ЭКЗАМЕНАЦИОННАЯ ПРОГРАММА
по курсу «Линейная алгебра»
1 курс, весенний семестр, 2013/2014 уч.г.

ПОВЫШЕННЫЙ УРОВЕНЬ

(Поток Кожевникова П.А.)

1. Элементарные преобразования матриц. Ранг матрицы. Теоремы о ранге матрицы.
2. Системы линейных уравнений. Теорема Кронекера–Капелли. Фундаментальная система решений и общее решение однородной системы линейных уравнений. Общее решение неоднородной системы. Метод Гаусса. Алгоритм восстановления однородной системы по множеству решений.
3. Аксиоматика линейного пространства. Линейная зависимость и линейная независимость систем элементов в линейном пространстве. Размерность и базис.
4. Подпространства линейного пространства. Линейная оболочка. Сумма и пересечение подпространств. Прямая сумма. Формула размерности суммы подпространств. Вывод формулы размерности суммы подпространств.
5. Разложение по базису в линейном пространстве. Координатное представление элементов линейного пространства и операций с ними. Теорема об изоморфизме. Координатная форма необходимого и достаточного условия линейной зависимости элементов.
6. Изменение координат при изменении базиса в линейном пространстве. Матрица перехода и её свойства.
7. Линейные отображения и линейные преобразования линейного пространства. Операции над линейными преобразованиями. Обратное преобразование. Линейное пространство линейных отображений.
8. Ядро и образ линейного отображения, связь между их размерностями. Матрицы линейного отображения и линейного преобразования для конечномерных пространств. Изменение матрицы линейного отображения при замене базисов. Изоморфизм пространства линейных отображений и пространства матриц.
9. Инвариантные подпространства линейных преобразований. Собственные векторы и собственные значения. Собственные подпространства. Линейная независимость собственных векторов, принадлежащих различным собственным значениям.
10. Нахождение собственных значений и собственных векторов линейного преобразования конечномерного линейного пространства. Характеристическое уравнение. Инварианты: след и определитель. Оценка размерности собственного подпространства. Условия диагонализуемости матрицы линейного преобразования. Приведение матрицы линейного преобразования к треугольному виду. Формулировка теоремы Жордана.
11. Линейные формы. Сопряжённое (двойственное) пространство. Биортогональный базис. Вторичное сопряжённое пространство.
12. Билинейные и квадратичные формы. Их координатное представление в конечномерном линейном пространстве. Изменение матриц билинейной и квадратичной форм при изменении базиса.
13. Приведение квадратичной формы к диагональному и каноническому виду. Теорема инерции для квадратичных форм. Знакоопределённые квадратичные формы. Критерий Сильвестра.
14. Аксиоматика евклидова пространства. Матрица Грама и её свойства. Неравенство Коши–Буняковского–Шварца. Неравенство треугольника.

15. Ортогональные системы векторов и подпространств. Ортогональный и ортонормированный базис. Ортогональное дополнение подпространства. Ортогональная проекция. Ортогонализация.
16. Линейные преобразования евклидова пространства. Сопряжённые преобразования, их свойства. Координатная форма сопряжения преобразования конечномерного евклидова пространства.
17. Самосопряжённые преобразования. Свойства их собственных векторов и собственных значений. Существование базиса из собственных векторов самосопряжённого преобразования.
18. Ортогональные преобразования. Их свойства. Свойства ортогональных матриц.
19. Полярное разложение линейных преобразований евклидова пространства.
20. Построение ортонормированного базиса, в котором квадратичная форма имеет диагональный вид. Одновременное приведение к диагональному виду пары квадратичных форм, одна из которых является знакоопределённой.
21. Унитарное пространство и его аксиоматика. Унитарные и эрмитовы преобразования. Эрмитовы формы. Унитарные и эрмитовы матрицы. Свойства унитарных и эрмитовых преобразований. Свойства эрмитовых форм.
22. Понятие о тензорах. Основные тензорные операции.