

ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ ПРОГРАММА

по курсу «Теория функций комплексного переменного»

3 курс, 5 семестр, 2013/2014 уч.г.

ПОВЫШЕННЫЙ УРОВЕНЬ

1. Дифференцирование функций по комплексному переменному. Условия Коши–Римана. Понятие функции, регулярной в области.
2. Теорема об обратной функции.
3. Интегрирование функции по комплексному переменному. Основные свойства интегралов. Интегральная теорема Коши для регулярной функции в односвязной области.
4. Область с кусочно-гладкой границей. Интегральная теорема Коши для регулярной функции в случае односвязной звёздной области и в случае неодносвязной области.
5. Интегральная формула Коши.
6. Дифференцирование интеграла типа Коши. Бесконечная дифференцируемость регулярных функций.
7. Степенной ряд и круг его сходимости. Ряд Тейлора. Разложение регулярной функции в степенной ряд, единственность разложения.
8. Теоремы Вейерштрасса. Регулярность суммы степенного ряда.
9. Понятие ряда Лорана и его кольцо сходимости. Разложение в ряд Лорана функции, регулярной в кольце. Единственность разложения в ряд Лорана.
10. Теорема единственности регулярной функции.
11. Понятие первообразной. Достаточное условие существования первообразной у непрерывной функции. Формула Ньютона–Лейбница.
12. Теорема Морера. Теорема о стирании пунктира (*кроме потока Карлова*).
13. Классификация изолированных особых точек однозначного характера по структуре главной части лорановского разложения.
14. Теорема о вычетах. Вычисление несобственных интегралов с помощью вычетов. Лемма Жордана.
15. Приращение аргумента z вдоль гладкого контура, его интегральное представление и свойства. Общий вид регулярных ветвей многозначных функций $\{\operatorname{Ln} z\}$ и $\{\sqrt[n]{z}\}$ в односвязной области.
16. Критерий выделения регулярных ветвей многозначной функции $\operatorname{Ln} f(z)$ в заданной области, их общий вид.
17. Критерий выделения регулярных ветвей многозначной функции $\{\sqrt[n]{f(z)}\}$ в заданной области, их общий вид.
18. Понятие целой функции. Неравенство Коши для коэффициентов ряда Лорана. Теорема Лиувилля.
19. Теорема Сохоцкого для целых функций. Теорема Пикара (без доказательства).

20. Принцип аргумента. Теорема Руше. Основная теорема алгебры.
21. Мероморфные функции. Теорема о разложении мероморфной функции в сумму простейших дробей.
22. Понятие аналитического продолжения. Эквивалентность аналитического продолжения элемента по конечной цепочке кругов вдоль контура.
23. Единственность аналитического продолжения. Понятие аналитической функции.
24. Особые точки аналитических функций. Теорема Коши–Адамара.
25. Лемма об открытости. Принцип сохранения области. Однолиственность и многолиственность в малом.
26. Геометрический смысл модуля и аргумента производной. Понятие конформного отображения в области на комплексной плоскости. Критерий конформности в точке.
27. Понятие конформного отображения в расширенной комплексной плоскости. Теорема Римана о существовании конформного отображения и принцип соответствия границ (без доказательства). Общий вид конформного отображения единичного круга на себя.
28. Дробно-линейная функция и её свойства.
29. Функция Жуковского и её свойства.
30. Конформные отображения, осуществляемые степенной и экспоненциальной функциями.
31. Гармонические функции двух переменных. Их связь с регулярными функциями. Принцип максимума и минимума гармонической функции. Принцип максимума модуля регулярной функции.
32. Общая задача Дирихле для уравнения Лапласа. Единственность решения. Интеграл Пуассона для круга (*кроме потоков Хасанова и Карлова*).
33. Сохранение гармоничности функции при конформном отображении области определения. Существование решения общей задачи Дирихле в ограниченной односвязной области (*кроме потоков Хасанова и Карлова*).
34. Классическая задача Дирихле для уравнения Лапласа. Единственность решения. Интеграл Пуассона для круга.
35. Сохранение гармоничности функции при конформном отображении области определения. Существование решения классической задачи Дирихле в ограниченной односвязной области.
36. Лемма о среднем для гармонической функции. Формула Пуассона для верхней полуплоскости в случае ограниченной, непрерывной граничной функции (*поток Хасанова*).
37. Приложение к анализу: асимптотические оценки интегралов, зависящих от параметра, методом перевала. Примера (*поток Карлова*).
38. Приложение к дискретной математике: вычисление комбинаторных сумм с помощью теоремы Коши о вычетах. Примеры (*поток Карлова*).