ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ ПРОГРАММА
по курсу «Уравнения математической физики»
3 курс, 6 семестр, 2012/2013 уч.г.

(Поток Михайлова В.П.)

При ответе на вопросы из отмеченных звездочкой пунктов студент должен четко сформулировать соответствующий результат, но не обязан приводить ввиду громоздкости его доказательство.

Экзаменационный билет содержит два вопроса. Первый вопрос — из предлагаемой ниже программы (за исключением пунктов, отмеченных звездочкой). Вторым вопросом билета является одна из задач, которые в течение учебного года предлагались на лекциях; Полный список вошедших в билеты задач был сообщён студентам за полтора месяца до экзаменов.

Для получения отличной оценки студент должен отлично ответить на оба вопроса билета; в случае других оценок ответа на второй вопрос не требуется.

1. Классификация линейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка. Инвариантность классификации относительно преобразований независимых переменных. Понятие характеристики. Характеристики волнового уравнения и уравнения теплопроводности.
2. Задача Коши для уравнения теплопроводности. Необходимые условия существования решения. Единственность решения в классе функций, ограниченных в каждой характеристической полосе. Решение задачи Коши для однородного уравнения теплопроводности — формула Пуассона. Принцип максимума. Непрерывная зависимость решения от начальной функции. Отсутствие непрерывной зависимости от начальной функции решения задачи Коши для уравнения «обратной» теплопроводности (пример Ж.Адамара).
3. Задача Коши для волнового уравнения. Необходимые условия для существования решения. Единственность решения. Решение задачи Коши для однородного волнового уравнения в случаях трех, двух и одной пространственных переменных — формулы Кирхгофа, Пуассона и Даламбера. Непрерывная зависимость решения от начальных функций. О диффузии волн.
4. Гармонические функции. Фундаментальное решение уравнения Лапласа. Потенциалы простого и двойного слоев. Бесконечная дифференцируемость гармонических функций. Теоремы о среднем. Обратная теорема о среднем. Теорема об устранении особенности. Принцип максимума. Теорема Лиувилля.
5. Задача Дирихле для уравнения Пуассона в ограниченной области. Необходимые условия для существования решения. Теорема единственности. Теорема о непрерывной зависимости решения от граничной функции. Решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в шаре — формула Пуассона.
6. Вариационный метод решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа в двумерной ограниченной области. Интеграл Дирихле. Минимизирующая последовательность. Усредненная минимизирующая последовательность.

7* Условия равномерной сходимости усредненной минимизирующей последовательности — достаточные условия разрешимости задачи Дирихле в двумерной ограниченной области.

8. Задача Дирихле для уравнения Лапласа в области внешнего типа (внешняя задача Дирихле). Регулярность на бесконечности гармонической функции. Преобразование Кельвина. Принцип максимума. Единственность решения, непрерывная зависимость решения от граничной функции. Сведение внешней задачи Дирихле к задаче в ограниченной области.
9. Задача Неймана для уравнения Лапласа в шаре. Необходимые условия для существования решения. Вопрос о единственности — представление общего решения задачи Неймана. Сведение задачи Неймана к задаче Дирихле; достаточные (и необходимые) условия существования решения.
10. Задача Штурма–Лиувилля. Спектр задачи. Симметрия оператора Штурма–Лиувилля. Квадратичная форма. Кратность спектра, вещественность спектра. Ортогональность собственных функций, отвечающих различным собственным значениям.
11. Компактные множества непрерывных функций; критерий Арчела (без доказательства). Достаточное условие компактности — теорема Соболева.
12. Нахождение первого (минимального) собственного значения и соответствующей собственной функции — задача на условный экстремум квадратичной формы. Минимизирующая последовательность, ее компактность. Построение минимизирующей последовательности Ритца (без доказательства сходимости).
13. Смешанная задача для уравнения теплопроводности (случай одного пространственного переменного). Необходимые условия для существования решения. Принцип максимума. Единственность решения. Непрерывная зависимость решения от начальной и граничных функций. Метод Фурье решения смешанной задачи; достаточные условия существования решения.
14. Смешанная задача для волнового уравнения (случай одного пространственного переменного). Необходимые условия для существования решения. Закон сохранения энергии. Единственность решения. Непрерывная зависимость решения от начальных функций. Метод Фурье решения смешанной задачи; достаточные условия для существования решения.
15. Интегральные уравнения Фредгольма. Сопряженное уравнение. Характеристические числа и собственные функции. Теоремы Фредгольма (доказательства для случая вырожденного ядра).