ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ — 2009

WEB TOUR

1. Две вещественные квадратные матрицы коммутируют, т.е.

$$AB = BA. \tag{1}$$

Доказать, что

$$\det\left(A^2+B^2\right) \geq 0. \tag{2}$$

Верно ли утверждение (2) без условия (1)?

Решение. Если $AB = BA$, то $A^2+B^2 = (A+iB)(A-iB)$, $i=\sqrt{-1}$. Пусть $z = \det(A+iB)$. Тогда $\det(A-iB) = \overline{z}$ (комплексное сопряжение z) и $\det\left(A^2+B^2\right) = z\overline{z} = |z|^2 \geq 0$.

Если (1) не выполнено, то (2) не верно. Пример

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^2+B^2 = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad \det\left(A^2+B^2\right) = -12.$$

2. Дан многогранник $P \subset \mathbb{R}^3$. Доказать, что существует треугольник, длины сторон которого равны длинам трех разных ребер многогранника P.

Решение. Лемма. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — положительные вещественные числа такие, что $x_1 \leq x_2$ и $x_{i-1} + x_i \leq x_{i+1}$ для $i = 2, \ldots, n-1$. Тогда

$$x_{i_1} + x_{i_2} + \cdots + x_{i_k} \leq x_n \qquad \text{для всех} \quad 1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n-2.$$

Доказательство леммы. Достаточно доказать, что $x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-2} \leq x_n$.

Если n — четно, то

$$(x_1+x_2) + (x_3+x_4) + \cdots + (x_{n-3}+x_{n-2}) \leq x_3 + x_5 + \cdots + x_{n-1} \leq$$

$$\leq (x_4+x_5)+x_7+\cdots+x_{n-1} \leq (x_6+x_7)+x_9+\cdots+x_{n-1} \leq \cdots \leq x_{n-2}+x_{n-1} \leq x_n.$$

Если n — нечетно, то (с учетом предыдущих формул)

$$(x_1+x_2) + (x_3+x_4) + \cdots + (x_{n-4}+x_{n-3}) + x_{n-2} \leq x_{n-1} + x_{n-2} \leq x_n.$$

Лемма доказана.

Пусть ребра P равняются по длине $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$. Если из них нельзя сложить ни одного треугольника, то $x_1 \leq x_2 < x_3 < \cdots < x_n$ (иначе, если $x_i = x_{i+1}$ при $i > 1$, то x_1, x_i, x_{i+1} образуют треугольник) и $x_{i-1} + x_i \leq x_{i+1}$ для $i = 2, \ldots, n-1$. Итак, $x_1, \ldots, x_n$ удовлетворяют условиям леммы.

Рассмотрим две грани P с общим ребром x_n. Тогда

$$x_{i_1} + x_{i_2} + \dots + x_{i_k} > x_n, \qquad x_{j_1} + x_{j_2} + \dots + x_{j_p} > x_n,$$

$i_1 < i_2 < \dots < i_k$, $j_1 < j_2 < \dots < j_p$ (i_m и j_l номера ребер этих граней). Из леммы следует, что $i_k = j_p = n - 1$, т.е. указанные две грани имеют еще одно общее ребро номер $n - 1$.

В случае, если многогранник P выпуклый, доказательство закончено, поскольку две грани выпуклого многогранника могут иметь не более одного общего ребра.

Рассмотрим случай невыпуклого многогранника P.

Пусть $q = 1$.

Если ребра $x_{n-q}, \dots, x_n$ не лежат на одной прямой, получаем противоречие.

Если ребра $x_{n-q}, \dots, x_n$ лежат на одной прямой, то рассмотрим набор из $n - q$ чисел $x_1 \le x_2 < x_3 < \dots < x_{n-q-1} < x_{n-q} + \dots + x_n$. Обозначив сумму $x_{n-q} + \dots + x_n$ через $\tilde{x}_{n-q}$ и повторяя предыдущие рассуждения, получим

$$x_{i_1} + x_{i_2} + \dots + x_{i_{k-q}} > \tilde{x}_{n-q}, \qquad x_{j_1} + x_{j_2} + \dots + x_{j_{p-q}} > \tilde{x}_{n-q},$$

$i_1 < i_2 < \dots < i_{k-q}$, $j_1 < j_2 < \dots < j_{p-q}$. Из леммы следует, что $i_{k-q-1} = j_{p-q-1} = n - q - 1$. Следовательно рассмотренные выше грани имеют общие ребра: $x_{n-q-1}, \dots, x_n$.

Заменяя $q = q + 1$ и продолжая спуск по описанной выше процедуре, мы получим, что для некоторого q рассмотренные выше грани имеют общее ребро x_{n-q}, которое не лежит на прямой, содержащей ребро x_n. Противоречие.

3. Разложить функцию

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \ge 0, \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

в ряд Фурье по тригонометрической системе 1, $\cos kx$, $\sin kx$, $k = 1, 2, \dots$ на отрезке $[-\pi, \pi]$. Построить график суммы ряда. Сходится ли ряд равномерно на интервале $(0, \pi)$?

Решение. Вычисляя коэффициенты Фурье, получаем $a_k = 0$, $b_k =$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} (-1) \sin kx \, dx + \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} \sin kx \, dx = \frac{2}{\pi} \frac{1 - \cos \pi k}{k} = \begin{cases} 0, & k = 2m, \\ \frac{4}{\pi} \frac{1}{2m-1}, & k = 2m - 1. \end{cases}$$

Итак, ряд Фурье

$$f(x) \rightsquigarrow \frac{4}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin(2m-1)x}{2m-1}.$$

По признаку Ди́ни сумма $S(x)$ ряда Фурье есть 2π-периодичная функция

$$S(x) = \begin{cases} 1, & x \in (0, \pi), \\ -1, & x \in (-\pi, 0), \\ 0, & x = 0,\ x = \pm\pi. \end{cases}$$

Фиксируем любое натуральное n. Пусть $x = \frac{\pi}{8n} \in (0, \pi)$. При всех $n + 1 \le m \le 2n$ выполнены неравенства $\frac{\pi}{4} \le (2m-1)x \le \frac{\pi}{2}$, откуда

$$\sum_{m=n+1}^{2n} \frac{\sin(2m-1)x}{2m-1} \ge \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{m=n+1}^{2n} \frac{1}{2m-1} \ge \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{n}{4n-1} \ge \frac{1}{4\sqrt{2}}.$$

Таким образом, не выполняется критерий Коши равномерной сходимости.