РЕШЕНИЯ

1 КУРС

Задача 1. Пусть A, B — два непустых подмножества $\mathbb{R}$, причём $A \cap \overline{B} = \emptyset$ и $B \cap \overline{A} = \emptyset$ (черта означает замыкание). Доказать, что найдутся два непересекающихся открытых множества $U, V \subset \mathbb{R}$, такие что $U \supseteq A$, $V \supseteq B$.

Решение. Будем рассматривать только симметричные окрестности точек. По условию у каждой точки $a \in A$ есть окрестность $U(a)$, которая не пересекается с B. У каждой точки $b \in B$ есть окрестность $V(b)$, которая не пересекается с A. Из неравенства треугольника легко видеть, что если мы возьмём вдвое меньшие окрестности $U'(a)$ и $V'(b)$, то они не будут пересекаться между собой при любых $a \in A, b \in B$. Тогда множества

$$U = \bigcup_{a \in A} U'(a), \quad V = \bigcup_{b \in B} V'(b)$$

обладают требуемым свойством.

Задача 2. Пусть A — бесконечное множество вещественных чисел. Доказать, что существует строго монотонная последовательность $\{a_n\}$, все члены которой принадлежат A.

Решение. Множество A обладает предельной точкой $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$. Пусть $\{x_i\}$ — последовательность точек множества A, сходящаяся к x_0 ($x_i \neq x_0$). Тогда одно из множеств $I = \{i : x_i < x_0\}$ или $I' = \{i : x_i > x_0\}$ бесконечно; пусть для определенности это множество I. Тогда, заменив x_i на ее подпоследовательность с индексами, лежащими в I, можно считать, что $x_i < x_0$ при любом i.

Осталось построить монотонную подпоследовательность $\{y_i\}$ последовательности $\{x_i\}$. Положим $y_1 = x_1$, $i_1 = 1$. Пусть отрезок $y_1 < \cdots < y_n$ уже построен. Так как $y_n < x_0$, то существует такое натуральное число i_{n+1}, что $x_i > y_n$ при всех $i \geq i_{n+1}$ (ясно, что $i_{n+1} > i_n$). Тогда можно положить $y_{n+1} = x_{i_{n+1}}$. Последовательность $\{y_n\}$ построена.

Задача 3. Пусть a, b, c, d — векторы в $\mathbb{R}^n$, $(\cdot, \cdot)$ — стандартное скалярное произведение. Доказать, что

$$((a,c) + (b,d))^2 + ((a,d) - (b,c))^2 \leq (a^2 + b^2) \cdot (c^2 + d^2).$$

Решение. Рассмотрим вектора $a + ib, c + id \in \mathbb{C}^n$. Тогда по неравенству Шварца

$$|(a + ib, c + id)|^2 \leq |a + ib|^2 \cdot |c + id|^2,$$

раскрывая скобки, получаем

$$|(a,c) + (b,d) + i(b,c) - i(a,d)|^2 \leq (a^2 + b^2) \cdot (c^2 + d^2).$$

По определению левая часть равна

$$((a, c) + (b, d))^2 + ((a, d) - (b, c))^2.$$

Задача 4. Пусть аффинное отображение (композиция линейного оператора и сдвига) $\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ такое, что для некоторого $x \in \mathbb{R}^n$ множество $\{\alpha^k(x)\}_{k\in\mathbb{N}}$ ограничено. Докажите, что α имеет неподвижную точку, то есть для некоторого $y \in \mathbb{R}^n$

$$\alpha(y) = y.$$

Решение. Пусть α представляется в виде

$$\alpha(x) = Ax + b,$$

где A — линейный оператор и $b \in \mathbb{R}^n$. Если неподвижной точки нет, то уравнение

$$Ax - x + b = 0$$

не имеет решений. Иначе говоря, вектор b не лежит в образе линейного оператора $A - I$. Следовательно, найдётся линейная функция $\lambda : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ такая, что

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \ \lambda((A - I)x) = 0, \quad \text{и} \quad \lambda(b) \neq 0.$$

Тогда для любого $x \in \mathbb{R}^n$ получается

$$\lambda(\alpha(x)) = \lambda(Ax - x) + \lambda(x + b) = \lambda(x) + \lambda(b),$$

а следовательно, $\lambda(\alpha^k(x)) = \lambda(x) + k\lambda(b)$. Значит, для любого $x \in \mathbb{R}^n$ последовательность $\{\lambda(\alpha^k(x))\}_{k\in\mathbb{N}}$ неограничена, что противоречит условию задачи.

Задача 5. 1) Пусть $f\colon (0, 1]^2 \to (0, +\infty)$ — функция, непрерывная по совокупности переменных. Верно ли, что обязательно найдется непрерывная функция $g\colon (0, 1] \to (0, +\infty)$ такая, что $g(x) = o(f(x, y))$, $x \to +0$ при любом $y \in (0, 1]$?

2) Пусть $f\colon (0, 1]^2 \to (0, +\infty)$ — функция, непрерывная по x при любом фиксированном $y \in (0, 1]$. Верно ли, что обязательно найдется непрерывная функция $g\colon (0, 1] \to (0, +\infty)$ такая, что $g(x) = o(f(x, y))$, $x \to +0$ при любом $y \in (0, 1]$?

Решение. 1) Можно положить $g(x) = x \cdot \min\limits_{y\in[x,1]} f(x, y)$ (этот минимум существует и положителен из непрерывности и положительности $f(x, y)$). Тогда при любом фиксированном $y \in (0, 1]$ неравенство $g(x) \leq xf(x, y)$ верно для любого $0 < x \leq y$, откуда $g(x) = o(f(x, y))$, $x \to +0$.

2) Множество M всех последовательностей натуральных чисел имеет мощность континуум. Зафиксируем взаимно однозначное соответствие между M и $(0,1]$; пусть $\{a_n^{(y)}\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность, соответствующая числу $y \in (0,1]$. Тогда существует непрерывная функция $h_y(x)\colon (0,1] \to (0,\infty)$ такая, что $h_y(1/n) = 1/a_n^{(y)}$ (можно, например, сделать $h_y(x)$ линейной на любом отрезке $[1/(n+1), 1/n]$). Положим $f(x,y) = h_y(x)$.

Рассмотрим произвольную функцию $g(x)\colon (0,1] \to (0,+\infty)$; пусть $s_n = \lceil 1/g(1/n) \rceil$ (наименьшее натуральное число $\geq 1/g(1/n)$). Тогда найдется $y \in (0,1]$, при котором $f(1/n, y) = h_y(1/n) = 1/s_n \leq g(1/n)$. Это означает, что $g(1/n) \neq o(f(1/n,y))$, $n \to \infty$, и уж тем более $g(x) \neq o(f(x,y))$, $x \to +0$.

Задача 6. Пусть $D \subset \mathbb{R}^2$ — область с гладкой границей ∂D без самопересечений, $G = \overline{D}$. Для каждой точки $x \in \partial G$ найдется круг $B^{(x)}$ радиуса R такой, что $x \in B^{(x)}$, $B^{(x)} \cap G = B^{(x)} \cap \partial G$.
1) Доказать, что найдется окрестность U множества G такая, что для каждой точки $x \in U$ существует единственная точка $\pi(x) \in G$ со свойством $\|x - \pi(x)\| = \inf\limits_{g \in G} \|x - g\|$.
2) Доказать, что окрестность U в пункте 1) можно выбрать так, что для некоторого числа $L > 0$ и для любых точек $x, y \in U$ выполнено неравенство
$$\|\pi(x) - \pi(y)\| \leq L \cdot \|x - y\|.$$

Решение. 1) Выберем $r \in (0,R)$. Пусть U есть r-окрестность множества G, т.е. такие точки x, что $\inf\limits_{g \in G} \|x - g\| < r$.

Через $B_r(a)$ обозначим замкнутый круг радиуса r с центром в точке a.

Зафиксируем $x \in U$. Непустота множества ближайших к x точек множества G следует из компактности круга на плоскости и теоремы Вейерштрасса.

Пусть y — точка из G, для которой $\|x - y\| = \inf\limits_{g \in G} \|x - g\| = \varrho < r < R$.

Тогда $G \cap \operatorname{int} B_\varrho(x) = \emptyset$ и $y \in B_\varrho(x) \cap \partial G$. Поэтому касательная прямая (l) к кривой ∂G в точке y совпадает с касательной прямой к окружности $\partial B_\varrho(x)$ в точке y. По условию теоремы существует круг $B^{(y)}$ радиуса $R > \varrho$, такой, что $y \in B^{(y)}$, $B^{(y)} \cap G = B^{(y)} \cap \partial G$. С необходимостью $B^{(y)}$ касается прямой l в точке y (иначе нарушается условие $B^{(y)} \cap G = B^{(y)} \cap \partial G$), значит круги $B^{(y)}$ и $B_\varrho(x)$ касаются прямой l в точке y и оба лежат в одной полуплоскости относительно l (иначе $B^{(y)}$ имеет общие точки с $\operatorname{int} G$). Поэтому $\{y\} \cup \operatorname{int} B^{(y)} \supset B_\varrho(x)$. Следовательно, $y \in G$ — единственная ближайшая к x.

2) Покажем, что отображение $U \ni x \to \pi(x) \in G$ удовлетворяет условию Липшица с константой $L = \frac{R}{R-r}$. Множество U то же, что и в пункте 1).

Пусть $x_1, x_2 \in U\backslash G$, точки $y_i = \pi(x_i)$ — проекции x_i на G, z_i — центры шаров $B^{(y_i)}$ соответственно. Тогда по свойству шаров $\|z_1-y_1\| \leq \|z_1-y_2\|$, $\|z_2 - y_2\| \leq \|z_2 - y_1\|$.

Введем декартову систему координат с центром y_1 так, чтобы точка y_2 имела координаты $(1, 0)$; пусть штрих отзначает абсциссу после проекции (т.е. x_1' — абсцисса точки x_1 и т.п.). Тогда из доказанного $z_1' \leq 1/2$, $z_2' \geq 1/2$; поскольку x_1, x_2 делят отрезки z_1y_1, z_2y_2 в отношении, большем $(R-r) : r$, то $x_1' \leq (1/2)\cdot(r/R)$, $x_2' \geq 1-(1/2)\cdot(r/R)$, то есть $|x_2' - x_1'| \geq 1 - r/R$. Значит, и $\|x_2 - x_1\| \geq \frac{R-r}{R}\|y_1 - y_2\|$, что и требовалось.

Если $x_2 = y_2 \in G$, то можно повторить предыдущие рассуждения, взяв в качестве точки z_2 любую точку со свойствомами $\|z_2 - y_2\| = R$, $\|z_2 - y_2\| \leq \|z_2 - y_1\|$.

Другое решение пункта 2).

2) Пусть $x_1, x_2 \in U\backslash G$ и точки $y_i = \pi(x_i)$ — проекции x_i на G. Тогда вектор $\frac{x_1-y_1}{\|x_1-y_1\|}$ нормален к кривой ∂G в точке y_1 и, следовательно, $B^{(y_1)}$ есть круг с центром в точке $y_1 + \frac{x_1-y_1}{\|x_1-y_1\|}R$. Поэтому

$$\left\| y_1 + \frac{x_1 - y_1}{\|x_1 - y_1\|} R - y_2 \right\| \geq R,$$

и, возводя в квадрат, получаем

$$\|y_1 - y_2\|^2 \geq \frac{2R}{\|x_1 - y_1\|}(y_1 - y_2, y_1 - x_1),$$

откуда ($\|x_1 - y_1\| < r$)

$$\|y_1 - y_2\|^2 \geq \frac{2R}{r}(y_1 - y_2, y_1 - x_1).$$

Меняя местами индексы 1 и 2 в предыдущей формуле, получаем

$$\|y_1 - y_2\|^2 \geq \frac{2R}{r}(y_2 - y_1, y_2 - x_2).$$

Сумма двух последних неравенств дает

$$2\|y_1 - y_2\|^2 \geq \frac{2R}{r}(y_1 - y_2, y_1 - x_1 - y_2 + x_2),$$

$$\|y_1 - y_2\|^2 \geq \frac{R}{r}\|y_1 - y_2\|^2 - \frac{R}{r}(y_1 - y_2, x_1 - x_2).$$

Отсюда
$$\frac{R}{r}\|y_1-y_2\|\cdot\|x_1-x_2\| \geq \frac{R}{r}(y_1-y_2,x_1-x_2) \geq \frac{R-r}{r}\|y_1-y_2\|^2$$
и значит $\|y_1-y_2\| \leq \frac{R}{R-r}\|x_1-x_2\|$.

Если, например, $x_2=y_2\in G$, $x_1\in U\backslash G$, то из неравенства
$$\left\|y_1+\frac{x_1-y_1}{\|x_1-y_1\|}R-x_2\right\| \geq R,$$
возводением в квадрат и повторением предыдущих рассуждений, получаем, что $\|y_1-x_2\| \leq \frac{2R}{2R-r}\|x_1-x_2\|$, а $\frac{2R}{2R-r} < \frac{R}{R-r}$.

2 — 6 КУРС

Задача 1. Докажите, что ненулевая комплексная матрица A размера 2×2 является квадратом ($A=B^2$) тогда и только тогда, когда $A^2\neq 0$.

Решение. Если $A\neq 0,\ A^2=0$ и $A=B^2$, то $B^4=0$. Следовательно, все собственный значения B нулевые и по теореме Гамильтона-Кэли $A=B^2=0$ — противоречие.

Пусть теперь $A^2\neq 0$. Тогда если A можно привести к диагональному виду
$$SAS^{-1}=\left(\begin{array}{cc} a & 0\\ 0 & b\end{array}\right),$$
то можно взять
$$SBS^{-1}=\left(\begin{array}{cc} \sqrt{a} & 0\\ 0 & \sqrt{b}\end{array}\right).$$
Иначе A можно привести к виду жордановой клетки с ненулевыми (так как $A^2\neq 0$) собственными значениями
$$SAS^{-1}=\left(\begin{array}{cc} a & 1\\ 0 & a\end{array}\right),$$
и можно взять
$$SBS^{-1}=\left(\begin{array}{cc} \sqrt{a} & \frac{1}{2\sqrt{a}}\\ 0 & \sqrt{a}\end{array}\right).$$
Здесь $\sqrt{x}$ обозначает некоторый корень из комплексного числа.

Задача 2. Дано дифференциальное уравнение с запаздыванием $x'(t)=x(t-1)$. Верно ли, что для каждого решения $x(t)$ этого уравнения выполнено

1) $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{x(t)}{e^t}=0$?

2) $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{x^2(t)}{e^t}=0$?

Решение. 1) Верно. Пусть $c_n = \sup_{t\in[n-1,n]}|x(t)|$. Тогда $|x'(t)| \le c_n$ при $t \in [n, n+1]$, то есть $|x(t)| \le c_n + c_n(t-n)$ при этих же t. Значит, $c_{n+1} \le 2c_n$, откуда и следует $|x(t)| \le 2^{n+1}c_1$, $t \in [n, n+1]$.

2) Неверно. Будем искать решение в виде $x(t) = e^{\lambda t}$. Условие $x'(t) = x(t-1)$ дает $\lambda = e^{-\lambda}$.

Пусть λ вещественное число. Тогда существует вещественное решение $\lambda_0 \in (0,1)$ уравнения $\lambda = e^{-\lambda}$, причем при $\lambda \in (0, \lambda_0)$ имеем $\lambda < e^{-\lambda}$, а при $\lambda \in (\lambda_0, 1)$ имеем $\lambda > e^{-\lambda}$. Поскольку $\frac{1}{2} < e^{-\frac{1}{2}}$, то $\lambda_0 > \frac{1}{2}$ и $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{e^{2\lambda_0 t}}{e^t} = +\infty$.

Задача 3. См. задачу 3 1 курса.

Задача 4. Существует ли такой набор I интервалов, лежащих в интервале $(0,1)$, что каждая рациональная точка интервала $(0,1)$ принадлежит конечному числу интервалов из I, а каждая иррациональная точка этого отрезка — бесконечному числу интервалов из I?

Решение. Существует. Пусть

$$I_n = \left\{ \left(\frac{a}{n!}, \frac{a+1}{n!}\right) \middle| \, a = 0, 1, \ldots, n!-1 \right\}, \qquad I = \cup_{n=1}^{\infty} I_n.$$

Ясно, что множества I_n попарно не пересекаются. Далее, каждая иррациональная точка принадлежит ровно одному интервалу из каждого множества I_n, то есть бесконечному множеству интервалов из I. Каждая же рациональная точка (скажем, со знаменателем k) не принадлежит интервалам из множеств I_n при $n \ge k$.

Задача 5. См. задачу 5 1 курса.

Задача 6. Пусть плоская гладкая кривая Γ ограничивает выпуклую область Ω площадью 10π. Отрезок длины 1 с концами на кривой Γ протаскивается по кривой Γ так, что его концы проходят все точки кривой Γ, а середина описывает гладкую кривую γ, которая ограничивает выпуклую область $G \subset \Omega$. Найти площадь G.

Решение. Пусть координаты концов протаскиваемого отрезка AB и его середины C есть

$$A\ (x_1, y_1) \in \Gamma, \quad B\,(x_2, y_2) \in \Gamma, \quad C\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right) \in \gamma \subset \Omega.$$

Без ограничения общности можно считать, что при протаскивании отрезка точки A и B движутся по кривой Γ против часовой стрелки. По следствию из формулы Грина получаем, что

$$\mu\Omega = 10\pi = \frac{1}{2}\int_\Gamma x_1\,dy_1 + x_2\,dy_2 = \frac{1}{2}\int_\Gamma x_1\,dy_2 + x_2\,dy_1 + \frac{1}{2}\int_\Gamma (x_1 - x_2)\,d(y_1 - y_2).$$

$$\mu G = \frac{1}{4}\int_\Gamma (x_1+x_2)\,d(y_1+y_2) = \frac{1}{4}\int_\Gamma x_1\,dy_1 + x_2\,dy_2 + \frac{1}{4}\int_\Gamma x_1\,dy_2 + x_2\,dy_1 =$$

$$= 5\pi + \frac{1}{4}\int_\Gamma x_1\,dy_2 + x_2\,dy_1,$$

отсюда

$$\frac{1}{2}\int_\Gamma x_1\,dy_2 + x_2\,dy_1 = 2\mu G - 10\pi.$$

В итоге получаем, что

$$10\pi = 2\mu G - 10\pi + \frac{1}{2}\int_\Gamma (x_1-x_2)\,d(y_1-y_2).$$

Поскольку при протаскивании отрезка AB по кривой Γ вектор $(x_1 - x_2, y_1 - y_2)$ длины 1 совершает поворот на 2π против часовой стрелки, то $\int_\Gamma (x_1-x_2)\,d(y_1-y_2) = \pi$, откуда $\mu G = \frac{39}{4}\pi$.