

**Экзаменационная программа**  
**Введение в математический анализ**  
**осенний семестр 2013–2014 учебного года**  
**(повышенный уровень)**

**1.** Действительные числа. Теорема о существовании и единственности (точной) верхней (нижней) грани числового множества, ограниченного сверху (снизу). Арифметические операции с действительными числами<sup>1</sup>. Счетность множества рациональных чисел, несчетность множества действительных чисел.

**2.** Предел числовой последовательности. Теорема Кантора о вложенных отрезках. Единственность предела. Бесконечно малые последовательности и их свойства. Свойства пределов, связанные с неравенствами. Арифметические операции со сходящимися последовательностями. Теорема Вейерштрасса о пределе монотонной ограниченной последовательности. Число  $\varepsilon$ . Бесконечно большие последовательности и их свойства.

**3.** Подпоследовательности, частичные пределы. Верхний и нижний пределы числовой последовательности. Теорема Больцано–Вейерштрасса. Критерий Коши существования конечного предела последовательности. Лемма Гейне–Бореля о покрытии отрезка интервалами.<sup>2</sup>

**4.** Определения предела числовой функции одного переменного в терминах окрестностей и в терминах последовательностей, их эквивалентность. Свойства пределов функции. Критерий Коши существования конечного предела функции. Теорема о замене переменного под знаком предела. Существование односторонних пределов у монотонных функций.

**5.** Непрерывность функции в точке. Свойства функций, непрерывных в точке. Односторонняя непрерывность. Теорема о переходе к пределу под знаком непрерывной функции. Непрерывность сложной функции. Точки разрыва, их классификация. Разрывы монотонных функций.

**6.** Свойства функций, непрерывных на отрезке — ограниченность, достижимость (точных) верхней и нижней граней. Теорема о промежуточных значениях непрерывной функции. Теорема об обратной функции.

**7.** Непрерывность элементарных функций. Определение показательной функции. Свойства показательной функции. Логарифмическая функция и ее свойства. Замечательные пределы.

**8.** Производная функции одного переменного. Односторонние производные. Непрерывность функции, имеющей производную. Дифференци-

---

<sup>1</sup>Для потока Р.Н. Карасёва.

<sup>2</sup>Для потока Р.Н. Карасёва

руемость функции в точке, дифференциал. Геометрический смысл производной и дифференциала. Производная суммы, произведения и частного двух функций. Производная сложной функции. Производная обратной функции. Производные элементарных функций. Инвариантность формы дифференциала относительно замены переменного. Функции, заданные параметрически, их дифференцирование. Теорема о локальном представлении параметрически заданной кривой.<sup>3</sup>

**9.** Производные высших порядков. Формула Лейбница для  $n$ -й производной произведения функций. Дифференциал второго порядка. Отсутствие инвариантности его формы относительно замены переменного.

**10.** Теорема Ферма (необходимое условие существования локального экстремума). Теоремы о среднем Ролля, Лагранжа, Коши. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано и Лагранжа. Основные разложения по формуле Тейлора. Правило Лопиталья для раскрытия неопределенностей вида  $\frac{0}{0}$ . Правило Лопиталья для раскрытия неопределенностей вида  $\frac{\infty}{\infty}$ .

**11.** Применение производной к исследованию функций. Необходимые и достаточные условия монотонности, достаточные условия существования локального экстремума в терминах первой и второй производных. Достаточные условия существования локального экстремума в терминах высших производных. Выпуклость, точки перегиба. Необходимые и достаточные условия выпуклости.

**12.** Первообразная и неопределенный интеграл. Интегрирование с помощью замены переменных и по частям. Интегрирование рациональных функций.

**13.** Кривые на плоскости и в пространстве. Гладкая кривая, касательная к гладкой кривой, допустимая замена параметра. Оценка типа теоремы Лагранжа и формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано для вектор-функций. Длина кривой. Производная переменной длины дуги. Натуральный параметр. Кривизна кривой, формулы для ее вычисления. Бинормаль и кручение кривой<sup>4</sup>. Сопровождающий трехгранник пространственной кривой.

---

<sup>3</sup>Кроме потоков О.В. Бесова и Б.И. Голубова

<sup>4</sup>Кроме потоков О.В. Бесова и Б.И. Голубова