ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ ПРОГРАММА

по курсу «Линейная алгебра»

1 курс, весенний семестр, 2013/2014 уч.г.

ПОВЫШЕННЫЙ УРОВЕНЬ

(Поток Подлипского О.К)

1. Ранг матрицы. Теорема о ранге матрицы. Теорема о базисном миноре.
2. Системы линейных уравнений. Теорема Кронекера–Капелли. Фундаментальная система решений и общее решение однородной системы линейных уравнений. Общее решение однородной и неоднородной системы линейных уравнений. Метод Гаусса. Теорема Фредгольма.
3. Аксиоматика линейного пространства. Линейная зависимость и линейная независимость систем элементов в линейном пространстве.
4. Прямая сумма. Формула размерности суммы подпространств.
5. Разложение по базису в линейном пространстве. Координатное представление элементов линейного пространства и операций с ними. Теорема об изоморфизме. Координатная форма необходимого и достаточного условия линейной зависимости элементов.
6. Изменение координат при изменении базиса в линейном пространстве. Матрица перехода и её свойства.
7. Линейные отображения и линейные преобразования линейного пространства. Ядро и множество образов. Операции над линейными преобразованиями. Обратное преобразование. Линейное пространство линейных отображений.
8. Матрицы линейного отображения и линейного преобразования для конечных пространств. Операции над линейными преобразованиями в координатной форме. Изменение матрицы линейного отображения при замене базисов. Изоморфизм пространства линейных отображений и пространства матриц.
9. Инвариантные подпространства линейных преобразований. Собственные векторы и собственные значения. Собственные подпространства. Линейная независимость собственных векторов, принадлежащих различным собственным значениям.
10. Нахождение собственных значений и собственных векторов линейного преобразования конечномерного линейного пространства. Характеристическое уравнение. Его инвариантность при замене базиса. Оценка размерности собственного подпространства, отвечающего кратному собственному значению. Условия диагонализируемости матрицы линейного преобразования. Приведение матрицы линейного преобразования к треугольному виду.
11. Линейные формы. Сопряжённое (двойственное) пространство.
12. Билинейные и квадратичные формы. Их координатное представление в конечномерном линейном пространстве. Изменение матриц билинейной и квадратичной форм при изменении базиса.
13. Приведение квадратичной формы к каноническому виду методом Лагранжа. Теорема инерции для квадратичных форм. Знакоопределённые квадратичные формы. Критерий Сильвестра.
14. Приведение квадратичной формы к диагональному виду элементарными преобразованиями.
15. Аксиоматика евклидова пространства. Неравенство Коши–Буняковского. Неравенство треугольника. Матрица Грама и её свойства.
16. Конечномерное евклидово пространство. Ортогонализация базиса. Переход от одного ортонормированного базиса к другому. Ортогональное дополнение подпространства.

17. Линейные преобразования евклидова пространства. Ортогональное проектирование на подпространство. Сопряжённые преобразования, их свойства.
18. Самосопряжённые преобразования. Свойства их собственных векторов и собственных значений. Существование базиса из собственных векторов самосопряжённого преобразования.
19. Ортогональные преобразования. Их свойства. Координатный признак ортогональности. Свойства ортогональных матриц.
20. Полярное разложение линейных преобразований евклидова пространства.
21. Построение ортонормированного базиса, в котором квадратичная форма имеет диагональный вид. Одновременное приведение к диагональному виду пары квадратичных форм, одна из которых является знакоопределённой.
22. Унитарное пространство и его аксиоматика. Унитарные и эрмитовы матрицы. Унитарные и эрмитовы преобразования. Эрмитовы формы. Свойства эрмитовых форм.