

**Задача 1.(10 очков)** Пусть у функции  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  в каждой точке  $x_0$  существует конечный предел

$$g(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x).$$

Верно ли, что функция  $g(x)$  непрерывна?

**Решение.** Возьмём некоторое  $x_0$ . По определению предела

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta) \quad |g(x_0) - f(x)| < \varepsilon.$$

Зафиксируем  $\varepsilon$ , возьмём  $x_1 \in (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$  и перейдём в неравенстве к пределу  $x \rightarrow x_1$ , получим

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x_1 \in (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta) \quad |g(x_0) - g(x_1)| \leq \varepsilon,$$

что равносильно непрерывности  $g(x)$  в  $x_0$  по определению.

**Задача 2.(10 очков)** Пусть  $A$  — несчетное множество действительных чисел. Доказать, что существует строго возрастающая последовательность  $\{a_n\}$ , все члены которой принадлежат  $A$ .

**Решение.** Слово “счетно” в этом решении будет заменой выражения “не более чем счетно”.

Мы будем строить последовательность индуктивно. Достаточно доказать, что существует такой элемент  $a_1 \in A$ , что  $A' = A \cap (a_1; +\infty)$  несчетно. Тогда можно будет, применив те же рассуждения к множеству  $A'$ , выбрать  $a_2$  и несчетное множество  $A'' = A \cap (a_2; +\infty)$  и т.д.

Если каждое из множеств  $A_i = A \cap [-i; i]$  счетно, то счетно и  $A$  как объединение счетного числа счетных множеств. Это невозможно; значит, при некотором  $i$  множество  $A_i$  несчетно, и можно заменить  $A$  на  $A \cap [-i; i]$ . Пусть  $a = \inf A$ . Если каждое из множеств  $A \cap [a + 1/n; +\infty)$  счетно, то опять же  $A$  будет счетно, т.к.  $A = (A \cap \{a\}) \cup \cup_n A \cap [a + 1/n; +\infty)$ . Пусть  $A \cap [a + 1/n_0; +\infty)$  несчетно. Тогда можно выбрать  $a_1 \in A \cap [a, a + 1/n_0)$  — оно существует по определению  $a$ . При этом множество  $A' = A \cap (a_1; +\infty)$  будет несчетно, так как оно содержит несчетное множество  $A \cap [a + 1/n_0; +\infty)$ .

**Задача 3.(10 очков)** Пусть  $T$  — невырожденная положительно определенная симметричная матрица;  $(p, x)$  — скалярное произведение векторов  $p, x$ ;  $A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (x, Tx) \leq 1\}$ . Найти

$$\max_{x \in A} (p, x).$$

**Решение.** Максимальное значение  $c$  функция  $(p, x)$  будет принимать при условии, что плоскость  $(p, x) = c$  касается множества  $A$  в точке

$x_p \in A$  и любой сдвиг ее по нормали  $p$  дает плоскость, не имеющую с  $A$  общих точек. Поэтому  $\lambda p = \nabla(x, Tx)|_{x=x_p} = 2Tx_p$  для некоторого  $\lambda > 0$ , откуда

$$x_p = \frac{\lambda}{2}T^{-1}p, (x_p, Tx_p) = \frac{\lambda^2}{4}(p, T^{-1}p) = 1, \lambda = \frac{2}{\sqrt{\langle p, T^{-1}p \rangle}}, x_p = \frac{T^{-1}p}{\sqrt{\langle p, T^{-1}p \rangle}},$$

$$\max_{x \in A} \langle p, x \rangle = \sqrt{\langle p, T^{-1}p \rangle}.$$

Задачу также можно решать с помощью метода множителей Лагранжа.

**Задача 4.(10 очков)** Матрица  $A$  обратима. Верно ли, что существует многочлен  $p$  такой, что  $A^{-1} = p(A)$ ?

**Решение.** Пусть  $\det(A - \lambda E) = \alpha_0 + \alpha_1\lambda + \dots + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + (-1)^n\lambda^n$ . При этом  $\alpha_0 = \det A \neq 0$ , т.к. матрица  $A$  невырождена. По теореме Гамильтона-Кэли

$$\alpha_0 + \alpha_1 A + \dots + \alpha_{n-1} A^{n-1} + (-1)^n A^n = 0,$$

откуда  $A^{-1} = p(A)$ , где  $p(\lambda) = -\frac{1}{\alpha_0}(\alpha_1 + \dots + \alpha_{n-2}\lambda^{n-1} + (-1)^n\lambda^{n-1})$ .

**Задача 5.(10 очков)** Пусть  $P(y)$  — многочлен степени не менее первой. При каких значениях  $y_0 \in \mathbb{R}$  решение задачи Коши  $y' = P(y)$ ,  $y(0) = y_0$ , существует на полуоси  $[0, +\infty)$ ?

**Решение.** Пусть  $y_1 < \dots < y_m$  — корни многочлена. Если  $y_0 = y_k$ , то решение  $y(x) \equiv y_k$  существует при всех  $x$ .

Пусть  $y_0 \in (y_{k-1}, y_k)$ . Если  $P(y) > 0$  на  $(y_{k-1}, y_k)$ , то продолжимость решения вправо эквивалентна расходимости интеграла

$$x = \int_{y_0}^{y_k} \frac{dy}{P(y)},$$

которая имеет место по признаку сравнения. Если  $P(y) < 0$  на  $(y_{k-1}, y_k)$ , то продолжимость решения вправо эквивалентна расходимости интеграла

$$x = \int_{y_0}^{y_{k-1}} \frac{dy}{P(y)},$$

которая также имеет место.

Если  $y_0 > y_m$ , то при  $P(y) > 0$  при  $y > y_m$  продолжение вправо имеет место при расходимости

$$x = \int_{y_0}^{+\infty} \frac{dy}{P(y)}.$$

Последнее имеет место при  $\deg P = 1$  и не имеет места в противном случае.

Если  $P(y) < 0$  при  $y > y_m$ , то продолжимость решения вправо эквивалентна расходимости интеграла

$$x = \int_{y_0}^{y_m} \frac{dy}{P(y)},$$

которая имеет место.

Аналогично исследуется случай  $y_0 < y_1$ .

Итак, при  $\deg P = 1$  продолжимость вправо имеет место при любом  $y_0$ .

При  $\deg P \geq 2$  продолжимость вправо имеет место только при наличии корней  $y$   $P$ , когда  $y_0$  лежит между корнями  $P$ , или  $y_0 > y_m$  и  $P(y) < 0$  при  $y > y_m$ , или  $y_0 < y_1$  и  $P(y) > 0$  при  $y < y_1$ , или  $y_0 = y_k$ . В других случаях решение задачи Коши не продолжимо вправо.

**Задача 6. (15 очков)** Пусть  $f \in C^2([0, 1])$ . Найти  $\min_0^1 \int_0^1 |f''(x)|^2 dx$  при условии  $f(0) = f(1) = 0, f'(0) = 1$ .

**Решение.** По формуле Тейлора с остаточным членом в интегральной форме

$$f(1) = f'(0) + \int_0^1 f''(t)(1-t) dt,$$

откуда

$$\left| \int_0^1 f''(t)(1-t) dt \right| = 1.$$

По неравенству Коши имеем

$$1 \leq \left( \int_0^1 (f''(t))^2 dt \right)^{1/2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Равенство достигается, когда функции  $f''(t)$  и  $1-t$  будут пропорциональны, откуда  $f(t) = (1/2) \cdot t(t-1)(t-2)$  и минимум равен 3.

Задачу можно решить и с помощью вариационного исчисления.

**Задача 7. (15 очков)** Комплексное векторное пространство  $\mathbb{C}^n$  можно рассматривать также как вещественное векторное пространство размерности  $2n$ . Доказать, что любое вещественное подпространство  $L \subset \mathbb{C}^n$  вещественной размерности  $2n-1$  содержит ровно одно комплексное подпространство  $L' \subset \mathbb{C}^n$  комплексной размерности  $n-1$ .

**Решение.** Рассмотрим квадрат нормы в  $\mathbb{C}^n$ , заданный как

$$\|(z_1, \dots, z_n)\|^2 = \sum_{i=1}^n |z_i|^2,$$

его можно интерпретировать как квадрат в смысле вещественного скалярного произведения

$$(v, w)_{\mathbb{R}} = \frac{1}{2}(\|v + w\|^2 - \|v\|^2 - \|w\|^2)$$

и в смысле комплексного скалярного произведения

$$(v, w)_{\mathbb{C}} = \sum_{i=1}^n v_i \bar{w}_i,$$

заметим, что при этом

$$(v, w)_{\mathbb{R}} = \operatorname{Re}(v, w)_{\mathbb{C}}. \quad (1)$$

Рассмотрим ненулевой вектор, ортогональный  $L$  в смысле  $(\cdot, \cdot)_{\mathbb{R}}$ , пусть это вектор  $n$ . Тогда можно определить его ортогональное дополнение в смысле  $(\cdot, \cdot)_{\mathbb{C}}$

$$L' = \{v \in \mathbb{C}^n : (n, v)_{\mathbb{C}} = 0\},$$

очевидно  $L' \subset L$  и его комплексная размерность равна  $n-1$ . Если существует другое  $n-1$ -мерное комплексное подпространство  $L'' \subset L$ , то по определению  $n$

$$(n, L'')_{\mathbb{R}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \forall \alpha \in \mathbb{C} \quad (n, \alpha L'')_{\mathbb{R}} = 0,$$

следовательно по формуле (1)

$$\forall \alpha \in \mathbb{C} \quad \operatorname{Re}(n, \alpha L'')_{\mathbb{C}} = \operatorname{Re} \bar{\alpha} (n, L'')_{\mathbb{C}} = 0, \quad \Rightarrow \quad (n, L'')_{\mathbb{C}} = 0.$$

Значит,  $L''$  является ортогональным дополнением к  $n$  по скалярному произведению  $(\cdot, \cdot)_{\mathbb{C}}$ , то есть  $L'' = L'$ .

**Задача 8. (15 очков)** Пусть функция  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывна. Доказать, что для любого интервала  $(a, b) \subset \mathbb{R}$  найдется точка  $x_0 \in (a, b)$  и число  $l$  такие, что для всех  $x \in \mathbb{R}$  выполнено неравенство

$$f(x) \geq f(x_0) + l \cdot (x - x_0) + o(x - x_0), \quad x \rightarrow x_0. \quad (*)$$

**Решение.** Будем без ограничения общности считать, что для некоторого  $\varepsilon > 0$   $[-\varepsilon, \varepsilon] \subset (a, b)$ ;  $\min\{f(x) \mid x \in [-\varepsilon, \varepsilon]\} = 0$ ,  $\max\{f(x) \mid x \in [-\varepsilon, \varepsilon]\} = M \geq 0$ .

Пусть  $y_0(x) = -\frac{M}{\varepsilon^2}x^2$  и

$$t = \sup\{\tau \geq 0 \mid y_0(x) + \tau \leq f(x), \forall x \in [-\varepsilon, \varepsilon]\}.$$

В силу компактности графиков функций  $f$  и  $y_0$  на отрезке  $[-\varepsilon, \varepsilon]$  найдется точка  $x_0 \in [-\varepsilon, \varepsilon]$  такая, что  $y_0(x_0) + t = f(x_0)$ ; при этом  $y_0(x) + t \leq f(x)$  для всех  $x \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ . Касательная к параболе  $y = y_0(x) + t$  в точке  $x = x_0$  (имеющая уравнение  $y = -\frac{2M}{\varepsilon^2}x_0 \cdot x + f(x_0)$ ) и есть линейная функция из правой части (\*).

**Задача 9. (20 очков)** Определим последовательность  $\{t_n(q)\}$  следующим образом

$$t_0(q) = 0, \quad t_{n+1}(q) = \frac{q}{1 - t_n(q)}, \quad \text{для } n \geq 0.$$

Найти для каждого  $n \geq 1$  минимальное действительное положительное  $q$ , для которого  $t_n(q)$  определено и равно 1.

**Решение.** Функция

$$f : t \rightarrow \frac{q}{1 - t}$$

является проективным преобразованием прямой. Её матрица в однородных координатах ( $t = x/y$ ) выглядит так

$$A(q) = \begin{pmatrix} 0 & q \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Значит, мы ищем минимальное  $q$ , для которого

$$A(q)^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} \quad (2)$$

при некотором ненулевом  $x$ . Заметим, что формула 2 выполняется тогда и только тогда, когда

$$A(q)^{n+1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix}$$

и

$$A(q)^{n+2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ z \end{pmatrix}$$

для некоторых ненулевых  $y$  и  $z$ . Следовательно, мы ищем случаи, когда  $A(q)^{n+2}$  обращает вектор  $(0, 1)$  в коллинеарный ему. Обозначим матрицу  $B(q) = \frac{1}{\sqrt{q}}A(q)$ . Характеристические многочлены  $A(q)$  и  $B(q)$  выглядят следующим образом

$$P_A(\lambda) = \lambda^2 - \lambda + q, \quad P_B(\lambda) = \lambda^2 - \frac{1}{\sqrt{q}}\lambda + 1.$$

Итак, мы ищем минимальное положительное  $q$ , для которого  $B(q)^{n+2}$  обращает вектор  $(0, 1)$  в коллинеарный себе. Рассмотрим три случая.

Матрица  $B(q)$  в случае  $q < 1/4$  имеет два разных положительных собственных значения, и  $(0, 1)$  не является собственным вектором. Следовательно  $(0, 1)$  не может вернуться на ту же прямую при последовательном применении  $B(q)$ , это очевидно в базисе из собственных векторов.

Для  $q = 1/4$  матрица  $B(q)$  подобна Жордановой клетке,  $(0, 1)$  также не является собственным вектором, и также  $(0, 1)$  не возвращается на ту же прямую при последовательном применении  $B(q)$ .

Для  $q > 1/4$  матрица  $B(q)$  подобна вращению на угол  $\alpha$ , определяемый из инвариантности следа

$$2 \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{q}}.$$

Ясно, что  $\alpha$  растёт при росте  $q$  на интервале  $(1/4, +\infty)$ . Значит, минимальный  $\alpha$ , который превратит некоторый (а значит и все) вектор в коллинеарный ему за  $n + 2$  шагов, равен

$$\alpha_{\min} = \frac{\pi}{n + 2},$$

а его соответствующий параметр  $q$  равен

$$q_{\min} = \frac{1}{4 \cos^2 \left( \frac{\pi}{n+2} \right)}.$$

**Задача 10.(пункт а) 10 очков, пункт б) 20 очков)** Рассмотрим множество векторов  $V_{16}$ , состоящее из всех векторов размерности 16, у которых координаты принимают значения  $-1, 0, 1$ , и количество нулевых координат в точности равно 8.

Доказать, что найдётся подмножество  $W \subseteq V_{16}$ , состоящее из попарно неортогональных векторов, размера

- а) не менее 12000;
- б) не менее 28000.

**Решение.** Для решения пункта (а) достаточно рассмотреть набор  $U$  из векторов, у которых стоит 1 на первом месте, и ещё 7 единиц стоят на остальных местах. Очевидно, что скалярное произведение любых двух векторов из  $U$  положительно и  $|U| = C_{15}^7 = 6435$ . Рассмотрев множество  $U \cup (-U)$  получим искомое.

В пункте (б) рассмотрим другое множество  $U$ . Разобьём множество координат на первые 5 координат  $I$  и оставшиеся 11 координат  $J$ . Тогда  $U$  состоит из

- множества  $U_1$  из векторов с тремя единицами в  $I$  и 5 единицами в  $J$ ;
- множества  $U_2$  из векторов с 4 единицами в  $I$  и 4 единицами в  $J$ ;
- множества  $U_3$  из векторов с 4 единицами в  $I$ , 3 единицами и одной  $-1$  в  $J$ ;
- множества  $U_4$  из векторов с 5 единицами в  $I$  и 3 единицами в  $J$ ;
- множества  $U_5$  из векторов с 5 единицами в  $I$ , двумя единицами и одной  $-1$  в  $J$ ;
- множества  $U_6$  из векторов с 5 единицами в  $I$ , одной единицей и двумя  $-1$  в  $J$ ;

Можно проверить некоторым перебором, что в множестве  $U$  любые два вектора имеют положительное скалярное произведение. Его размер

$$|U| = C_5^3 C_{11}^5 + C_5^4 C_{11}^4 + C_5^4 C_{11}^3 C_8^1 + C_{11}^3 + C_{11}^2 C_9^1 + C_{11}^2 C_9^1 = 14025.$$

Аналогично предыдущему пункту получается множество  $W = U \cup (-U)$  из 28050 элементов.