n-1}$ линейно независимы. Если $a_1 f_1' + \dots + a_{n-1} f_{n-1}' = 0$, то $a_1 f_1 + \dots + a_{n-1} f_{n-1} + A = 0$, $A = \text{const}$. Отсюда $(Ac_1 - ca_1) f_1 + \dots + (Ac_{n-1} - ca_{n-1}) f_{n-1} = A f_n$. Следовательно, $A = 0$, а тогда и $a_k = 0$ при $1 \leq k \leq n-1$.

1995.4. Пусть $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{C_n^k}$. Тогда при достаточно больших значениях n

$$a_n > \frac{1}{C_n^1} + \frac{1}{C_n^{n-1}} + \frac{1}{C_n^n} = 1 + \frac{2}{n},$$

$$a_n < 1 + \frac{2}{C_n^1} + \frac{2}{C_n^2} + \frac{n-5}{C_n^3} < 1 + \frac{2}{n} + \frac{1995}{n^2}.$$

Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^n = e^2$.

1995.5. Обозначим определитель через W. Достаточно доказать, что $W^2 < 1$. Имеем

$$W^2 = (y-x)^2(z-x)^2(z-y)^2 \leq \left(\frac{(y-x)^2 + (z-x)^2 + (z-y)^2}{3}\right)^3 \leq$$

$\leq \left(\frac{3(x^2+y^2+z^2)}{3}\right)^3 = 1$, причем первое неравенсто превращается в равенство только при $x = y = z$, а тогда $W = 0$.

1995.6.1. Пусть b и $-b$ — точки пересечения окружностей $\|x \pm a\| = r$. Тогда равенство $(*)$ выполнено для $b_1 = b$, $b_2 = -b$. Легко видеть, что если $p \in \mathbb{R}^2$ — единичный вектор, то

$$\max\{(p,x) \mid x \in A\} + \max\{(p,x) \mid x \in B_r(b) \cap B_r(-b)\} = r. \quad (**)$$

Следовательно, $\max\{(p,x) \mid x \in C\} = \max\{(p,x) \mid x \in B_r(0)\}$, где $C = A + B_r(b) \cap B_r(-b)$. Поскольку C есть выпуклый компакт, то $C = B_r(0)$. Действительно, допустим, что существует точка $x_0 \in C \backslash B_r(0)$. Пусть b_0 — метрическая проекция x_0 на $B_r(0)$, $p_0 = \frac{x_0-b_0}{\|x_0-b_0\|}$. Если допустить, что для некоторой точки $b \in B_r(0)$ $(p_0, b-b_0) > 0$, то в силу выпуклости $B_r(0)$ для любого $\lambda \in (0,1)$ $\lambda b + (1-\lambda)b_0 \in B_r(0)$ и

$$\|x_0-(\lambda b+(1-\lambda)b_0)\|^2 = \|x_0-b_0\|^2-2\lambda(x_0-b_0, b-b_0)+\lambda^2\|b-b_0\|^2 <$$

$< \|x_0 - b_0\|^2$ при малых $\lambda > 0$. Таким образом, $(p_0, b - b_0) \leq 0$ $\forall b \in B_r(0)$, а $(p_0, x_0) > (p_0, b_0)$. Это противоречит формуле $(**)$.

Аналогично показывается, что равенство $B_r(0) \backslash C \neq \emptyset$ невозможно. Следовательно, $C = B_r(0)$.

Проверку формулы $(**)$ для всех p предоставляем читателю.

Замечание. Эта задача предложена Е. С. Половинкиным. Аналогичное свойство шара имеет место в гильбертовом и некоторых других пространствах. Исследование свойства $(*)$ повлекло создание теории сильно выпуклого анализа, частично изложенной в [14].

1995.6.2. Например, $X = \{z \mid |z| \geq \frac{1}{1994}\}$.

ОЛИМПИАДА — 1996

1996.1. Пусть S — площадь треугольника с вершинами в узлах решетки, тогда $S \geq \frac{1}{2}$ (т.к. $S = \frac{1}{2}|x_1y_2 - x_2y_1|$, где (x_i, y_i) — координаты двух вершин относительно третьей). В то же время $S = \frac{abc}{4R}$.

1996.2. Имеем $k = \left[n\sqrt{2}\right] < n\sqrt{2}$, следовательно

$$1 \leq 2n^2 - k^2 = \left(n\sqrt{2} - k\right)\left(n\sqrt{2} + k\right) < \left\{n\sqrt{2}\right\} \cdot 2n\sqrt{2}.$$

1996.3.1. Пусть $g(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} f^{(k)}(x)$, тогда $g(b) = g(a)e^{b-a}$. Применим к функции $h(x) = e^{-x}g(x)$ теорему Ролля на отрезке

$[a,b]$: $\exists c \in (a,b)$ такое, что $h'(c) = -e^{-c}g(c) + e^{-c}g'(c) = 0$. Следовательно, $g'(c) = g(c)$.

1996.3.2. Рассмотрим формальный степенной ряд $f(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n z^n$. Тогда

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{n-1} a_i a_{n-i} \right) z^n = a_1 z + f^2(z).$$

Отсюда с учетом условия $f(0) = 0$ находим $f(z) = \frac{1-\sqrt{1-4az}}{2}$. Радиус сходимости ряда Тейлора функции $f(z)$ в нуле равен $\frac{1}{4a}$, поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 4a$.

1996.4.1. При $x \neq 1$ $P(x) = \frac{x^{n+1}-2x^n+1}{x-1}$. Рассмотрим многочлен $Q(x) = x^{n+1} - 2x^n + 1$ при $x > 0$. Так как $Q(0) = Q(2) = 1$, $Q(1) = 0$ и $Q'(x) = x^{n-1}\left[(n+1)x - 2n\right]$, то второй положительный корень многочлена $Q(x)$ лежит на интервале $\left(\frac{2n}{n+2}, 2\right)$. Точнее, этот корень лежит на интервале $\left(2 - \frac{1}{2^{n-1}}, 2 - \frac{1}{2^n}\right)$, поскольку

$$Q\left(2 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) = -2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)^n + 1 < -2\left(1 - \frac{n}{2^n}\right) + 1 \leq -2\cdot\frac{1}{2} + 1 =$$

$= 0$, а $Q\left(2 - \frac{1}{2^n}\right) = -\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)^n + 1 > 0$.

1996.4.2. Имеем оценку

$$\left(\sum_{i=1}^{n} c_i (x, \varphi_i)\right)^2 = \left(x, \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i\right)^2 \leq (x,x) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i, \sum_{j=1}^{n} c_j \varphi_j\right) =$$
$$= (x,x) \sum_{i,j} c_i c_j (\varphi_i, \varphi_j) \leq \tfrac{1}{2}(x,x) \sum_{i,j} \left(c_i^2 + c_j^2\right) |(\varphi_i, \varphi_j)| \leq$$
$$\leq (x,x) \left(\sum_{i=1}^{n} c_i^2\right) \left(\max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |(\varphi_i, \varphi_j)|\right).$$

1996.5.1. Пусть $A^{-1} = (b_{ik})$. Тогда

$$\sum_{k=1}^{n} b_{ik} a_{kj} = 0 \quad \text{при} \quad i \neq j,$$

а так как $a_{kj} > 0$, то среди элементов i-й строки матрицы A^{-1} есть по крайней мере два ненулевых. Следовательно, всего ненулевых элементов не менее, чем $2n$ и отсюда $z_n \leq n^2 - 2n$.

1996.5.2. Из условия следует, что коэффициенты $q_i(x)$ характеристического многочлена

$$P(\lambda) = \det\,(\lambda E - A(x)) = \lambda^n + q_1(x)\lambda^{n-1} + \cdots + q_n(x)$$

ограничены на интервале $(0,1)$. Из теоремы Гамильтона—Кэли следует, что

$$P(A(x)) = \frac{C^n}{x^n} + \frac{D_1(x)}{x^{n-1}} + \cdots + D_n(x) = 0,$$

причем элементы всех матриц $D_i(x)$ ограничены на интервале $(0,1)$. Поэтому

$$C^n = \lim_{x \to +0} (-xD_1(x) - \cdots - x^n D_n(x)) = 0.$$

1996.6. Докажем утверждение индукцией по $a + b$. Основание при $a + b = 0$ очевидно.

Предположим, что при $a+b \leq N$ утверждение справедливо. Пусть $a + b = N + 1$ и для определенности $a \geq b$. Если $c \leq b$, то векторы $x = (\underbrace{1,\ldots,1}_{c}, \underbrace{1,\ldots,1}_{a-c}, \underbrace{0,\ldots,0}_{b-c})$ и $y = (\underbrace{1,\ldots,1}_{c}, \underbrace{0,\ldots,0}_{a-c}, \underbrace{1,\ldots,1}_{b-c})$ удовлетворяют условиям задачи.

Пусть теперь $a \geq c > b$ (случай $c > a$ невозможен). Числа $a_0 = a + b - 2c$, $b_0 = b$, $c_0 = c - b$ являются неотрицательными, т.к. $a + b - 2c \geq 2\sqrt{ab} - 2c \geq 0$, и

$a_0b_0 \geq c_0^2$. При этом $a_0 + b_0 < a + b = N + 1$, т.е. $a_0 + b_0 \leq N$. В силу предположения индукции решение $\{x, y\}$ существует для тройки $(a + b - 2c, b, c - b)$. Но тогда $\{x + y, y\}$ является решением для (a, b, c).

ОЛИМПИАДА — 1997

1997.1.1. Рассмотрим функцию

$$f(x) = \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \dots + \frac{a_n}{x^n}.$$

На полуоси $(0, +\infty)$ функция $f(x)$ строго убывает от $+\infty$ до нуля. Следовательно, существует единственное положительное x_0 такое, что $f(x_0) = 1$, т.е.

$$\frac{a_1}{x_0} + \frac{a_2}{x_0^2} + \dots + \frac{a_n}{x_0^n} = 1.$$

1997.1.2. Из доказательства интегрального признака сходимости рядов следует, что

$$0 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{(n^2 + x)^2} - \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{tx}{(t^2 + x)^2}\, dt \leq \frac{x}{(1 + x^2)}.$$

Поэтому

$$\lim_{x \to +\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{(n^2 + x)^2} = \lim_{x \to +\infty} \int\limits_{1}^{+\infty} \frac{tx}{(t^2 + x)^2}\, dt = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{2} \int\limits_{1+x}^{+\infty} \frac{du}{u^2} = \frac{1}{2}.$$

1997.2. Точки пересечения секущей плоскости с координатными осями образуют правильный тетраэдр с ребром $2\sqrt{2}$. Плоскости $x_k = 1$ отсекают от него четыре правильных тетраэдра с ребром $\sqrt{2}$. Так как объем правильного тетраэдра с ребром a равен $\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$, то объем сечения равен

$$\frac{\sqrt{2}}{12}\left(2\sqrt{2}\right)^2 - \frac{\sqrt{2}}{12}\left(\sqrt{2}\right)^2 = \frac{4}{3}.$$

1997.3.1. Рассмотрим функцию $f(x) = x(1-x^2)^n$. На отрезке $[0,1]$

$$f_{max} = f\left(\frac{1}{\sqrt{1+2n}}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+2n}}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right)^2.$$

При $n \to \infty$ $f_{max} \to 0$, поэтому в качестве искомого многочлена можно взять $P(x) = x - x(1-x^2)^n$ при достаточно большом n.

Замечание. Согласно теореме Мюнца, система степеней $\{1, x^{p_k}\}_{k=1}^{\infty}$, $\{p_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$, полная в $C([0,1])$ тогда и только тогда, когда $\sum\limits_{k\geq 1}\frac{1}{p_k} = +\infty$.

1997.3.2. Нет. Пусть $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ — множество всех точек квадрата $[0,1]^2$, у которых обе координаты рациональны. Для данного $\varepsilon > 0$ можно окружить каждую точку s_n таким малым кругом $B_n(s_n)$, что сумма площадей кругов-соседей B_n и B_{n+1} с площадью соединяющего их коридора (можно, например, провести две внешние касательные) будет меньше, чем $\varepsilon/2^n$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Пусть G — объединение всех таких трубочек. Так как нижняя мера $\mu_* G \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon$, а G всюду плотно в квадрате $[0,1]^2$ (и тем самым верхняя мера $\mu^* G = 1$), то G не измеримо по Жордану.

1997.4. Касательные к параболе в точках $\left(\frac{y_i^2}{2p}, y_i\right)$ $(i = 1,2,3)$ задаются уравнениями $yy_i = px + \frac{y_i^2}{2}$. Касательные пересекаются в точках $\left(\frac{y_i y_j}{2p}, \frac{y_i + y_j}{2}\right)$. Следовательно,

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} y_1^2/2p & y_1 & 1 \\ y_2^2/2p & y_2 & 1 \\ y_1^3/2p & y_3 & 1 \end{vmatrix}\right|.$$

В то же время

$$S_{KLM} = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} y_1y_2/2p & (y_1+y_2)/2 & 1 \\ y_2y_3/2p & (y_2+y_3)/2 & 1 \\ y_3y_1/2p & (y_3+y_1)/2 & 1 \end{vmatrix}\right|.$$

Отсюда находим $S_{KLM} = \frac{1}{2}S_{ABC}$.

1997.5. Достаточно проверить, что справедливо равенство

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \int\limits_0^1 f(x)\,dx + \int\limits_0^{1/2} xf'(x)\,dx + \int\limits_{1/2}^1 (x-1)f'(x)\,dx,$$

а для этого воспользоваться интегрированием по частям.

1997.6. Пусть $C = AE_{ij}A^{-1}$, где E_{ij} — матрица, в которой на пересечении i-й строки и j-го столбца стоит 1, а все остальные элементы равны нулю. Тогда

$$c_{kl}(x) = a_{ki}(x)A_{lj}(x), \tag{$*$}$$

где A_{lj} — алгебраическое дополнение элемента a_{lj} в $\det A$. Заметим, что выражение $(A_{lj}(x))^{2n+1} \cdot \det A(x)$ является суммой произведений вида $(*)$, поэтому оно имеет предел при $x \to +0$. Но $\det A(x) = 1$, следовательно, существует предел $\lim\limits_{x\to+0} A_{lj}(x)$ $(\forall l, j)$.

ОЛИМПИАДА — 1998

1998.1. Возьмем $a = 1$ и обозначим через b наименьшее из чисел $n \in \mathbb{N}$ таких, что $f(n) > f(1)$. Пусть $c = f^{-1}(2f(b) - f(1))$. Так как $2f(b) - f(1) > f(b) > f(1)$, то $c > b$.

1998.2. Пусть z_1, z_2, z_3 — корни уравнения $z^3 + az^2 + bz + c = 0$. Тогда

$$b = z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1 = z_1z_2z_3\left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3}\right) = -c\overline{a}.$$

Так как $|c| = |z_1z_2z_3| = 1$, то $|a| = |b|$, и второе уравнение принимает вид $z^3 + |a|z^2 + |a|z + 1 = 0$. Один из корней этого уравнения равен -1, а два других являются комплексно сопряженными числами, произведение которых равно 1. Следовательно, они также лежат на окружности $|z| = 1$.

1998.3.1. Пусть f — поворот плоскости вокруг точки O на угол $\pi\sqrt{2}$. Пусть $A_0 \neq O$ — произвольная точка, $A_n = f(A_{n-1})$ при $n \in \mathbb{N}$. Тогда $A_n \neq A_m$ при $n \neq m$, т.к. число $n\sqrt{2} - m\sqrt{2}$ не является целым. Пусть $S = \{A_0, A_1, \dots\}$, тогда $f(S) = \{A_1, A_2, \dots\} \subset S$, но $f(S) \neq S$.

1998.3.2. Если матрица не является симметричной, то без ограничения общности достаточно рассмотреть случай жордановой клетки с $\lambda \neq 0$:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Тогда в качестве S можно выбрать

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}.$$

1998.4. (i) Будем искать полином четвертой степени: $P(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$. Вычислив интеграл и приравняв коэффициенты при степенях n в левой и правой частях, получим линейную систему относительно переменных a, b, c, d, e с треугольной матрицей:

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -\frac{3}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{5} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Отсюда находим $P(x) = x^4 + 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30}$.
(ii)

$$\sum_{k=1}^{n} k^4 = \int\limits_0^n P(x)\,dx = \frac{n}{30}\left(6n^4 + 15n^3 + 10n^2 - 1\right).$$

1998.5. Ясно, что x_n монотонно убывает и стремится к нулю.

$$\frac{1}{x_{n+1}} = \frac{1}{\ln(1+x_n)} = \frac{1}{x_n\left(1 - \frac{x_n}{2} + o(x_n)\right)} = \frac{1}{x_n} + \frac{1}{2} + o(1),$$

или $\frac{1}{x_{n+1}} = \frac{1}{x_n} + \frac{1}{2} + y_n$, где $y_n \to 0$ при $n \to \infty$. Отсюда следует, что $\frac{1}{x_{n+1}} = \frac{1}{x_1} + \frac{n}{2} + y_1 + \dots + y_n$, $\frac{1}{nx_{n+1}} = \frac{1}{nx_1} + \frac{1}{2} + \frac{y_1 + \dots + y_n}{n}$. Так как $y_n \to 0$, то и $\frac{y_1 + \dots + y_n}{n} \to 0$, поэтому $\frac{1}{nx_n} \to \frac{1}{2}$.

1998.6. Пусть $a_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$. Предположим, что векторы $a_1, \dots, a_n$ линейно зависимы. Тогда в матрице (a_{ij}) линейно зависимы не только строки, но и столбцы. Поэтому существуют числа $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ (можно считать, что $\sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j^2 = 1$) такие, что $\sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j a_{ij} = 0$ при $1 \le i \le n$. Поэтому $\alpha_i^2 a_{ii}^2 =$

$$= \left(-\sum_{j \ne i} \alpha_j a_{ij}\right)^2 \le \left(\sum_{j \ne i} \alpha_j^2\right)\left(\sum_{j \ne i} a_{ij}^2\right) = \left(1 - \alpha_i^2\right)\left(1 - a_{ii}^2\right),$$

т.е. $a_{ii}^2 + \alpha_i^2 \le 1$. Следовательно, $(a_1, e_1) + \dots + (a_n, e_n) =$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \le \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 - \alpha_i^2} \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n} 1} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(1 - \alpha_i^2\right)} = \sqrt{n(n-1)}.$$

ОЛИМПИАДА — 1999

1999.1. Пусть $f : S \to \mathbb{R}$ непрерывно на единичной окружности комплексной плоскости. Рассмотрим на отрезке $[0,1]$ непрерывную функцию $\varphi(t) = f\left(e^{\pi i(t+1)}\right) - f\left(e^{\pi it}\right)$. Тогда $\varphi(0) = f(-1) - f(1)$, $\varphi(1) = f(1) - f(-1) = -\varphi(0)$ и по теореме Коши найдется такая точка $t_0 \in [0,1]$, что $\varphi(t_0) = 0$, т.е. $f\left(e^{\pi it_0}\right) = f\left(-e^{\pi it_0}\right)$.

1999.2.1. Пусть $f_0(x) = \frac{2}{\pi}(\sin x + \cos x)$. Во-первых, $f_0 \in M$, во-вторых, для любой функции $f \in M$ $\int\limits_0^\pi (f(x) - f_0(x))^2\, dx \geq 0$ и поэтому

$$\int\limits_0^\pi f^2(x)\, dx \geq 2\int\limits_0^\pi f(x) f_0(x)\, dx - \int\limits_0^\pi f_0^2(x)\, dx = \frac{8}{\pi} - \frac{4}{\pi} = \frac{4}{\pi} =$$

$$= \int\limits_0^\pi f_0^2(x)\, dx.$$ Итак, минимум достигается при $f = f_0$.

1999.2.2. Имеем $y(x) = e^{x^2/2}\left(\int_{x_0}^x e^{-t^2/2} f(t)\, dt + C\right)$. Если $y(x) \to 0$ при $x \to \infty$, то

$$\int\limits_{x_0}^{+\infty} e^{-t^2/2} f(t)\, dt = -C = -\int\limits_{-\infty}^{x_0} e^{-t^2/2} f(t)\, dt,$$

откуда получаем необходимое условие

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} f(t)\, dt = 0.$$

Докажем, что при выполнении этого условия решение $y(x) = e^{x^2/2}\int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} f(t)\, dt = -e^{x^2/2}\int_x^{+\infty} e^{-t^2/2} f(t)\, dt$ стремится к нулю при $x \to \infty$. При $x \to -\infty$ имеем по правилу Лопиталя

$$|y(x)| \leq \frac{\int_{-\infty}^x e^{-t^2/2}|f(t)|\, dt}{e^{-x^2/2}} \sim \frac{e^{-x^2/2}|f(x)|}{-xe^{-x^2/2}} = -\frac{|f(x)|}{x} \to 0.$$

При $x \to +\infty$ используем представление

$$y(x) = -e^{-x^2/2} \int\limits_x^{+\infty} e^{-t^2/2} f(t)\, dt$$

и действуем аналогично.

1999.3. Положим $a_{n+1} = 1 - a_1 - \dots - a_n$. Тогда $a_{n+1} > 0$, и неравенство, которое надо доказать, примет следующий вид:

$$\frac{(1-a_1)(1-a_2)\dots(1-a_n)(1-a_{n+1})}{a_1 a_2 \dots a_n (a_{n+1})} \geq n^{n+1}.$$

Применяя неравенство для средних, получим для каждого $i = 1, 2, \dots, n+1$: $1 - a_i = a_1 + \dots + a_{i-1} + a_{i+1} + \dots + a_{n+1} \geq$ $\geq n \sqrt[n]{a_1 \dots a_{i-1} a_{i+1} \dots a_{n+1}}$. Перемножив эти неравенства, получим, что

$$(1-a_1)(1-a_2)\dots(1-a_{n+1}) \geq n^{n+1} a_1 a_2 \dots a_{n+1}.$$

1999.4. Проведем через начало координат в $\mathbb{R}^n$ плоскость, порожденную векторами a и b. Она пересекает куб по множеству $\{\alpha a + \beta b \mid |\alpha a_k + \beta b_k| \leq 1,\ k = 1, \dots, n\}$. Векторы a и b достаточно выбрать так, чтобы выполнялись следующие свойства:

1) $\|a\| = \|b\|$ и $(a, b) = 0$;
2) на двумерной плоскости с координатами (α, β) неравенства $|\alpha a_k + \beta b_k| \leq 1$, $k = 1, \dots, n$, задают правильный $2n$-угольник.

Оба свойства выполняются, например, при $a_k = \sin \frac{k\pi}{n}$, $b_k =$ $= \cos \frac{k\pi}{n}$: $(a, b) = \frac{1}{2} \sum\limits_{k=1}^{n} \sin \frac{2k\pi}{n} = 0$,

$$\|a\|^2 = \frac{n}{2} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \cos \frac{2k\pi}{n} = \frac{n}{2}, \quad \|b\|^2 = \frac{n}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \cos \frac{2k\pi}{n} = \frac{n}{2}.$$

1999.5. Задача сводится к решению функционального уравнения $2xf(x^2) = f(x)$. Одно из его решений есть функция $f(x) = \frac{A}{x \ln x}$. После подстановки в интеграл находим $A = \frac{1}{\ln 2}$.

1999.6. Подойдет матрица

$$T(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{x} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{x} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{x} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{x^2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$= T_2T_1$. После умножения на T_1 уничтожается главная особенность в каждой строке и т.д. Матрица $T(x)$ не единственна.

Замечание. Фактически, это способ доказательства леммы Соважа из книги [17].

ОЛИМПИАДА — 2000

2000.1. Неверно. Пусть $A_n = \{1, 3, \ldots, 2n-3, 2n-1, 2n\}$, $B_n = \{2, 4, \ldots, 2n-2, 2n, 2n+1\}$, $F = \{A_1, B_1, A_2, B_2, \ldots\}$. Тогда

$$A_k \cap B_m = \begin{cases} \{2k\}, & \text{если } m \geq k, \\ \{2m+1\}, & \text{если } m < k. \end{cases}$$

2000.2. Заметим, что

$$I = \int\limits_0^1 f(x)\,dx = \int\limits_0^{\pi/2} f(\sin\varphi)\cos\varphi\,d\varphi = \int\limits_0^{\pi/2} f(\cos\varphi)\sin\varphi\,d\varphi.$$

Отсюда следует, что

$$2I = \int\limits_0^{\pi/2} (f(\sin\varphi)\cos\varphi + f(\cos\varphi)\sin\varphi)\,d\varphi \leq \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi = \frac{\pi}{2}.$$

2000.3. Не существует по критерию Коши. Покажем, что $\sum_{n=N+1}^{3N} \frac{\pi(n)}{n^2} > \frac{1}{9}$ при любом $N \geq 1$. Среди $2N$ чисел

$\pi(N+1),\ldots,\pi(3N)$, по крайней мере, N чисел больше, чем N. Следовательно,

$$\sum_{n=N+1}^{3N}\frac{\pi(n)}{n^2} > \frac{1}{(3N)^2}\sum_{n=N+1}^{3N}\pi(n) > \frac{1}{9N^2}\cdot N\cdot N.$$

2000.4. Пусть I — единичная матрица порядка n. Тогда, применяя правила умножения блочных матриц, получаем $\det M\cdot\det H =$

$$= \det\begin{pmatrix} A & B\\ C & D\end{pmatrix}\cdot\det\begin{pmatrix} I & F\\ 0 & H\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} A & B\\ C & D\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} I & F\\ 0 & H\end{pmatrix} =$$

$$= \det\begin{pmatrix} A & 0\\ C & I\end{pmatrix} = \det A.$$

2000.5. Пусть $\{e_1, e_2, \ldots, e_{10}\}$ — такой базис в L, что $\{e_1, e_2, e_3\}$ — базис в L_1, а $\{e_1, \ldots, e_6\}$ — в L_2. В этом базисе матрица преобразования из $\mathbb{E}$ имеет вид

$$\begin{pmatrix}
* & * & * & * & * & * & * & * & * & *\\
* & * & * & * & * & * & * & * & * & *\\
* & * & * & * & * & * & * & * & * & *\\
0 & 0 & 0 & * & * & * & * & * & * & *\\
0 & 0 & 0 & * & * & * & * & * & * & *\\
0 & 0 & 0 & * & * & * & * & * & * & *\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & * & *\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & * & *\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & * & *\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & * & *
\end{pmatrix}.$$

Следовательно, $\dim\mathbb{E} = 3\cdot 3 + 3\cdot 6 + 4\cdot 10 = 67$.

2000.6. Достаточно доказать неравенство при $n > 1$ и при $x \neq x_i$, где $x_1, \ldots, x_n$ — корни многочлена $P(x)$. Имеем

$$\frac{P'(x)}{P(x)} = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x-x_i}, \qquad \frac{P''(x)}{P(x)} = \sum_{1\le i<j\le n}\frac{2}{(x-x_i)(x-x_j)}.$$

Следовательно, $(n-1)\left(\frac{P'(x)}{P(x)}\right)^2 - n\frac{P''(x)}{P(x)} =$

$$= (n-1)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x-x_i}\right)^2 - n\sum_{1\le i<j\le n}\frac{2}{(x-x_i)(x-x_j)} = \sum_{i=1}^{n}\frac{n-1}{(x-x_i)^2} -$$
$$- \sum_{1\le i<j\le n}\frac{2}{(x-x_i)(x-x_j)} = \sum_{1\le i<j\le n}\left(\frac{1}{x-x_i}-\frac{1}{x-x_j}\right)^2 \ge 0.$$

ОЛИМПИАДА — 2001

2001.1. Если $0 = f(0)$, то задача решена. Если $0 < f(0)$, то множество $A = \{x \in [0,1] \mid f(x) > x\}$ непусто. Пусть $a = \sup A$, $b = f(a)$. Покажем, что $a = b$.

Предположим противное: $a < b$ или $a > b$.
1) Если $a < b$, то $b = f(a) \le f\left(\frac{a+b}{2}\right) \le \frac{a+b}{2} < b$.
2) Если $a > b = f(a)$, то $a \notin A$. По определению $\sup A$ $\forall c < a$ $\exists x_c \in A$: $a \ge x_c > c$. Взяв $c = b$, получаем $b = f(a) \ge f(x_b) > > x_b > b$. Итак, в обоих случаях получили противоречие, значит $a = b$.

Замечание. Задача примечательна тем, что в этом простейшем результате о неподвижной точке отсутствует требование непрерывности функции f. Более подробно об этом вопросе можно посмотреть [20, глава 5, §1, §2].

2001.2. Имеем оценку

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{\sqrt{i}}\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{\sqrt{i}}\right)\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{x_j}{\sqrt{j}}\right) \ge \sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{\sqrt{i}}\left(\sum_{j=1}^{i}\frac{x_j}{\sqrt{j}}\right) \ge$$
$$\ge \sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{\sqrt{i}}\cdot i\cdot\frac{x_i}{\sqrt{i}} = \sum_{i=1}^{n}x_i^2.$$

2001.3. Возьмем произвольный интервал $(x_0-\delta, x_0+\delta)$, $\delta > 0$. Так как f не является монотонно возрастающей на $[x_0-\delta, x_0]$, то найдутся точки $p, q \in [x_0-\delta, x_0]$ такие, что $p < q$

и $f(p) > f(q)$. Аналогично, найдутся точки $r, s \in [x_0, x_0 + \delta]$: $r < s$, $f(r) < f(s)$ (т.к. f не является монотонно убывающей на $[x_0, x_0+\delta]$). По теореме Вейерштрасса на отрезке $[p, s]$ функция f достигает своей нижней грани, и этой точкой глобального минимума не могут быть точки p, s. Следовательно, на интервале $(p, s) \subset (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ имеется точка минимума f.

Замечание. Отметим, что любая функция из $C(\mathbb{R})$ не дифференцируемая ни в одной точке из $\mathbb{R}$ (функция Вейерштрасса) удовлетворяет условию задачи.

2001.4. Заметим, что если $\exists x \in \mathbb{R}_+$: $f(x) > 1$, то при $y = \frac{x}{f(x)-1}$ из функционального уравнения следует, что $f(x) = 1$ — противоречие.

Следовательно, $f(x) \leq 1$ для всех $x \in \mathbb{R}_+$. Отсюда вытекает, что выполнено неравенство

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+ \qquad \frac{f(x+y)}{f(x)} = f(yf(x)) \leq 1,$$

т.е. функция f монотонно убывает.

Если $\exists x \in \mathbb{R}_+$: $f(x) = 1$, то $f(y) = f(x+y)$ для всех $y > 0$, и в силу установленной монотонности отсюда следует, что $f = 1$ тождественно. Это тривиальное решение.

Если $f(x) < 1$ для всех $x \in \mathbb{R}_+$, то f строго убывающая функция. В этом случае имеем

$$f(x)f(yf(x)) = f(x+y) = f(yf(x) + x + y(1 - f(x))) =$$

$= f(yf(x))f((x + y(1 - f(x)))f(yf(x)))$. В силу строгой монотонности f отсюда следует, что $x = (x + y(1 - f(x)))f(yf(x))$. В частности, полагая $x = 1$, $z = yf(1)$, получим $f(z) = \frac{1}{1+az}$, где $a = \frac{1-f(1)}{f(1)} > 0$. Отметим, что при $a = 0$ получаем тривиальное решение. Проверка показывает, что $f(x) = \frac{1}{1+ax}$, $a \geq 0$, удовлетворяет функциональному уравнению.

2001.5. Достаточно проверить, что

$$\frac{\partial}{\partial x}G(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}G(x,y)=P^{(n)}(x)Q^{(1)}(y)+\cdots+P^{(1)}(x)Q^{(n)}(y).$$

2001.6. Очевидно, квадрат можно разрезать на k^2 квадратов меньшего размера, $k\geq 2$.

Это число можно увеличить до $k^2+p(m^2-1)+q(n^2-1)$, где m, n, p, q — любые натуральные.

Если натуральные числа a, b — взаимно простые, то любое целое число c можно представить в виде $c=ax+by$ $(x,y\in\mathbb{Z})$. При этом, если натуральное c достаточно велико, то найдутся неотрицательные решения. Действительно, $\{0,a,\ldots,(b-1)a\}$ — полная система вычетов по модулю b. Следовательно, $ax\equiv$ $\equiv c\,(\mathrm{mod}\,b)$ при некотором $x\in\{0,1,\ldots,b-1\}$. Если $c\geq(b-1)a$, то число $y=\frac{c-ax}{b}$ является неотрицательным.

Взяв $m=2$, $n=3$, получаем пару взаимно простых чисел $a=m^2-1=3$ и $b=n^2-1=8$. Существование разбиения вида $N=k^2+3p+8q$ для достаточно большого N следует из приведенного выше рассуждения.

ОЛИМПИАДА — 2002

2002.1. Пусть Δ_j — определитель матрицы, полученной из единичной заменой j-го столбца на $(x_1y_j,\ldots,x_ny_j)^T$. В силу линейности детерминанта по столбцу имеем

$$\det A=\det E+\sum_{i=1}^{n}\Delta_i=1+\sum_{i=1}^{n}x_iy_i.$$

2002.2. Пусть

$$I_k=\int\limits_0^1\frac{\ln(1-x^k)}{x}\,dx=\frac{1}{k}\int\limits_0^1\frac{\ln(1-y)}{y}\,dy.$$

Тогда

$$I = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\,dx = I_2 - I_1 = -\frac{1}{2}I_1, \quad \text{а } I_3 = \frac{1}{3}I_1 = -\frac{2}{3}I = -\frac{\pi^2}{18}.$$

2002.3. Ясно, что $0 < x_n < 1$ при всех n. При сравнении малых величин полезно бывает заменять их обратными, поэтому

$$\Delta_{n+1} = \frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n} = \frac{x_n - x_{n+1}}{x_n x_{n+1}} = \frac{x_n^2/2002}{x_n x_{n+1}} = \frac{x_n}{2002 x_{n+1}} =$$

$= \frac{1}{2002 - x_n} \in \left(\frac{1}{2002}, \frac{1}{2001}\right)$. Отсюда

$$\frac{1}{x_{2002}} = \Delta_{2002} + \cdots + \Delta_1 + \frac{1}{x_0} \in \left(1 + \frac{2002}{2002}, 1 + \frac{2002}{2001}\right).$$

Следовательно, $\frac{2001}{4003} < x_{2002} < \frac{1}{2}$.

2002.4. Условие необходимо: достаточно подставить многочлен $P(x) = x^2$.

Достаточность условия доказывается по индукции:

$$\begin{aligned}(A+B)^{n+1} &= (A+B)^n(A+B) = \left(A^n + nA^{n-1}B\right)(A+B) = \\ &= A^{n+1} + nA^{n-1}\left(BA + B^2\right) + A^nB = \\ &= A^{n+1} + nA^{n-1}AB + A^nB = A^{n+1} + (n+1)A^nB.\end{aligned}$$

2002.5. Не может. Если допустить, что $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{n!} = \frac{p}{q}$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, то $q!\left(\frac{p}{q} - \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{n!}\right) = k - \sum\limits_{n=q+1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{n!}$, где $k \in \mathbb{Z}$. Покажем, что $0 < \left|\sum\limits_{n=q+1}^{\infty} \frac{q!\varepsilon_n}{n!}\right| < 1$. Действительно,

$$\left|\sum_{n=q+1}^{\infty} \frac{q!\varepsilon_n}{n!}\right| \le \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \cdots < \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)^2} + \cdots =$$

$= \frac{1}{q} \leq 1$; и отсюда же следует, что

$$\left| \sum_{n=q+2}^{\infty} \frac{q!\varepsilon_n}{n!} \right| < \frac{1}{q(q+1)} \leq \frac{1}{q+1} = \left| \frac{\varepsilon_{q+1} q!}{(q+1)!} \right|.$$

2002.6. Возьмем произвольную точку $x \in \mathbb{R}^n$. В силу непрерывности нормы и компактности множества A найдется $a \in A$: $\|x-a\| = \sup\limits_{y \in A} \|x-y\|$. Пусть $l = \{x + \lambda(x-a) \mid \lambda > 0\}$. Обозначим $B_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|y-x\| \leq r\}$. Тогда для любого $z \in l$ имеем

$$A \subset B_{\|x-a\|}(x) \subset B_{\|z-a\|}(z),$$

причем пересечение границ двух последних шаров есть одноточечное множество $\{a\}$. Следовательно, $l \subset B$. Но $x \in \bar{l}$, поэтому $x \in \overline{B}$.

Замечание. Этот почти тривиальный в $\mathbb{R}^n$ результат доказан М. Эделстейном в равномерно выпуклых банаховых пространствах (например, в l_p, $1 < p < \infty$) в 1968 году и применен для обобщения теоремы Крейна—Мильмана о крайних точках. Аналогичный результат для ближайших точек замкнутых множеств в равномерно выпуклых пространствах доказал С.Б. Стечкин [16] в 1963 году при исследовании задач геометрической теории приближений.

ОЛИМПИАДА — 2003

2003.1. $|ac + ad + bc - bd| \leq |a| \cdot |c+d| + |b| \cdot |c-d| \leq |c+d| + |c-d| \leq 2\sqrt{2}$. Значение $2\sqrt{2}$ достигается, например, при $a = b = 1$, $c = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$, $d = \frac{1-i}{\sqrt{2}}$.

2003.2. Так как $e^x \geq 1 + x$ для всех $x \in \mathbb{R}$, то

$$\sum_{i,j=1}^{n} e^{(a_i,a_j)} \geq \sum_{i,j=1}^{n} (1 + (a_i, a_j)) = n^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} a_i, \sum_{i=1}^{n} a_i \right) \geq n^2.$$

2003.3. Теорема Декарта, утверждающая, что многочлен вида $P_n(x) = a_1x^{k_1} + \dots + a_nx^{k_n}$ $(k_1 < k_2 < \dots < k_n)$ имеет не более $n-1$ положительных корней, доказывается индукцией по n. При $n = 2$ $P_2(x) = x^{k_1}(a_1 + a_2x^{k_2-k_1})$. Покажем, что из справедливости утверждения для степени n следует его справедливость для $n+1$. Пусть N_f — число положительных нулей гладкой функции $f(x)$. Тогда по теореме Ролля $N_{f'} \geq N_f - 1$. Продифференцировав многочлен $Q(x) = P_{n+1}(x)/x^{k_1}$, получим оценку $N_{P_{n+1}} = N_Q \leq N_{Q'} + 1 \leq (n-1) + 1 = n$.

2003.4. Рассмотрим функцию $g(x) = f(x+a) - f(x)$. Пусть $T > 0$ — период функции f. Тогда $\int\limits_0^T g(x)\,dx = 0$. Следовательно, либо $g(x) = 0$, либо g принимает на $[0,T]$ значения разных знаков. Пусть $\xi < \eta$ и $g(\xi) > 0$, а $g(\eta) < 0$. Тогда $g(\xi+T) > 0$ и по теореме Коши на каждом из интервалов (ξ,η) и $(\eta,\xi+T)$ имеются нули функции g.

2003.5. Найдем прямую, параллельную третьей и пересекающую первую и вторую. Отрезок, ограниченный точками пересечения, будет ребром параллелепипеда. Для этого нужно найти такое γ, чтобы для некоторых α и β выполнялось равенство $r_1 + \alpha a_1 + \gamma a_3 = r_2 + \beta a_2$. Числа α, β и γ определяются однозначно, поскольку векторы a_1, a_2, a_3 некомпланарны. Умножив равенство на $[a_1,a_2]$, получим $\gamma = (a_1,a_2,r_2-r_1)/(a_1,a_2,a_3)$. Таким образом, вектор, задающий одно из ребер, имеет вид $a_3 \cdot (a_1,a_2,r_2-r_1)/(a_1,a_2,a_3)$. Другие векторы находятся аналогично. Найдя смешанное произведение этих векторов, получим ответ

$$V = \left| \frac{(a_1,a_2,r_2-r_1)(a_2,a_3,r_3-r_2)(a_3,a_1,r_1-r_3)}{(a_1,a_2,a_3)^2} \right|.$$

2003.6. Обозначим определитель в левой части W_n. Это определитель Вандермонда и он равен $W_n = \prod\limits_{i>j}(x_i - x_j)$.

Достаточно доказать, что $W_n^{\frac{4}{n(n-1)}} \le \frac{2}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2$. Для оценки левой части в последнем неравенстве применим неравенство о средних:

$$\left(\prod_{i>j}(x_i - x_j)\right)^{\frac{2}{n(n-1)}} \le \frac{\sum\limits_{i>j}(x_i - x_j)^2}{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

Но $\sum\limits_{i>j}(x_i - x_j)^2 \le n\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2$, т.к. последнее неравенство эквивалентно тому, что $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \ge 0$.

ОЛИМПИАДА — 2004

2004.1. Найдутся хотя бы две строки, все элементы которых — нечетные числа. Вычитая одну строку из другой, получим строку, состоящую из четных чисел.

2004.2. Определим $F(x) = \int\limits_0^x f(t)\,dt$. Функция $F(x)$ непрерывная и периодическая. Пусть a — точка глобального минимума $F(x)$. Тогда для любого $b \in \mathbb{R}$ имеем

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \ge 0.$$

2004.3. Пусть a, b, c — стороны треугольника, тогда

$$\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 \ge abc = 4SR \ge 2R,$$

т.к. площадь треугольника с целочисленными вершинами не менее $\frac{1}{2}$.

2004.4. Легко видеть, что $P(x) = 1 + (x-1)^5 Q(x)$ и кроме того $P(x) = O(x^{10})$ при $x \to 0$. Тогда

$$Q(x) = (1-x)^{-5} + O(x^{10}) = \sum_{k=0}^{9} C_{-5}^{k} (-x)^k + O(x^{10}).$$

Ясно, что $Q(x)$ будет иметь наименьшую степень, если

$$Q(x) = \sum_{k=0}^{9} C_{-5}^{k} (-x)^k.$$

Таким образом,

$$P(x) = 1 + (x-1)^5 \sum_{k=0}^{9} C_{-5}^{k} (-x)^k.$$

2004.5. Каждую окружность "накрываем" параболоидом вида $z = R_i^2 - (x - x_i)^2 - (y - y_i)^2$. Каждая пара параболоидов пересекается по параболе, проекция которой на плоскость Oxy дает соответствующую прямую. Но такая парабола либо пересекает третий параболоид в единственной точке, либо не пересекает.

2004.6.1. Примем за начало координат O какую-нибудь точку на поверхности. Ось Ox направим по одной образующей, ось Oy — по другой, ось Oz оставим прежней. В новых координатах уравнение поверхности имеет вид $z = g(x, y)$, где g — многочлен степени не ниже второй, $g(0, y) = g(x, 0) = 0$, т.е. $g(x, y) = xyh(x, y)$. Остается доказать, что $h(x, y) = \text{const}$.

Заметим, что если l — какая-либо образующая, а l_1 — ее проекция на плоскость Oxy, то функция g на прямой l_1 линейна. Действительно, пусть l_1 имеет уравнение $x = x_0 + at$, $y = y_0 + bt$, тогда $g(x_0 + at, y_0 + bt) = z_0 + ct$.

Рассмотрим точку $(0, y_0, 0)$ на поверхности, $y_0 \neq 0$. Кроме оси Oy через эту точку проходит еще одна образующая l.

Запишем ее уравнение в виде $y = y_0 + ax$, $z = bx$. Тогда имеем тождественно по x:

$$bx = x(y_0 + ax)h(x, y_0 + ax). \qquad (*)$$

Покажем, что $a = 0$. Если это не так, то из $(*)$ следует, что $h(x, y_0 + ax) = 0$ тождественно по x, т.е. многочлен g обращается в ноль на трех прямых: $x = 0$, $y = 0$, $y = y_0 + ax$. Возьмем любую точку (x_1, y_1) внутри треугольника, ограниченного этими прямыми. Рассмотрим одну из двух образующих, проходящих через точку $(x_1, y_1, g(x_1, y_1))$. Проекция этой образующей пересекает границу треугольника в двух точках, в этих точках g обращается в ноль. Так как g линейна на проекции образующей, то $g(x_1, y_1) = 0$ внутри треугольника, а значит, и везде, т.к. g — многочлен. Это противоречит тому, что $g \neq 0$ тождественно.

При $a = 0$ из $(*)$ получаем, что $h(x, y_0) = \alpha(y_0)$. Аналогично, рассматривая точку $(x_0, 0, 0)$, получим $h(x_0, y) = \beta(x_0)$. Тогда для любой точки (x_0, y_0) имеем $h(x_0, y_0) = \alpha(y_0) = \beta(x_0)$ и $h = \mathrm{const}$.

2004.6.2. Имеем

$$A = \begin{pmatrix} B & C \\ C^T & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ C^T B^{-1} & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & D - C^T B^{-1} C \end{pmatrix} \times$$
$$\times \begin{pmatrix} E & B^{-1}C \\ 0 & E \end{pmatrix}.$$

Таким образом, матрица A и матрица

$$A_1 = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & D - C^T B^{-1} C \end{pmatrix}$$

есть матрица одной и той же квадратичной формы в разных базисах. Утверждение задачи вытекает из закона инерции квадратичных форм.

ОЛИМПИАДА — 2005

2005.1. Пусть $h(x) = x\ln x + (1-x)\ln(1-x)$, $g(x) = x^2 + (1-x)^2$. $g'(x) = 2(2x-1)$. Если $0 \le x, y \le 1/2$, то $g(x) < g(y)$ влечет $x > y$, откуда следует $h(x) < h(y)$, поскольку $h'(x) = 1 + \ln x - 1 - \ln(1-x) = \ln\frac{x}{1-x} < 0$, т.к. $\frac{x}{1-x} < 1$ при $0 < x < 1/2$.

2005.2. Будем называть перестановки, удовлетворяющие условию, пилообразными. Ясно, что пилообразных перестановок с условием $\sigma(1) < \sigma(2)$ ровно половина от общего количества. При этом таких перестановок с условием $\sigma(2006) = 2006$ ровно $d_{2005}/2$, и в любой такой перестановке $\sigma(2005) < 2005$, иначе $\sigma(2004)$ неопределена. Сопоставим перестановке σ, $\sigma(2006) = 2006$, перестановку σ' такую, что $\sigma'(i) = \sigma(i)$ при $\sigma(i) < 2005$, $\sigma'(2006) = 2005$, $\sigma'(j) = 2006$, где $\sigma(j) = 2005$. Тогда σ' — тоже пилообразная, причем разным σ соответствуют разные σ'. Поэтому $d_{2006} \ge 2d_{2005}$. Осталось заметить, что существует хотя бы одна пилообразная перестановка с $\sigma(2005) < \sigma(2006) < 2005$.

2005.3. а) Пусть $a = f'_+(0)$. Тогда $f(x) = ax + o(x)$, $x \to +0$, откуда $x(ax+o(x)) + x^2 = (ax+o(x))(x+o(x)) + 2(ax+o(x))^2$, или $x^2(2a^2-1) = o(x^2)$, т. е. $a^2 = 1/2$, $|a| = 1/\sqrt{2}$.

б) Заметим, что $f(x) = 0 \Rightarrow x = 0$, поэтому $f(x)$ знакопостоянна. Будем считать $f(x) \geqslant 0$.

Пусть $F(x,y) = x\sin y + x^2 - y\sin x - 2y^2$. По формуле Тейлора $F(x,y) = x^2 - 2y^2 + o(x^2+y^2)$ при $x, y \to 0$. Подставив $y = f(x)$, получаем $x^2 - 2f^2(x) = o(f^2(x) + x^2)$, $x \to +0$. Отсюда последовательно получаем при $x \to +0$

$$\frac{x^2 - 2f^2(x)}{f^2(x) + x^2} \to 0,\ \frac{3x^2}{f(x)^2 + x^2} \to 2,\ \frac{f^2(x) + x^2}{x^2} \to \frac{3}{2},\ \frac{f^2(x)}{x^2} \to \frac{1}{2}.$$

Учитывая постоянство знака, получаем $f(x)/x \to 1/\sqrt{2}$.

Замечание. Классическая теорема о неявной функции в этой задаче не работает — спасает тейлоровское разложение.

О локальном исследовании уравнения $f(x) = 0$ можно посмотреть [20, Гл. 2, §3].

2005.4. Пусть O — центр симметрии, точки $A_0, B_0 \in \Gamma$: $A_0B_0 = \operatorname{diam}\Gamma$ (*). Тогда прямые l_{10} и l_{20} ($A_0 \in l_{10}$, $B_0 \in l_{20}$; $l_{10}, l_{20} \perp A_0B_0$) пересекают Γ в одной точке (l_{10} — в точке A_0, а l_{20} — в точке B_0), т.к. иначе по теореме Пифагора получаем противоречие с условием (*). Пусть прямая $l_0 \| l_{10}$ и проходит через точку O, A_1 и A_2 — точки пересечения l_0 с Γ. Пусть l_1 — прямая между l_{10} и l_0, параллельная им и такая, что $l_1 \cap \Gamma = \{B_1, B_2\}$ и $B_1B_2 = \frac{1}{2}A_1A_2$ (существует по теореме о промежуточных значениях непрерывной на отрезке функции). Пусть l_2 симметрична l_1 относительно l_0, $l_2 \cap \Gamma = \{C_1, C_2\}$, $C_1C_2 = \frac{1}{2}A_1A_2$. Пусть аффинное преобразование T переводит параллелограмм $B_1B_2A_2O$ в ромб $B_1B_2A_2O$ с ребром 1 и углом $\angle B_1OA_2 = 2\pi/3$. Тогда T переводит $B_1B_2A_2C_2C_1A_1$ в правильный шестиугольник и, значит, $B_1B_2A_2C_2C_1A_1$ — искомый.

Замечание. Из этой задачи следует, что если за единичный шар на плоскости взять множество из задачи **2005.4**, то его периметр будет не меньше 6.

2005.5. Так как $\det(A + tB)^{-1} = (\det(A + tB))^{-1}$ — целое число, то получаем $f(t) = \det(A + tB) = \pm 1$ при $t = 0, 1, \ldots, 25$. Тогда $f(t)^2 - 1$ — многочлен не более, чем 20-й степени, имеющий 26 корней, поэтому он — тождественный ноль. Отсюда $\det(A + 2005B) = \pm 1$ и по формулам Крамера элементы матрицы $(A + 2005B)^{-1}$ — целые.

2005.6. Пусть при $\varepsilon > 0$

$$\Delta(\varepsilon) = \sup\{\delta > 0 \mid \forall x \in U_\delta(x_0) \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\}.$$

Легко видеть, что $\forall \varepsilon > 0$ $\Delta(\varepsilon) \in (0, +\infty]$, также если $0 < \varepsilon_1 < < \varepsilon_2$, то $\Delta(\varepsilon_1) \leq \Delta(\varepsilon_2)$ (считаем, что $+\infty \leq +\infty$). Если для любого $\varepsilon > 0$ $\Delta(\varepsilon) = +\infty$, то $f(x) = f(x_0)$ и утверждение очевидно.

Пусть $\exists\varepsilon_0 > 0$: $\Delta(\varepsilon_0) < +\infty$. Тогда функция

$$\delta(\varepsilon) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^{\varepsilon} \Delta(t)\,dt, \ 0 < \varepsilon \le \varepsilon_0, \\ \frac{1}{\varepsilon_0}\int\limits_0^{\varepsilon_0} \Delta(t)\,dt, \ \varepsilon_0 \le \varepsilon, \end{cases}$$

является искомой.

Замечание. Задача возникла на научном семинаре по нелинейному анализу факультета ВМК МГУ.

ОЛИМПИАДА — 2006

2006.1. Пусть $h_2(x) = \max\{f''(x), 0\}$, $g_2(x) = \max\{-f''(x), 0\}$. Пусть

$$h_1(x) = \int\limits_0^x \left(\int\limits_0^t h_2(\tau)\,d\tau\right)\,dt, \quad g(x) = \int\limits_0^x \left(\int\limits_0^t g_2(\tau)\,d\tau\right)\,dt.$$

Так как $f''(x) = h_2(x) - g_2(x)$, то найдутся числа a, b такие, что $f(x) = h_1(x) - g(x) + ax + b$. Тогда $f(x) = h(x) - g(x)$, где $h(x) = h_1(x) + ax + b$, выпуклость h и g следует из неотрицательности их вторых производных.

Замечание. Эта задача становится нетривиальной, если аргумент функции из $\mathbb{R}^n$, $n > 1$. В таком виде она поставлена А.Д. Александровым. Недавно появилось решение в случае, когда аргумент из $\mathbb{R}^2$ (устное сообщение).

2006.2.1. Имеем $x_n \ge \sqrt[3]{6} > 1$ и $x_n \le \sqrt[3]{6 + \dots + \sqrt[3]{8}} = 2$ для всех n. Кроме того, $\{x_n\}$ строго монотонно возрастает, поэтому по теореме Вейерштрасса существует $\lim x_n = 2$. Замечая, что

$$0 \le 2 - x_{n+1} = \frac{8 - x_{n+1}^3}{4 + 2x_{n+1} + x_{n+1}^2} = \frac{2 - x_n}{4 + 2x_{n+1} + x_{n+1}^2} \le \frac{2 - x_n}{7},$$

получаем, что $\lim 6^n(2-x_n)=0$.

2006.2.2. Так как $\{x_k\}$ монотонно убывает к нулю, то и последовательность $\alpha_k = \frac{x_k}{k^\alpha}$ монотонно убывает к нулю. Поскольку $\sum\limits_{m=k+1}^{2k} \alpha_m \geq \alpha_{2k} \cdot k$ и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ сходится, в силу критерия Коши сходимости ряда получаем, что $2k \cdot \alpha_{2k} \to 0$. Отсюда в силу монотонности $\{\alpha_k\}$ имеем $\alpha_k = \frac{\varepsilon_k}{k}$, $\varepsilon_k \to 0$.

$$\frac{x_k}{k^\alpha} = \frac{\varepsilon_k}{k} \;\Rightarrow\; x_k = \frac{\varepsilon_k}{k^{1-\alpha}} \;\Rightarrow\; x_k^{\frac{1}{1-\alpha}} = \frac{\varepsilon_k^{\frac{1}{1-\alpha}}}{k} \leq \frac{\varepsilon_k}{k},$$

последнее неравенство верно при всех достаточно больших k. Итак, ряд $\sum x_k^{\frac{1}{1-\alpha}}$ сходится по признаку сравнения.

2006.3.1. По теоремам Гаусса и Ролля многочлен P' имеет $n-1$ корень $\{e_j\}_{j=1}^{n-1}$, причем в каждой из точек e_j у функции P либо локальный минимум, либо локальный максимум. Пусть $M = \max\{f(e_j)\}_{j=1}^{n-1}$, $m = \min\{f(e_j)\}_{j=1}^{n-1}$. Пусть $z_1 = \max\{x \mid P(x) = M\}$, $z_0 = \min\{x \mid P(x) = m\}$. Пусть $\{x_k\}_{k=1}^{n}$ — корни $P(x) = 0$. Если для некоторого k выполнено $x_k \in [m, M]$, то существует не менее 2-х решений $P(y) = x_k$; поскольку для каждого k существует хотя бы 1 решение y уравнения $P(y) = x_k$, то получаем противоречие с условием $P(P(x)) = 0$ имеет n корней. Поэтому для каждого k $x_k < m$ или $x_k > M$.

Пусть $P(y_k) = x_k$, т.е. $\{y_k\}_{k=1}^{n}$ — решения $P(P(x)) = 0$. Если, например, для данного k $x_k > M$, то $y_k > z_1 \geq x_k > M$, первое неравенство в силу строго монотонного возрастания P на промежутке $[z_1, +\infty)$. Аналогично, если $x_k < m$, то $y_k < z_0 \leq x_k < m$. Таким образом, уравнение $P(x) = y_k$ имеет 1 корень для всех $k \in \overline{1,n}$. Следовательно, уравнение $P(P(P(x))) = 0$ имеет n корней.

2006.3.2. Запишем первый интеграл

$$\frac{(y')^2}{2} - \cos y = \frac{(y'(0))^2}{2} - \cos y(0) = C.$$

Отсюда $(y')^2 = 2C + 2\cos y$. Если $C \le 1$, то решение $y(x)$ ограничено и $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{y(x)}{x} = 0$. Пусть $C > 1$. Тогда решение неограничено. Пусть для определенности $y' = \sqrt{2C + 2\cos y}$. Отсюда

$$\frac{dy}{\sqrt{2C+2\cos y}} = dx \ \Rightarrow \int\limits_{y(0)}^{y} \frac{dy}{\sqrt{2C+2\cos y}} = x(y) - x(y(0)).$$

Из этого получаем, что при $y \to \infty$

$$\int\limits_{y(0)}^{y} \frac{dy}{\sqrt{2C+2\cos y}} \sim \frac{y-y(0)}{2\pi} \int\limits_{0}^{2\pi} \frac{dy}{\sqrt{2C+2\cos y}} = \frac{y-y(0)}{2\pi} A,$$

$A = \int\limits_0^{2\pi} \frac{dy}{\sqrt{2C+2\cos y}}$. Отсюда $x(y) \sim \frac{y-y(0)}{2\pi} A$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{y(x)}{x} = \frac{2\pi}{A}$.

2006.4. Можно считать, что у всех четырех функций квадратичная часть равна $x^2 + y^2$. В этом случае для точки p вне окружности, заданной уравнением $f(x) = 0$, значение $f(p)$ равно квадрату длины касательной к окружности.

Докажем, что если существует перпендикулярная окружность, то уравнения линейно зависимы. Пусть центр этой окружности находится в начале координат. Тогда длины касательных из начала координат ко всем окружностям равны радиусу перпендикулярной окружности, значит, все уравнения окружностей имеют вид

$$f_i(x) = x^2 + y^2 + a_i x + b_i y + C$$

и линейно выражаются через три функции $x^2 + y^2 + C$, x, y. Так как уравнений четыре, то они линейно зависимы.

В обратную сторону. Из нормировки квадратичных частей следует, что в зависимости

$$\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) + \lambda_3 f_3(x) + \lambda_4 f_4(x) = 0$$

сумма $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0$. Пусть для определенности $\lambda_4 \neq 0$. Найдем точку p, в которой $f_1(p) = f_2(p) = f_3(p)$. Такая точка найдется, так как условия на точку p сводятся к линейной системе уравнений с ненулевым определителем (так как никакие два центра не лежат на одной прямой); иначе можно сказать, что p — радикальный центр первых трех окружностей. Тогда

$$f_4(p) = -\frac{\lambda_1 f_1(p) + \lambda_2 f_2(p) + \lambda_3 f_3(p)}{\lambda_4} = f_1(p) = f_2(p) = f_3(p),$$

кроме того, из условия следует, что p лежит вне всех четырех окружностей и длины касательных к четырем окружностям из p равны одному числу l. Тогда окружность с центром p и радиусом l перпендикулярна четырем данным.

2006.5.1. Пусть сначала A — выпуклый многоугольник $a_1 a_2 \dots a_n$. Множество $A_\varepsilon = \cup_{a \in A}(a + B_\varepsilon(0))$ получается, если в каждой вершине a_k взять шар $B_\varepsilon(a_k)$ и затем взять выпуклую оболочку $\cup_{1 \le k \le n}(a_k + B_\varepsilon(0))$ (т.е. наименьшее по включению выпуклое множество, содержащее объединение n шаров). Полученное множество A_ε отличается от A наличием n прямоугольников ширины ε, построенных на сторонах A вовне, а также n секторов круга радиуса ε, причем суммарная радианная мера всех секторов равна 2π, т.е. "в сумме" сектора дают круг.

Сумма площадей всех прямоугольников, секторов и самого множества A есть $S(A_\varepsilon) = S(A) + l(\partial A)\varepsilon + \pi\varepsilon^2$, где $l(\partial A)$ — длина границы A. Итак, для многоугольника A получаем

$$a = S(A), \quad b = l(\partial A), \quad c = \pi. \qquad (*)$$

Покажем, что формула $(*)$ верна и в случае произвольного выпуклого компакта A.

По условию $\partial A = \{r(s) \mid s \in [0, l(\partial A)]\}$, s — натуральная параметризация границы (на самом деле это верно для любого выпуклого компакта A). Для натурального n определим $r_k = r\left(\frac{k}{n} l(\partial A)\right)$, $1 \le k \le n$; Γ_n — ломаная с вершинами r_k, $k = 0, 1, \ldots, n$. По построению $|\Gamma_n| \to l(\partial A)$ при $n \to \infty$. Зафиксируем $s \in [\frac{k}{n} l(\partial A), \frac{k+1}{n} l(\partial A)]$. Расстояние от $r(s)$ до Γ_n есть $\varrho(r(s), \Gamma_n) \le \|r(s) - r_k\| \le \max\limits_{s \in [0, l(\partial A)]} \|r'(s)\| \cdot \frac{l(\partial A)}{n} = \varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$. Таким образом, если A_n — многоугольник, ограниченный Γ_n, то

$$A_n \subset A \subset \bigcup_{a \in A_n} (a + B_{\varepsilon_n}(0)),$$

следовательно,

$$S(A_n) \le S(A) \le S(A_n) + |\Gamma_n|\varepsilon_n + \pi\varepsilon_n^2 \le S(A_n) + 2l(\partial A)\varepsilon_n + \pi\varepsilon_n^2 \tag{$**$}$$

при всех достаточно больших n. Итак, $S(A_n) \to S(A)$, $|\Gamma_n| \to$ $\to l(\partial A)$.

Как и при выводе $(**)$ легко показать, что $\forall \varepsilon > 0$

$$(A_n)_\varepsilon \subset A_\varepsilon \subset \bigcup_{a \in (A_n)_\varepsilon} (a + B_{\varepsilon_n}(0))$$

и

$$S((A_n)_\varepsilon) \le S(A_\varepsilon) \le S((A_n)_\varepsilon) + 2l(\partial A_\varepsilon)\varepsilon_n + \pi\varepsilon_n^2$$

для достаточно больших n (здесь $\varepsilon_n = \max\limits_{s \in [0, l(\partial A_\varepsilon)]} \|r'(s)\| \cdot \frac{l(\partial A_\varepsilon)}{n}$). Переходя в равенстве $S((A_n)_\varepsilon) = S(A_n) + l(\partial A_n)\varepsilon + \pi\varepsilon^2$ к пределу при $n \to \infty$, получаем $S(A_\varepsilon) = S(A) + l(\partial A)\varepsilon + \pi\varepsilon^2$.

2006.5.2. Разобьем интеграл на два:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2} \exp\left(-\varrho(x, A)\right)\, dx = \int\limits_A e^0\, dx + \int\limits_{\mathbb{R}^2 \setminus A} \exp\left(-\varrho(x, A)\right)\, dx,$$

т.е. интеграл равен

$$S(A)+\int\limits_{\mathbb{R}^2\setminus A}\exp\left(-\varrho(x,A)\right)\,dx,$$

где $S(A)$ — площадь множества A. Множество точек, расстояние от которых до ∂A есть $\varepsilon>0$ — это граница множества $A_\varepsilon=\cup_{a\in A}\left(a+B_\varepsilon(0)\right)$, см. задачу для 1-го курса. Граница ∂A_ε есть гладкая кривая с длиной $l(\partial A_\varepsilon)=l(\partial A)+$ $+2\pi\varepsilon$. Отсюда

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2\setminus A}\exp\left(-\varrho(x,A)\right)\,dx=\int\limits_0^{+\infty}e^{-\varepsilon}(l(\partial A)+2\pi\varepsilon)\,d\varepsilon=l(\partial A)+2\pi=$$

$=5\pi-S(A)=4\pi$. Итак, $l(\partial A)=2\pi$ (и тем самым множество A есть круг радиуса 1).

Замечание. Две последние задачи затрагивают элементы теории смешанных объемов — красивого раздела геометрии. Подробности можно найти в книге [15].

2006.6. Пусть $\tilde{A}=\begin{pmatrix} B & -C\\ C & B\end{pmatrix}$. $\det\tilde{A}$ и $|\det A|^2$ есть многочлены от $N=2n^2$ переменных b_{jk} и c_{jk}. Пусть V — окрестность точки $\mathbb{R}^N$, такой, что $b_{jk}=0$ $\forall j,k$, $c_{jk}=0$ при $j\neq k$, $c_{kk}=k$, $1\le k\le n$. Соответствующая матрица $A=\operatorname{diag}\{i,2i,\ldots,ni\}$.

Если V — достаточно малая, то каждая матрица A, соответствующая точке из V, имеет n различных собственных значений. Пусть A — такая матрица, λ — одно из ее собственных значений, а z — соответствующий собственный вектор.

$$\tilde{A}\begin{pmatrix} z\\ -iz\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} B & -C\\ C & B\end{pmatrix}\begin{pmatrix} z\\ -iz\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} Az\\ -iAz\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix} z\\ -iz\end{pmatrix},$$

следовательно, λ — собственное значение $\tilde{A}$, а так как $\tilde{A}$ вещественна, то $\overline{\lambda}$ — тоже собственное значение $\tilde{A}$. Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — различные собственные значения A. Тогда $\lambda_1, \overline{\lambda_1}, \ldots, \lambda_n, \overline{\lambda_n}$ — различные собственные значения $\tilde{A}$ и в окрестности V выполнено $|\det A|^2 = \prod\limits_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot \overline{\lambda_k} = \det \tilde{A}$. Поскольку многочлены $|\det A|^2$ и $\det \tilde{A}$ совпадают на открытом множестве V, то они тождественно равны.

ОЛИМПИАДА — 2007

2007.1. Пусть $x \in C$, тогда $f(x) \le \|x - y\| + f(y)$ для любого $y \in C$, поэтому $f(x) \le \inf\limits_{y \in C}(\|x-y\| + f(y)) = g(x)$. Так как $g(x) \le \|x - x\| + f(x) = f(x)$, то $g(x) = f(x)$.

Пусть $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ и $g(x_1) \le g(x_2)$. Для любого $\varepsilon > 0$ найдется $y_1 \in C$: $g(x_1) > \|x_1 - y_1\| + f(y_1) - \varepsilon$. Отсюда и из неравенства $g(x_2) \le \|x_2 - y_1\| + f(y_1)$ следует, что

$$g(x_2) - g(x_1) \le \|x_2 - y_1\| - \|x_1 - y_1\| + \varepsilon \le \|x_1 - x_2\| + \varepsilon.$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ получаем $g(x_2) - g(x_1) \le \|x_1 - x_2\|$.

Замечание. Вопрос о липшицевом продолжении функции весьма важен. В данной задаче предъявлена явная формула для такого продолжения. О более общей ситуации можно найти в [13, § 8].

2007.2.1. Так как

$$x_n - x_{n-1} = -\frac{1}{n}\,(x_{n-1} - x_{n-2}) = \cdots = \frac{x_0 - x_1}{n!}(-1)^n,$$

то

$$\lim x_n = x_0 + \sum_{n \ge 1}(x_n - x_{n-1}) = x_0 + (x_0 - x_1)\sum_{n \ge 1}\frac{(-1)^n}{n!} =$$

$$= a + (a - b)(e^{-1} - 1).$$

2007.2.2. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Пусть $\frac{a_1+\dots+a_n}{n} = a + \varepsilon_n$, $a \in \mathbb{R}$, $\varepsilon_n \to 0$.

Напомним признак Абеля: пусть α_n и β_n последовательности, $B_n = \beta_1 + \dots + \beta_n$ и пусть последовательность $\{\alpha_n B_n\}$ сходится. Тогда ряды $\sum \alpha_n\beta_n$ и $\sum(\alpha_n - \alpha_{n+1})B_n$ сходятся или расходятся одновременно.

Применим признак Абеля к $\alpha_n = \frac{1}{n^{1+\varepsilon}}$, $\beta_n = a_n$. Тогда $B_n = na + n\varepsilon_n$, $\alpha_n B_n = \frac{a+\varepsilon_n}{n^\varepsilon} \to 0$. Поэтому ряд из условия задачи имеет тот же тип сходимости, что и ряд

$$\sum \left(\frac{1}{n^{1+\varepsilon}} - \frac{1}{(n+1)^{1+\varepsilon}}\right)(a+\varepsilon_n)n,$$

который сходится по признаку сравнения (n-й член асимптотически равен $\frac{1+\varepsilon}{n^{1+\varepsilon}}(a+\varepsilon_n)$).

2007.3.1. Лемма. Пусть векторы a, b не параллельны. Тогда $\exists\varepsilon > 0$: $\forall x \in B_\varepsilon(a)$, $\forall y \in B_\varepsilon(b)$ векторы x и y не параллельны.

Доказательство. Допустим противное: $\forall k\ \exists x_k \in B_{1/k}(a)$ и $\exists y_k \in B_{1/k}(b)$: x_k и y_k параллельны. Так как $a, b \neq 0$, то $x_k, y_k \neq 0$ (для достаточно больших номеров k) и $\lambda_k x_k + y_k \neq 0$ для $\lambda_k = \pm\|y_k\|/\|x_k\|$ (для одного из знаков). В силу сходимости $x_k \to a$, $y_k \to b$ получаем в пределе $\lambda a + b = 0$, где $\lambda = \lim\lambda_k = \pm\|b\|/\|a\|$. Противоречие.

Пусть P_k — последовательность параллелограммов с вершинами $\{x_k^i\}_{i=1}^4$ таких, что $B \subset P_k$ для всех k и

$$\lim S(P_k) = S = \inf\{S(P) \mid P - \text{параллелограмм},\ B \subset P\}. \quad (*)$$

Поскольку $\{P_k\}$ ограничена, то можем считать $\lim x_k^i = x^i$, $1 \le i \le 4$. В силу леммы точки $\{x^i\}_{i=1}^4$ являются вершинами параллелограмма P, на котором в силу непрерывности площади достигается значение S в (*). Покажем, что середины сторон P являются точками из B.

Допустим противное. Пусть O — центр симметрии B (и P), $y = \frac{1}{2}(x^1+x^2)$. Пусть $[x^1, x^2] \cap B = [a, b]$ (в силу выпуклости B)

и $y \notin [a,b]$. Тогда $\exists \varepsilon > 0$: $[a,b] \cap B_\varepsilon(y) = \emptyset$. Пусть $[a,b] \subset [x^1, y]$, $y_\varepsilon = y + \frac{\varepsilon}{2}\frac{x^1 - x^2}{\|x^1 - x^2\|}$. Из-за выпуклости B выполнено $[y_\varepsilon, x^2] \cap B = \emptyset$, поэтому (в силу компактности множеств в последнем равенстве) $\exists \delta > 0$: δ-окрестность $[y_\varepsilon, x^2]$ не пересекает B.

Пусть $z = x^2 + \frac{\delta}{2}\frac{x^3 - x^2}{\|x^3 - x^2\|}$. По построению $[y_\varepsilon, z] \cap B = \emptyset$. Пусть w — пересечение прямой $\operatorname{aff}\{y_\varepsilon, z\}$ с прямой $\operatorname{aff}\{x^1, x^4\}$. Пусть w' и z' — точки, симметричные точкам w и z относительно точки O. Так как площадь треугольника wx^1y_ε строго меньше площади треугольника zx^2y_ε, то параллелограмм $wzw'z'$ содержит B (в силу центральной симметрии) и имеет площадь меньшую, чем P.

Замечание. Из этой задачи следует, что если за единичный шар на плоскости взять множество B, то его периметр будет не более 8.

2007.3.2. Очевидно решение (если существует) бесконечно дифференцируемо на $\mathbb{R}$ и

$$x^{(k)}(t) = \frac{1}{2^k}x^{(k-1)}(t/2) + e^t,$$

в частности

$$x^{(k)}(0) = \frac{1}{2^k}x^{(k-1)}(0) + 1$$

и по индукции $0 \le x^{(k)}(0) \le 2$ для всех натуральных k.

Зафиксируем $M > 0$ и отрезок $[-M, M]$. Пусть $C = e^M$. Так как $x(\cdot) \in C^\infty([-M, M])$, то найдется $L_k > 0$:

$$|x^{(k)}(t_1) - x^{(k)}(t_2)| \le L_k \cdot |t_1 - t_2|, \qquad \forall t_1, t_2 \in [-M, M].$$

$$|x^{(k)}(t_1) - x^{(k)}(t_2)| \le |x^{(k-1)}(t_1/2) - x^{(k-1)}(t_2/2)| + |e^{t_1} - e^{t_2}| \le \\ \le \frac{L_{k-1}}{2}|t_1 - t_2| + C|t_1 - t_2|,$$

т.е. можно считать $L_k \le \frac{L_{k-1}}{2} + C$. Продолжая спуск по k, получим $L_k \le L_0 + 2C$. Отсюда и из $0 \le x^{(k)}(0) \le 2$ следует, что $x^{(k)}(t)$ равномерно ограничены на отрезке $[-M, M]$. В силу произвольности $M > 0$ функция $x(t)$ представима своим рядом Тейлора $x(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ на числовой оси. Можно подставить ряд в уравнение и найти коэффициенты $a_0 = 1 = x(0)$,

$$a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)\cdot 2^n}\, a_n + \frac{1}{(n+1)!}.$$

Замечание. Весьма полезно бывает искать решение в виде рядов. Часто выручает теорема: *если правая часть обыкновенного дифференциального уравнения есть функция аналитическая по всем переменным, то и решение — аналитическая функция.*

2007.4. 1. Рассмотрим рациональную функцию $r(x) = \dfrac{x^k}{f(x)}$ и разложим ее в сумму элементарных. Разложение будет иметь вид

$$r(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{x - x_i}.$$

Из того, что $k \leq n-2$ следует, что

$$\lim_{x\to\infty} x r(x) = 0,$$

откуда получаем, что $\sum_{i=1}^{n} c_i = 0$. Осталось заметить, что

$$c_i = \lim_{x\to x_i} (x - x_i) r(x) = \frac{x_i^k}{f'(x_i)}.$$

2. Это решение для тех, кто знаком с элементами теории функции комплексной переменной. Функция $g(z) = z^k/f(z)$ при $k \leq n-2$ имеет равный нулю вычет в бесконечно удаленной точке, т.к. $g(z) \sim \frac{1}{z^{n-k}}$ при $z \to \infty$. Осталось заметить, что $\mathrm{res}_{z=x_i} g(z) = \frac{x_i^k}{f'(x_i)}$, а сумма всех вычетов равна нулю.

2007.5. Пусть x — вершина A. Если $x = 0$, то взяв m линейно независимых столбцов матрицы T (ранг T равен m) в качестве $T_1,\ldots,T_m$, получаем требуемое условие.

Пусть $x \in A\setminus\{0\}$ — вершина. Ясно, что можно так занумеровать компоненты x, что $x_1 > 0,\ldots,x_r > 0$, а $x_k = 0$ при $r+1 \le k \le n$.

Покажем, что в сумме

$$Tx = \sum_{k=1}^{r} T_k x_k + \sum_{k=r+1}^{n} T_k x_k$$

столбцы $\{T_k\}_{k=1}^r$ линейно независимы. Это завершит доказательство.

Допустим, $\{T_k\}_{k=1}^r$ линейно зависимы, тогда найдется вектор $a \in \mathbb{R}^n$: $a = (\alpha_1,\ldots,\alpha_r,0,\ldots,0) \neq 0$, такой, что $\sum\limits_{k=1}^{r} T_k\alpha_k = 0$. Выберем $\varepsilon > 0$ так, чтобы для любого k от 1 до r выполнялись неравенства $x_k \pm \varepsilon\alpha_k \ge 0$. Имеем

$$\begin{aligned} T(x \pm \varepsilon a) &= \sum_{k=1}^{r} T_k(x_k \pm \varepsilon\alpha_k) + \sum_{k=r+1}^{n} T_k x_k = \\ &= \sum_{k=1}^{r} T_k x_k \pm \varepsilon \sum_{k=1}^{r} T_k\alpha_k = b, \end{aligned}$$

следовательно, $[x - \varepsilon a, x + \varepsilon a] \subset A$ и, значит, x не является вершиной. Противоречие.

Замечание. Этот факт очень важен в линейном программировании, см. [14, Гл. 2].

2007.6. 1. Поскольку внутренность всех трех множеств непуста, то считаем, что $0 \in \mathrm{int}A$, $0 \in \mathrm{int}B$, $0 \in \mathrm{int}C$ (если это не так, сдвинем множества на соответствующие векторы).

Для единичного вектора $p \in \mathbb{R}^2$ определим точку x_p^A — та (единственная!) точка множества A, в которой достигается максимум скалярного произведения (p,x) по всем $x \in A$. Аналогичный смысл будут нести x_p^B для множества B и x_p^C для множества C.

Пусть S — единичная окружность с центром в нуле. Покажем, что отображение $S \ni p \to x_p^A$ непрерывно. Допустим противное: $\exists\varepsilon > 0$ и $p_k \to p_0$ — единичные векторы, причем $x^A_{p_k} \notin B_\varepsilon(x^A_{p_0})$. Тогда в силу компактности можем считать, что $x^A_{p_k} \to x_0 \in \partial A \backslash B_\varepsilon(x^A_{p_0})$. Точки x_0 и $x^A_{p_0}$ дают максимум скалярного произведения (p_0, x) по $x \in A$, поэтому отрезок $[x_0, x^A_{p_0}] \subset \partial A$, что противоречит тому, что граница A не содержит отрезков.

Пусть $(\lambda(t), \varphi(t))$ — компоненты кривой Пеано, отображающей (непрерывно) $[0,1]$ в прямоугольник $[0,1]_\lambda \times [0,2\pi]_\varphi$. Пусть $p(t) = (\cos\varphi(t), \sin\varphi(t))$.

Поскольку $\lambda x^A_p + \lambda x^B_p = \lambda x^C_p$ для всех $p \in S$, $\lambda \in [0,1]$ и $C = \{\lambda x^C_p \mid \lambda \in [0,1],\, p \in S\}$, то $a(t) = \lambda(t) x^A_{p(t)}$, $b(t) = \lambda(t) x^B_{p(t)}$.

2. Доказательство можно несколько упростить, если использовать тот факт, что все выпуклые компакты одной размерности гомеоморфны, см. [12] Т. 1, предложение 11.3.1.

Пусть $K = [0,1]^2$, $\varphi : K \to A$ — гомеоморфизм, переводящий K в A, $\psi : K \to B$ — гомеоморфизм, переводящий K в B. Пусть $(x(\tau), y(\tau))$ — компоненты стандартной непрерывной кривой Пеано. Тогда очевидно

$$\{\varphi(x(\tau), y(\tau)) + \psi(x(\mu), y(\mu)) \mid (\tau, \mu) \in K\} = C.$$

Выберем теперь $\tau = x(t)$, $\mu = y(t)$, тогда $a(t) = \varphi(x(x(t)), y(y(t)))$, $b(t) = \psi(x(x(t)), y(y(t)))$.

Замечание. Эта задача сообщена нам П.В. Семеновым. Вот близкий вопрос, ответ на который в общем случае нам пока не известен. Пусть A, B, C — произвольные выпуклые компакты из $\mathbb{R}^n$ и $A + B = C$. Верно ли, что существуют непрерывные функции $a : C \to A$, $b : C \to B$ такие, что $\forall c \in C$ выполнено $a(c) + b(c) = c$? Для P-множеств [14, §1.8] ответ утвердителен.

Пояснение к списку литературы.

Приведенный ниже список не претендует на полноту.

Книгу [4] мы рекомендуем для первого знакомства с предметом математического анализа, а книги [5] и [6] для более искушенного читателя. В книге [7] замечательная подборка задач по анализу.

В книге [8] рассмотрены многие классические теоремы о многочленах.

Книга [9] — классический и очень полный учебник по аналитической геометрии и линейной алгебре, а [10] — по теории матриц. Книга [11] — классический учебник по алгебре.

Двухтомник [12] написан как эссе. Порешайте задачи, которыми заканчивается каждый раздел и посмотреть очень полный (на 1984 год) список литературы по геометрии во втором томе.

Обзор [13] посвящен знаменитой теореме Хелли о выпуклых телах с общими точками и ее приложениях в различных задачах геометрии и анализа. Содержит большое количество задач, многие из которых не решены до сих пор.

В книге [14] содержится изложение выпуклого анализа и рассматривается его применение в разных областях математики. Значительная часть книги [15] посвящена изопериметрическим неравенствам и теории смешанных объемов. В книгах [17], [18] изложены дифференциальные уравнения; [19] — учебник по функциональному анализу для начинающих; [20] — классическая монография по нелинейному анализу.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Садовничий В.А., Подколзин А.С. Задачи студенческих математических олимпиад. М.: Наука, 1980.

[2] Садовничий В.А., Григорьян А.А., Конягин С.В. Задачи студенческих математических олимпиад. М.: Изд. МГУ, 1987.

[3] http://www.imc-math.org/ — сайт международной математической олимпиады студентов университетов.

[4] Яковлев Г.Н. Лекции по математическому анализу (в 3-х томах). М.: Физматлит, 2004.

[5] Рудин У. Основы математического анализа. М.: Мир, 1976.

[6] Бурбаки Н. Функции действительного переменного. М.: Наука, 1965.

[7] Макаров Б.М., Голузина М.Г., Лодкин А.А., Подкорытов А.Н. Избранные задачи по вещественному анализу. М.: Наука, 1992.

[8] Прасолов В.В. Многочлены. М.: Изд. МЦНМО, 2003.

[9] Александров П.С. Лекции по аналитической геометрии и линейной алгебры. Части 1, 2. М.: Наука, 1968.

[10] Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Наука, 1967.

[11] Курош А.Г. Курс высшей алгебры. М.: Наука, 1975.

[12] Берже М. Геометрия, Т. 1, 2. М.: Мир, 1984.

[13] Данцер Л., Грюнбаум Б., Кли В. Теорема Хелли. М.: Мир, 1968.

[14] Половинкин Е.С., Балашов М.В. Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа. М.: Физматлит, 2004.

[15] Лейхтвейс К. Выпуклые множества. М.: Наука, 1985.

[16] Стечкин С.Б. Избранные труды. М.: Физматлит, 1998.

[17] Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970.

[18] Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. 8-е изд. М.: Гостехиздат, 1959.

[19] Колмогоров А.Н, Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1972.

[20] Обен Ж.-П., Экланд И. Прикладной нелинейный анализ. М.: Мир, 1988.

Содержание