Решения олимпиады ПМФ, математика, 16 мая 2010

1. (2) Пусть функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ дифференцируема. Доказать, что найдется точка $t \in [0, 1]$ такая, что

$$f(1) - f(0) = \frac{\pi}{2}\sqrt{1 - t^2}\, f'(t).$$

Решение: Рассмотреть функцию $g(x) = f(\sin x)$, $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, и применить теорему Лагранжа о среднем.

2. (2) Исследовать на сходимость при всех значениях параметра $\alpha \in \mathbb{R}$ несобственный интеграл

$$\int\limits_0^{+\infty} x^\alpha \sin\left(e^x\right)\, dx\,.$$

Ответ: $\alpha \in \left\{ \begin{array}{lcl} (-\infty, -1] & – & \text{расходится,} \\ (-1, +\infty) & – & \text{сходится (условно).} \end{array} \right.$

3. (2) Исследовать на поточечную и равномерную сходимость функциональный ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} \frac{x}{k}}{x + k}$$

на множествах $E_1 = (0, 1)$ и $E_2 = (1, +\infty)$.

Ответ: сходится равномерно на E_1 и неравномерно на E_2.

4. (2) Функцию $f(x, y) = |y| \sin x$ исследовать на дифференцируемость в $\mathbb{R}^2$.

Ответ: дифференцируема в $\mathbb{R}^2 \setminus \{\ (x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\ \}$ и в $(\pi k, 0)$ для $k \in \mathbb{Z}$.

5. (4) Пусть $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ равномерно непрерывна. Верно ли что

а)(2) $\frac{f(x)}{x}$ ограничена;

б)(2) существует $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$.

Решение. Ответ: (а) — да, (б) — нет.

Для доказательства первого пункта возьмём некоторые ε и δ из определения равномерной непрерывности. Разбив отрезок $[1, x]$ на отрезки длиной $< \delta$ (их понадобится не более $\frac{x}{\delta}$) получим, что $|f(x)| < |f(1)| + \frac{x\varepsilon}{\delta}$, следовательно

$$\left|\frac{f(x)}{x}\right| < |f(1)| + \frac{\varepsilon}{\delta}.$$

Во втором пункте рассмотрим функцию $f(x) = x \sin \ln x$, тогда её производная

$$f'(x) = \sin \ln x + \cos \ln x$$

ограничена, следовательно $f(x)$ равномерно непрерывна. Но $\frac{f(x)}{x} = \sin \ln x$ не имеет предела на бесконечности.

6. (10) Пусть $A = \|a_{ij}\|_{1\le i,j\le n}$ — положительно определенная симметричная матрица. Доказать, что

$$\det A \le \prod_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Решение. Рассмотрим ортонормированный базис $e_1, \ldots, e_n$, в котором $\prod_{i=1}^{n} a_{ii}$ минимально (здесь и далее a_{ij} — элементы матрицы A в базисе $e_1, \ldots, e_n$). Рассмотрение всякого диагонального минора 2×2 нашей матрицы на пересечении строк i, j со столбцами i, j и непосредственные вычисления показывают, что если недиагональный элемент a_{ij} не равен нулю, то $a_{ii}a_{jj}$ можно уменьшить до $a_{ii}a_{jj} - a_{ij}^2$, повернув вектора e_i, e_j базиса в плоскости $\langle e_i, e_j\rangle$ на некоторый угол. Значит в этом базисе матрица имеет диагональный вид и неравенство обратилось в равенство.

Другое решение

Пусть A — матрица Грама некоторой системы n-мерных векторов. Тогда $\det A$ — это квадрат объёма n-мерного параллелепипда, натянутого на эти векторы, а $\prod a_{ii}$ — это квадрат произведения длин этих векторов. Осталось заметить, что объём не превосходит произведения длин рёбер.

7. (10) Найти все непрерывно дифференцируемые на отрезке $[0, \pi/2]$ функции $y(x)$, удовлетворяющие условиям $y(0) = 0$ и

$$\int_0^{\pi/2} (y'(x))^2\, dx = \int_0^{\pi/2} 2y(x)\sin x\, dx - \frac{\pi}{4}.$$

Решение.

$$\int_0^{\pi/2} 2y(x)\sin x\, dx = -2y(x)\cos x\Big|_{x=0}^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} 2y'(x)\cos x\, dx = \int_0^{\pi/2} 2y'(x)\cos x\, dx.$$

С учетом равенства $\frac{\pi}{4} = \int_0^{\pi/2} \cos^2 x\, dx$, получаем, что уравнение принимает вид

$$\int_0^{\pi/2} \left((y'(x))^2 - 2y'(x)\cos x + \cos^2 x\right)\, dx = \int_0^{\pi/2} \left(y'(x) - \cos x\right)^2\, dx = 0,$$

откуда в силу непрерывности функции $y'(x) - \cos x$ получаем, что $y'(x) = \cos x$. Следовательно, $y(x) = \sin x + C$. С учетом условия $y(0) = 0$ получаем, что $C = 0$ и $y(x) = \sin x$.

Другое решение

Продолжим решение $y(x)$ на отрезок $[\pi/2, \pi]$ по формуле $y(x) = y(\pi - x)$. Полученную функцию продолжим нечетно на отрезок $[-\pi, 0]$. Ряды Фурье (продолженных) функций $y(x)$ и $y'(x)$ имеют вид

$$y(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx, \qquad y'(x) \rightsquigarrow \sum_{k=1}^{\infty} k b_k \cos kx.$$

Используя равенство Парсеваля и равенство $y'(x) = -y'(\pi - x)$ при $x \in [0, \pi/2]$, получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k^2 = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} y^2(x)\, dx, \quad \sum_{k=1}^{\infty} k^2 b_k^2 = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} (y'(x))^2\, dx,$$

откуда

$$\int_0^{\pi/2} y^2(x)\, dx \le \int_0^{\pi/2} (y'(x))^2\, dx = \int_0^{\pi/2} 2y(x) \sin x\, dx - \frac{\pi}{4} = \int_0^{\pi/2} (2y(x) \sin x - \sin^2 x)\, dx,$$

$$\int_0^{\pi/2} \left(y(x) - \sin x\right)^2\, dx \le 0.$$

Итак, решение с необходимостью равно $\sin x$. Проверка показывает, что $y(x) = \sin x$ — решение.

Отметим, что по ходу решения мы доказали неравенство Виртингера:
$\int\limits_0^{\pi/2} y^2(x)\, dx \le \int\limits_0^{\pi/2} (y'(x))^2\, dx$ для любой функции $y(x) \in C^1[0, \pi/2]$, $y(0) = 0$.

8. (10) Пусть $\varepsilon > 0$ и заданы единичные векторы $\{p_i\}_{i=1}^I$ из $\mathbb{R}^n$ и неотрицательные числа $\{\alpha_i\}_{i=1}^I$, такие, что $\|p_i - p_j\| < \varepsilon$ для всех $1 \le i, j \le I$ и $\sum\limits_{i=1}^{I} \alpha_i = 1$. Доказать, что вектор

$$p = \sum_{i=1}^{I} \alpha_i p_i$$

удовлетворяет оценке

$$1 - \frac{1}{2}\varepsilon^2 \le \|p\| \le 1.$$

Решение. Правая оценка очевидна в силу неравенства треугольника. Условие $\|p_i - p_j\| < \varepsilon$ равносильно условию $(p_i, p_j) = \frac{1}{2}(\|p_i\|^2 + \|p_j\|^2 - \|p_i - p_j\|^2) > 1 - \varepsilon^2/2$. Но тогда $1 \ge \|p\| \ge \|p\|^2 = \sum_{i,j} \alpha_i \alpha_j (p_i, p_j) \ge (1 - \varepsilon^2/2) \sum_{i,j} \alpha_i \alpha_j = 1 - \varepsilon^2/2$.

9. (15) Функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ отображает всякий интервал на интервал. Верно ли, что она непрерывна? Под интервалом понимается связное открытое подмножество $\mathbb{R}$ (не обязательно ограниченное).

Решение. Нет, не обязательно.

Рассмотрим канторово множество $K \subset \mathbb{R}$, или любое другое замкнутое множество без изолированных точек и с пустой внутренностью. Определим $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ так, чтобы она была равна нулю на K. Дополнение $\mathbb{R} \setminus K$ является объединением счётного множества непересекающихся интервалов

$$\mathbb{R} \setminus K = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n,$$

на каждом I_n определим f так, чтобы она отображала I_n на $\mathbb{R}$ непрерывно и монотонно.

Тогда для всякого интервала (a, b) имеем следующее. Либо (a, b) не пересекается с K, и тогда он непрерывно взаимно однозначно отображается на интервал. Либо он содержит не менее двух точек K (из-за отсутствия изолированных точек K) и тогда он полностью содержит некоторый I_n (из-за пустой внутренности K), и отображается на $\mathbb{R}$.

Очевидно, что функция f разрывна в любой точке множества K.

Другое решение

Введём на $\mathbb{R}$ отношение эквивалентности $a \sim b \iff a - b \in \mathbb{Q}$. Множество классов эквивалентности имеет мощность континуум (докажите это в качестве упражнения); рассмотрим отображение f — биекцию полученных классов эквивалентности на $\mathbb{R}$. Пусть отображение h ставит в соответствие каждой точке $x \in \mathbb{R}$ тот класс $h(x)$, в который точка x входит. Тогда $g(x) = f(h(x)) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и будет нашей функцией. Поскольку прообраз каждой точки из $\operatorname{Im} g = \mathbb{R}$ всюду плотен в $\mathbb{R}$, то функция g отображает любой интервал на всё $\mathbb{R}$.

10. (25) Пусть W — некоторое множество, а E — некоторое семейство его 6-элементных подмножеств. Пусть количество элементов семейства $|E| = s$. Верно ли, что обязательно найдётся раскраска элементов W в два цвета, при которой всякое множество $e \in E$ содержит элементы обоих цветов? Ответьте на вопрос при:

а)(5) $s = 32$;

б)(5) $s = 462$;

в)(15) $s = 147$.

Решение. Пункт (а). Покрасим каждый из элементов в один из двух цветов с вероятностью $1/2$. При этом вероятность того, что данное 6-элементное подмножество $e \in E$ покрашено одноцветно, равна $1/32$. Заметим, что события «e_1 покрашено в один цвет» и «e_2 покрашено в один цвет» всегда могут произойти одновременно, следовательно для вероятности можно написать строгое неравенство

$$P(\text{никакое } \ e \in E \text{ не одноцветно}) > 1 - s/32 = 0,$$

значит требуемые раскраски существуют.

Пункт (б). Пусть W — 11-элементное множество, а E — все его 6-элементные подмножества, $|E| = 462$. Очевидно, в этом случае требуемой раскраски не существует, так как какой-то из цветов всегда содержит ≥ 6 вершин, которые содержат элемент E по определению.

Пункт (в). Заметим, что в множестве из 7 элементов $N_7 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ можно выбрать систему E' из семи 3-элементных подмножеств $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 4, 5\}$, $\{1, 6, 7\}$, $\{2, 4, 6\}$, $\{2, 5, 7\}$, $\{3, 4, 7\}$, $\{3, 5, 6\}$ так, что при любой раскраске элементов в 2 цвета найдётся одноцветное подмножество. Это нетрудно проверить, учитывая симметрию данного набора.

Теперь предъявим систему E из 147 6-элементных подмножеств множества $\{a, b, c\} \times N_7$, обладающих тем же свойством. Для произвольных $A, B \in E'$ включим в E множества вида $\{x\} \times A \cup \{y\} \times B$, где $x, y \in \{a, b, c\}$, $x \neq y$. Тогда для любой раскраски элементов, в каждом из «слоёв» $\{x\} \times N_7$ найдётся одноцветное множество $\{x\} \times A_x$, $A_x \in E'$. Два из этих трёх (при $x = a, b, c$) множеств будут иметь одинковые цвета; значит, их объединение будет одноцветным (и принадлежит E).

Наконец, в E оказалось $3 \cdot 7^2 = 147$ подмножеств, что и требовалось.

Замечание 1. Пример в первом абзаце — это проективная плоскость над Z_2.

Замечание 2. Аналогично можно доказать более общее утверждение. Введём определение: r-гиперграфом называется набор r-элементных подмножеств (это рёбра E) множества V (вершины). Пусть $m(r)$ — минимальное количество рёбер r-гиперграфа, который нельзя окрасить в 2 цвета, не получив одноцветного ребра. Докажем лемму (Abbot, Moser).

Лемма. Имеет место неравенство

$$m(rt) \leq m(r)m(t)^r.$$

Лемма доказывается так. Пусть r-гиперграф с вершинами U и рёбрами G имеет $m(r)$ рёбер, t-гиперграф с вершинами W и рёбрами F имеет $m(t)$ рёбер, и ни один из них не красится в два цвета.

В качестве множества вершин нового гиперграфа рассмотрим произведение $V = U \times W$, обозначим проекцию $\pi : U \times W \to U$. Набор из rt элементов $e \subseteq V$ назовём ребром ($e \in E$) если $\pi(e) \in G$ и

$$\forall u \in \pi(e)\ \pi^{-1}(u) = \{u\} \times f,\ \text{где } f \in F.$$

Очевидно, что $|E| = m(r)m(t)^r$. Предположим теперь, что V раскрашено в два цвета. Из неокрашиваемости F следует, что для всякого $u \in U$ найдётся $f(u) \in F$, такой что $\{u\} \times f(u)$ одноцветно. «Условно окрасим» u в цвет данного $f(u)$. Из неокрашиваемости G следует, что найдётся набор $g \in G$ из r таких u, условно окрашенных в один и тот же цвет. Тогда ребро

$$e = \bigcup_{u \in g} \{u\} \times f(u)$$

одноцветно и лемма доказана.

Теперь ответ «нет» на пункт (в) следует из утверждений:

- $m(2) = 3$ — это очевидно;
- $m(3) \leq 7$ — это следует из рассмотрения проективной плоскости на 7 точках и разбора пары случаев;
- по Лемме $m(6) \leq 3 \cdot 7^2 = 147$.