Экзаменационная программа
по дисциплине «Многомерный анализ, интегралы и ряды», весенний семестр 2012–2013 учебного года
(базовый уровень)

1. Предел последовательности точек в n–мерном евклидовом пространстве. Теорема Больцано–Вейерштрасса и критерий Коши сходимости последовательности. Внутренние, предельные, изолированные точки множества. Открытые и замкнутые множества, их свойства. Внутренность, замыкание и граница множества.

2. Предел числовой функции нескольких переменных. Предел функции по множеству. Непрерывность функции нескольких переменных в точке и по множеству. Свойства функций, непрерывных на компакте — ограниченность, достижение точных нижней и верхней граней, равномерная непрерывность (теорема Кантора). Теорема о промежуточных значениях функции, непрерывной в области.

3. Частные производные функции нескольких переменных. Дифференцируемость функции в точке, дифференциал. Необходимые условия дифференцируемости, достаточные условия дифференцируемости функции нескольких переменных. Дифференцируемость сложной функции (*без доказательства*). Инвариантность формы дифференциала относительно замены переменных. Производная по направлению и градиент, их связь и геометрический смысл.

(*Кроме потоков Г.Е. Иванова и Л.Н. Знаменской.*) Независимость градиента дифференцируемой функции от выбора прямоугольной системы координат.

4. Частные производные высших порядков. Независимость смешанной частной производной от порядка дифференцирования. Дифференциал второго порядка. Формула Тейлора для функций нескольких переменных с остаточным членом в форме Пеано (*без доказательства*).

5. (*Кроме потока А.Ю. Петровича.*) Теорема о неявной функции, заданной одним уравнением.

(*Для потока А.Ю. Петровича.*) Определение измеримости по Жордану множества в n–мерном евклидовом пространстве. Критерий измеримости (без доказательства). Измеримость объединения, пересечения и разности измеримых множеств. Конечная аддитивность меры Жордана.

6. (*Кроме потока А.Ю. Петровича.*) Определенный интеграл Римана. Верхние и нижние суммы Дарбу, их свойства. Критерий интегрируемости.

(*Для потока А.Ю. Петровича.*) Определенный интеграл Римана. Критерий интегрируемости Дарбу. Критерий интегрируемости Римана.

Интегрируемость непрерывной функции, монотонной функции, ограниченной функции с конечным числом точек разрыва. Аддитивность интеграла по отрезкам, линейность интеграла, интегрируемость произведения функций, интегрируемость модуля интегрируемой функции, интегрирование неравенств, теорема о среднем. Свойства интеграла с переменным верхним пределом — непрерывность, дифференцируемость. Формула Ньютона–Лейбница. Замена переменных и интегрирование по частям в определенном интеграле.

7. Геометрические приложения определенного интеграла — площадь криволинейной трапеции, объем тела вращения, длина кривой, площадь поверхности вращения (*без доказательства*).

(*Для потока Г.Е. Иванова.*) Вычисление площади поверхности вращения (*с доказательством*).

8. Криволинейный интеграл первого рода. Криволинейный интеграл второго рода.

9. Несобственный интеграл. Критерий Коши сходимости интеграла. Интегралы от знакопостоянных функций, признак сравнения сходимости. Интегралы от знакопеременных функций, абсолютная и условная сходимость. Признаки Дирихле и Абеля сходимости интегралов.

10. Числовые ряды. Критерий Коши сходимости ряда. Знакопостоянные ряды: признак сравнения сходимости, признаки Даламбера и Коши, интегральный признак. Знакопеременные ряды, абсолютная и условная сходимость, признак Лейбница.

11. Равномерная сходимость функциональных последовательностей и рядов. Критерий Коши равномерной сходимости. Непрерывность суммы равномерно сходящегося ряда из непрерывных функций. Почленное интегрирование и дифференцирование функциональных последовательностей и рядов. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости функциональных рядов.

12. Степенные ряды с комплексными членами. Первая теорема Абеля. Круг и радиус сходимости. Характер сходимости степенного ряда в круге сходимости. Сохранение радиуса сходимости степенного ряда при почленном дифференцировании и интегрировании ряда.

13. Степенные ряды с действительными членами. Бесконечная дифференцируемость суммы степенного ряда на интервале сходимости. Единственность представления функции степенным рядом. Достаточные условия разложимости бесконечно дифференцируемой функции в степенной ряд. Ряд Тейлора. Формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме. Разложение в ряд Тейлора основных элементарных функций: e^x, $\cos x$,$\sin x$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^\alpha$.