Задача 1.(10 очков) Пусть у функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ в каждой точке x_0 существует конечный предел

$$g(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x).$$

Верно ли, что функция $g(x)$ непрерывна?

Решение. Возьмём некоторое x_0. По определению предела

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta) \quad |g(x_0) - f(x)| < \varepsilon.$$

Зафиксируем ε, возьмём $x_1 \in (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$ и перейдём в неравенстве к пределу $x \to x_1$, получим

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x_1 \in (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta) \quad |g(x_0) - g(x_1)| \leq \varepsilon,$$

что равносильно непрерывности $g(x)$ в x_0 по определению.

Задача 2.(10 очков) Пусть A — несчетное множество действительных чисел. Доказать, что существует строго возрастающая последовательность $\{a_n\}$, все члены которой принадлежат A.

Решение. Слово "счетно" в этом решении будет заменой выражения "не более чем счетно".

Мы будем строить последовательность индуктивно. Достаточно доказать, что существует такой элемент $a_1 \in A$, что $A' = A \cap (a_1; +\infty)$ несчетно. Тогда можно будет, применив те же рассуждения к множеству A', выбрать a_2 и несчетное множество $A'' = A \cap (a_2; +\infty)$ и т.д.

Если каждое из множеств $A_i = A \cap [-i; i]$ счетно, то счетно и A как объединение счетного числа счетных множеств. Это невозможно; значит, при некотором i множество A_i несчетно, и можно заменить A на $A \cap [-i; i]$. Пусть $a = \inf A$. Если каждое из множеств $A \cap [a + 1/n; +\infty)$ счетно, то опять же A будет счетно, т.к. $A = (A \cap \{a\}) \cup \cup_n A \cap [a + 1/n; +\infty)$. Пусть $A \cap [a + 1/n_0; +\infty)$ несчетно. Тогда можно выбрать $a_1 \in A \cap [a, a + 1/n_0)$ — оно существует по определению a. При этом множество $A' = A \cap (a_1; +\infty)$ будет несчетно, так как оно содержит несчетное множество $A \cap [a + 1/n_0; +\infty)$.

Задача 3.(10 очков) Пусть T — невырожденная положительно определенная симметричная матрица; (p, x) — скалярное произведение векторов p, x; $A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (x, Tx) \leq 1\}$. Найти

$$\max_{x \in A} (p, x).$$

Решение. Максимальное значение c функция (p, x) будет принимать при условии, что плоскость $(p, x) = c$ касается множества A в точке

$x_p \in A$ и любой сдвиг ее по нормали p дает плоскость, не имеющую с A общих точек. Поэтому $\lambda p = \nabla(x, Tx)|_{x=x_p} = 2Tx_p$ для некоторого $\lambda > 0$, откуда

$$x_p = \frac{\lambda}{2}T^{-1}p,\ (x_p, Tx_p) = \frac{\lambda^2}{4}(p, T^{-1}p) = 1,\ \lambda = \frac{2}{\sqrt{\langle p, T^{-1}p\rangle}},\ x_p = \frac{T^{-1}p}{\sqrt{\langle p, T^{-1}p\rangle}},$$

$$\max_{x\in A}\langle p, x\rangle = \sqrt{\langle p, T^{-1}p\rangle}.$$

Задачу также можно решать с помощью метода множителей Лагранжа.

Задача 4.(10 очков) Матрица A обратима. Верно ли, что существует многочлен p такой, что $A^{-1} = p(A)$?

Решение. Пусть $\det(A - \lambda E) = \alpha_0 + \alpha_1\lambda + \dots + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + (-1)^n\lambda^n$. При этом $\alpha_0 = \det A \neq 0$, т.к. матрица A невырождена. По теореме Гамильтона-Кэли

$$\alpha_0 + \alpha_1 A + \dots + \alpha_{n-1}A^{n-1} + (-1)^n A^n = 0,$$

откуда $A^{-1} = p(A)$, где $p(\lambda) = -\frac{1}{\alpha_0}\left(\alpha_1 + \dots + \alpha_{n-2}\lambda^{n-1} + (-1)^n\lambda^{n-1}\right)$.

Задача 5.(10 очков) Пусть $P(y)$ — многочлен степени не менее первой. При каких значениях $y_0 \in \mathbb{R}$ решение задачи Коши $y' = P(y)$, $y(0) = y_0$, существует на полуоси $[0, +\infty)$?

Решение. Пусть $y_1 < \dots < y_m$ — корни многочлена. Если $y_0 = y_k$, то решение $y(x) \equiv y_k$ существует при всех x.

Пусть $y_0 \in (y_{k-1}, y_k)$. Если $P(y) > 0$ на (y_{k-1}, y_k), то продолжимость решения вправо эквивалентна расходимости интеграла

$$x = \int\limits_{y_0}^{y_k} \frac{dy}{P(y)},$$

которая имеет место по признаку сравнения. Если $P(y) < 0$ на (y_{k-1}, y_k), то продолжимость решения вправо эквивалентна расходимости интеграла

$$x = \int\limits_{y_0}^{y_{k-1}} \frac{dy}{P(y)},$$

которая также имеет место.

Если $y_0 > y_m$, то при $P(y) > 0$ при $y > y_m$ продолжение вправо имеет место при расходимости

$$x = \int\limits_{y_0}^{+\infty} \frac{dy}{P(y)}.$$

Последнее имеет место при $\deg P = 1$ и не имеет места в противном случае.

Если $P(y) < 0$ при $y > y_m$, то продолжимость решения вправо эквивалентна расходимости интеграла

$$x = \int\limits_{y_0}^{y_m} \frac{dy}{P(y)},$$

которая имеет место.

Аналогично исследуется случай $y_0 < y_1$.

Итак, при $\deg P = 1$ продолжимость вправо имеет место при любом y_0.

При $\deg P \geq 2$ продолжимость вправо имеет место только при наличии корней у P, когда y_0 лежит между корнями P, или $y_0 > y_m$ и $P(y) < 0$ при $y > y_m$, или $y_0 < y_1$ и $P(y) > 0$ при $y < y_1$, или $y_0 = y_k$. В других случаях решение задачи Коши не продолжимо вправо.

Задача 6.(15 очков) Пусть $f \in C^2([0,1])$. Найти $\min \int\limits_0^1 |f''(x)|^2\,dx$ при условии $f(0) = f(1) = 0$, $f'(0) = 1$.

Решение. По формуле Тейлора с остаточным членом в интегральной форме

$$f(1) = f'(0) + \int\limits_0^1 f''(t)(1-t)\,dt,$$

откуда

$$\left| \int\limits_0^1 f''(t)(1-t)\,dt \right| = 1.$$

По неравенству Коши имеем

$$1 \leq \left(\int_0^1 (f''(t))^2\,dt \right)^{1/2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Равенство достигнется, когда функции $f''(t)$ и $1-t$ будут пропорциональны, откуда $f(t) = (1/2)\cdot t(t-1)(t-2)$ и минимум равен 3.

Задачу можно решить и с помощью вариационного исчисления.

Задача 7.(15 очков) Комплексное векторное пространство $\mathbb{C}^n$ можно рассматривать также как вещественное векторное пространство размерности $2n$. Доказать, что любое вещественное подпространство $L \subset \mathbb{C}^n$ вещественной размерности $2n-1$ содержит ровно одно комплексное подпространство $L' \subset \mathbb{C}^n$ комплексной размерности $n-1$.

Решение. Рассмотрим квадрат нормы в $\mathbb{C}^n$, заданный как

$$\|(z_1, \dots, z_n)\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |z_i|^2,$$

его можно интерпретировать как квадрат в смысле вещественного скалярного произведения

$$(v, w)_{\mathbb{R}} = \frac{1}{2}(\|v + w\|^2 - \|v\|^2 - \|w\|^2)$$

и в смысле комплексного скалярного произведения

$$(v, w)_{\mathbb{C}} = \sum_{i=0}^{n} v_i \overline{w_i},$$

заметим, что при этом

$$(v, w)_{\mathbb{R}} = \mathrm{Re}(v, w)_{\mathbb{C}}. \tag{1}$$

Рассмотрим ненулевой вектор, ортогональный L в смысле $(\cdot, \cdot)_{\mathbb{R}}$, пусть это вектор n. Тогда можно определить его ортогональное дополнение в смысле $(\cdot, \cdot)_{\mathbb{C}}$

$$L' = \{v \in \mathbb{C}^n : (n, v)_{\mathbb{C}} = 0\},$$

очевидно $L' \subset L$ и его комплексная размерность размерность равна $n - 1$. Если существует другое $n - 1$-мерное комплексное подпространство $L'' \subset L$, то по определению n

$$(n, L'')_{\mathbb{R}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \forall \alpha \in \mathbb{C} \ (n, \alpha L'')_{\mathbb{R}} = 0,$$

следовательно по формуле (1)

$$\forall \alpha \in \mathbb{C} \ \ \mathrm{Re}(n, \alpha L'')_{\mathbb{C}} = \mathrm{Re}\, \overline{\alpha}(n, L'')_{\mathbb{C}} = 0, \quad \Rightarrow \quad (n, L'')_{\mathbb{C}} = 0.$$

Значит, L'' является ортогональным дополнением к n по скалярному произведению $(\cdot, \cdot)_{\mathbb{C}}$, то есть $L'' = L'$.

Задача 8.(15 очков) Пусть функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывна. Доказать, что для любого интервала $(a, b) \subset \mathbb{R}$ найдется точка $x_0 \in (a, b)$ и число l такие, что для всех $x \in \mathbb{R}$ выполнено неравенство

$$f(x) \geq f(x_0) + l \cdot (x - x_0) + o(x - x_0), \quad x \to x_0. \tag{$*$}$$

Решение. Будем без ограничения общности считать, что для некоторого $\varepsilon > 0$ $[-\varepsilon, \varepsilon] \subset (a, b)$; $\min\{f(x) \mid x \in [-\varepsilon, \varepsilon]\} = 0$, $\max\{f(x) \mid x \in [-\varepsilon, \varepsilon]\} = M \geq 0$.

Пусть $y_0(x) = -\frac{M}{\varepsilon^2}x^2$ и

$$t = \sup\{\tau \geq 0 \mid y_0(x) + \tau \leq f(x),\ \forall x \in [-\varepsilon, \varepsilon]\}.$$

В силу компактности графиков функций f и y_0 на отрезке $[-\varepsilon, \varepsilon]$ найдется точка $x_0 \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ такая, что $y_0(x_0) + t = f(x_0)$; при этом $y_0(x) + t \leq f(x)$ для всех $x \in [-\varepsilon, \varepsilon]$. Касательная к параболе $y = y_0(x) + t$ в точке $x = x_0$ (имеющая уравнение $y = -\frac{2M}{\varepsilon^2}x_0 \cdot x + f(x_0)$) и есть линейная функция из правой части (*).

Задача 9.(20 очков) Определим последовательность $\{t_n(q)\}$ следующим образом

$$t_0(q) = 0, \quad t_{n+1}(q) = \frac{q}{1 - t_n(q)}, \text{ для } n \geq 0.$$

Найти для каждого $n \geq 1$ минимальное действительное положительное q, для которого $t_n(q)$ определено и равно 1.

Решение. Функция

$$f : t \to \frac{q}{1-t}$$

является проективным преобразованием прямой. Её матрица в однородных координатах ($t = x/y$) выглядит так

$$A(q) = \begin{pmatrix} 0 & q \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Значит, мы ищем минимальное q, для которого

$$A(q)^n \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} \tag{2}$$

при некотором ненулевом x. Заметим, что формула 2 выполняется тогда и только тогда, когда

$$A(q)^{n+1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix}$$

и

$$A(q)^{n+2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ z \end{pmatrix}$$

для некоторых ненулевых y и z. Следовательно, мы ищем случаи, когда $A(q)^{n+2}$ обращает вектор $(0, 1)$ в коллинеарный ему. Обозначим матрицу $B(q) = \frac{1}{\sqrt{q}}A(q)$. Характеристические многочлены $A(q)$ и $B(q)$ выглядят следующим образом

$$P_A(\lambda) = \lambda^2 - \lambda + q, \quad P_B(\lambda) = \lambda^2 - \frac{1}{\sqrt{q}}\lambda + 1.$$

Итак, мы ищем минимальное положительное q, для которого $B(q)^{n+2}$ обращает вектор $(0,1)$ в коллинеарный себе. Рассмотрим три случая.

Матрица $B(q)$ в случае $q < 1/4$ имеет два разных положительных собственных значения, и $(0,1)$ не является собственным вектором. Следовательно $(0,1)$ не может вернуться на ту же прямую при последовательном применении $B(q)$, это очевидно в базисе из собственных векторов.

Для $q = 1/4$ матрица $B(q)$ подобна Жордановой клетке, $(0,1)$ также не является собственным вектором, и также $(0,1)$ не возвращается на ту же прямую при последовательном применении $B(q)$.

Для $q > 1/4$ матрица $B(q)$ подобна вращению на угол α, определяемый из инвариантности следа

$$2\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{q}}.$$

Ясно, что α растёт при росте q на интервале $(1/4, +\infty)$. Значит, минимальный α, который превратит некоторый (а значит и все) вектор в коллинеарный ему за $n+2$ шагов, равен

$$\alpha_{\min} = \frac{\pi}{n+2},$$

а его соответствующий параметр q равен

$$q_{\min} = \frac{1}{4\cos^2\left(\frac{\pi}{n+2}\right)}.$$

Задача 10.(пункт а) 10 очков, пункт б) 20 очков) Рассмотрим множество векторов V_{16}, состоящее из всех векторов размерности 16, у которых координаты принимают значения $-1, 0, 1$, и количество нулевых координат в точности равно 8.

Доказать, что найдётся подмножество $W \subseteq V_{16}$, состоящее из попарно неортогональных векторов, размера

а) не менее 12000;

б) не менее 28000.

Решение. Для решения пункта (а) достаточно рассмотреть набор U из векторов, у которых стоит 1 на первом месте, и ещё 7 единиц стоят на остальных местах. Очевидно, что скалярное произведение любых двух векторов из U положительно и $|U| = C_{15}^7 = 6435$. Рассмотрев множество $U \cup (-U)$ получим искомое.

В пункте (б) рассмотрим другое множество U. Разобьём множество координат на первые 5 координат I и оставшиеся 11 координат J. Тогда U состоит из

- множества U_1 из векторов с тремя единицами в I и 5 единицами в J;
- множества U_2 из векторов с 4 единицами в I и 4 единицами в J;
- множества U_3 из векторов с 4 единицами в I, 3 единицами и одной -1 в J;
- множества U_4 из векторов с 5 единицами в I и 3 единицами в J;
- множества U_5 из векторов с 5 единицами в I, двумя единицами и одной -1 в J;
- множества U_6 из векторов с 5 единицами в I, одной единицей и двумя -1 в J;

Можно проверить некоторым перебором, что в множестве U любые два вектора имеют положительное скалярное произведение. Его размер

$$|U| = C_5^3 C_{11}^5 + C_5^4 C_{11}^4 + C_5^4 C_{11}^3 C_8^1 + C_{11}^3 + C_{11}^2 C_9^1 + C_{11}^2 C_9^1 = 14025.$$

Аналогично предыдущему пункту получается множество $W = U \cup (-U)$ из 28050 элементов.