

ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ ПРОГРАММА
по курсу «Аналитическая геометрия и линейная алгебра»
1 курс, весенний семестр, 2012/2013 уч.г.

ПОВЫШЕННЫЙ УРОВЕНЬ

(Поток Петровой В.Т.)

1. Ранг матрицы. Свойства ранга матрицы. Теорема о ранге.
2. Системы линейных уравнений. Теорема Кронекера–Капелли. Фундаментальная система решений и общее решение однородной системы линейных уравнений. Общее решение неоднородной системы линейных уравнений. Их свойства.
3. Метод Гаусса решения систем линейных уравнений. Фундаментальная матрица системы линейных уравнений. Теорема Фредгольма.
4. Понятие линейного пространства. Основные свойства линейного пространства. Примеры линейных пространств. Конечномерное линейное пространство. Базис конечномерного линейного пространства. Теорема об инвариантности числа векторов базиса линейного пространства. Координатное линейное пространство. Изменение координат вектора при замене базиса конечномерного линейного пространства. Матрица перехода от базиса к базису конечномерного линейного пространства, её свойства.
5. Подпространства линейного пространства. Сумма и пересечение подпространств, прямая сумма подпространств линейного пространства. Теорема Грассмана о размерности суммы подпространств.
6. Линейные отображения (гомоморфизмы) линейных пространств, их основные свойства. Операции на гомоморфизмах линейных пространств. Линейное пространство гомоморфизмов линейных пространств. Изоморфизм линейных пространств V^n и \mathbb{R}^n . Ядро и образ гомоморфизма линейных пространств.
7. Линейные операторы (эндоморфизмы) линейных пространств. Операции на линейных операторах. Алгебра линейных операторов.
8. Матрица линейного отображения (гомоморфизма) конечномерных линейных пространств. Изменение матрицы гомоморфизма линейных пространств при замене базисов пространств. Изоморфизм линейных пространств. $\text{Hom}(U^n, V^n)$ и $M(m \times n)$.
9. Инвариантные подпространства эндоморфизмов линейных пространств. Собственные векторы и собственные значения эндоморфизмов линейных пространств, их свойства. Условия диагонализруемости матрицы линейного оператора на конечномерном линейном пространстве. Собственные подпространства линейных операторов, оценка их размерностей.
10. Линейные формы на линейных пространствах. Сопряжённое (двойственное) пространство. Взаимный (биортогональный, двойственный) базис к базису конечномерного линейного пространства.
11. Билинейные и квадратичные формы на линейных пространствах. Их координатное представление на конечномерном линейном пространстве. Изменение матриц билинейной и квадратичной форм на конечномерном линейном пространстве при замене базиса линейного пространства.
12. Приведение квадратичной формы к каноническому и нормальному виду (методом Лагранжа и методом элементарных преобразований матрицы квадратичной формы). Ранг, сигнатура, положительный и отрицательный индексы квадратичной формы. Закон инерции для квадратичных форм.
13. Знакоопределённые квадратичные формы. Критерий Сильвестра знакоопределённости квадратичных форм.

14. Евклидовы линейные пространства. Скалярное произведение. Свойства скалярного произведения и нормы векторов (неравенство Коши–Буняковского–Шварца, неравенство треугольника). Конечномерное евклидово линейное пространство. Матрица скалярного произведения на конечномерном линейном пространстве, её свойства. Изменение матрицы скалярного произведения при замене базиса линейного пространства. Матрица Грама системы векторов и её свойства.
15. Ортогональные и ортонормированные системы векторов. Ортогонализация системы векторов. Ортогональное дополнение подпространства в евклидовом линейном пространстве. Ортонормированный базис линейного пространства. Переход от ортонормированного базиса к другому ортонормированному базису линейного пространства. Ортогональные матрицы и их свойства.
16. Линейные операторы на евклидовых линейных пространствах. Ортогональное проектирование на подпространство линейного пространства. Ортогональные линейные операторы, их свойства. Матрица ортогонального оператора на конечномерном линейном пространстве.
17. Линейные операторы на евклидовых линейных пространствах. Самосопряжённые линейные операторы, их свойства. Теорема о существовании базиса из собственных векторов самосопряжённого линейного оператора. Матрица самосопряжённого линейного оператора на конечномерном линейном пространстве.
18. Полярное разложение линейного оператора на евклидовом линейном пространстве. Теорема о полярном разложении линейного оператора на конечномерном линейном пространстве..
19. Унитарные линейные пространства. Унитарные и эрмитовы линейные операторы, их свойства. Эрмитовы формы, их свойства.
20. Квадратичные формы на евклидовых линейных пространствах. Приведение квадратичной формы на конечномерном евклидовом линейном пространстве к каноническому виду. Приведение к каноническому виду пары квадратичных форм на конечномерном линейном пространстве.