

**Экзаменационная программа**  
**по дисциплине «Многомерный анализ, интегралы и ряды»,**  
**весенний семестр 2012–2013 учебного года**  
**(повышенный уровень)**

**1.** Предел последовательности точек в  $n$ -мерном евклидовом пространстве. Теорема Больцано–Вейерштрасса и критерий Коши сходимости последовательности. Внутренние, предельные, изолированные точки множества. Открытые и замкнутые множества, их свойства. Внутренность, замыкание и граница множества.

**2.** Предел числовой функции нескольких переменных. Предел функции по множеству. Непрерывность функции нескольких переменных в точке и по множеству. Свойства функций, непрерывных на компакте — ограниченность, достижение точных нижней и верхней граней, равномерная непрерывность (теорема Кантора). Теорема о промежуточных значениях функции, непрерывной в области.

**3.** Частные производные функции нескольких переменных. Дифференцируемость функции в точке, дифференциал. Необходимые условия дифференцируемости, достаточные условия дифференцируемости функции нескольких переменных. Дифференцируемость сложной функции. Инвариантность формы дифференциала относительно замены переменных. Производная по направлению и градиент, их связь и геометрический смысл.

(Кроме потоков Г.Е. Иванова и Л.Н. Знаменской.) Независимость градиента дифференцируемой функции от выбора прямоугольной системы координат.

**4.** Частные производные высших порядков. Независимость смешанной частной производной от порядка дифференцирования. Дифференциалы высших порядков, отсутствие инвариантности их формы относительно замены переменных. Формула Тейлора для функций нескольких переменных с остаточным членом в форме Лагранжа и Пеано.

**5.** (Кроме потока А.Ю. Петровича.) Теорема о неявной функции, заданной одним уравнением. Теорема о неявных функциях, заданных системой уравнений (без доказательства). Локальная обратимость непрерывно дифференцируемого отображения пространств одинаковой размерности с ненулевым якобианом.

(Для потока Г.Е. Иванова) Принцип Банаха сжимающих отображений. Теорема о неявных функциях, заданных системой уравнений (с доказательством).

(Для потока А.Ю. Петровича.) Определение измеримости по Жордану множества в  $n$ -мерном евклидовом пространстве. Критерий измеримости. Измеримость объединения, пересечения и разности измеримых множеств. Конечная аддитивность меры Жордана. Измеримость и мера цилиндра в  $(n + 1)$ -мерном пространстве.

**6.** (Кроме потока А.Ю. Петровича.) Определенный интеграл Римана. Верхние и нижние суммы Дарбу, их свойства. Критерий интегрируемости.

(Для потока А.Ю. Петровича.) Определенный интеграл Римана. Критерий интегрируемости Дарбу. Критерий интегрируемости Римана.

Интегрируемость непрерывной функции, монотонной функции, ограниченной функции с конечным числом точек разрыва. Аддитивность интеграла по отрезкам, линейность интеграла, интегрируемость произведения функций, интегрируемость модуля интегрируемой функции, интегрирование неравенств, теорема о среднем. Свойства интеграла с переменным верхним пределом — непрерывность, дифференцируемость. Формула Ньютона–Лейбница. Замена переменных и интегрирование по частям в определенном интеграле.

**7.** Геометрические приложения определенного интеграла — площадь криволинейной трапеции, объем тела вращения, длина кривой, площадь поверхности вращения (без доказательства).

(Для потока Г.Е. Иванова.) Вычисление площади поверхности вращения (с доказательством).

**8.** Криволинейный интеграл первого рода. Криволинейный интеграл второго рода.

**9.** Несобственный интеграл. Критерий Коши сходимости интеграла. Интегралы от знакопостоянных функций, признак сравнения сходимости. Интегралы от знакопеременных функций, абсолютная и условная сходимость. Признаки Дирихле и Абеля сходимости интегралов.

**10.** Числовые ряды. Критерий Коши сходимости ряда. Знакопостоянные ряды: признак сравнения сходимости, признаки Даламбера и Коши, интегральный признак. Знакопеременные ряды, абсолютная и условная сходимость, признаки Лейбница, Дирихле и Абеля. Независимость суммы абсолютно сходящегося ряда от порядка слагаемых. Теорема Римана о перестановке членов условно сходящегося ряда (без доказательства). Произведение абсолютно сходящихся рядов.

**11.** Равномерная сходимость функциональных последовательностей и рядов. Критерий Коши равномерной сходимости. Непрерывность суммы равномерно сходящегося ряда из непрерывных функций. Почленное интегрирование и дифференцирование функциональных последовательностей и рядов. Признаки Вейерштрасса, Дирихле и Абеля равномерной сходимости функциональных рядов.

**12.** Степенные ряды с комплексными членами. Первая теорема Абеля. Круг и радиус сходимости. Характер сходимости степенного ряда в круге сходимости. Формула Коши–Адамара. Сохранение радиуса сходимости степенного ряда при почленном дифференцировании и интегрировании ряда.

(Кроме потока Г.Е. Иванова.) Вторая теорема Абеля.

**13.** Степенные ряды с действительными членами. Бесконечная дифференцируемость суммы степенного ряда на интервале сходимости. Единственность представления функции степенным рядом. Достаточные условия разложимости бесконечно дифференцируемой функции в степенной ряд. Ряд Тейлора. Формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме. Пример бесконечно дифференцируемой функции, не разлагающейся в степенной ряд. Разложение в ряд Тейлора основных элементарных функций:  $e^x$ ,  $\cos x$ ,  $\sin x$ ,  $\ln(1+x)$ ,  $(1+x)^\alpha$ .

Разложение в степенной ряд комплекснозначной функции  $e^z$ .